

無限粒子系の確率解析学

古典的確率解析の新展開とランダム行列の力学的普遍性

長田 博文 (九州大学)*

1. Dyson モデル

Dyson モデルとは $\mathbb{R}$ を運動する無限粒子系 $\mathbf{X} = (X^i)_{i \in \mathbb{N}}$ である. 粒子の時刻 t の位置 $\mathbf{X}_t = (X_t^i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ は次の確率微分 (積分) 方程式で与えられる.

$$X_t^i - X_0^i = B_t^i + \int_0^t \sum_{j \neq i}^{\infty} \frac{1}{X_u^i - X_u^j} du \quad (i \in \mathbb{N}). \quad (1.1)$$

ここで $\mathbf{B} = (B^i)_{i \in \mathbb{N}}$ は $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ -値ブラウン運動, $\mathbf{X}$ はある確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\})$ で定義された連続なパスを持つ確率過程である. $\mathbf{X}$ は時刻 t と $\omega \in \Omega$ の関数であり, $\mathbf{X} = \mathbf{X}_t = \mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_t(\omega) = \mathbf{X}(t, \omega)$ などとも表記する. 確率論の習慣で, 大抵 ω は省略し $\mathbf{X}$ の中に書かない. (1.1) は積分形で表示したが, 通常, 確率微分方程式 (1.2) で表す.

$$dX_t^i = dB_t^i + \sum_{j \neq i}^{\infty} \frac{1}{X_t^i - X_t^j} dt \quad (i \in \mathbb{N}). \quad (1.2)$$

ただし (1.2) の意味は (1.1) である. 係数に無限和を含むので (1.2) の意味は今の段階では形式的である. (1.2) は Spohn [24] によって有限粒子系の確率微分方程式

$$dX_t^{N,i} = dB_t^i + \sum_{j \neq i}^N \frac{1}{X_t^{N,i} - X_t^{N,j}} dt - \frac{1}{N} X_t^{N,i} dt \quad (i = 1, \dots, N) \quad (1.3)$$

で $N \rightarrow \infty$ としたものとして得られた. (1.3) はガウス型ユニタリランダム行列の固有値の確率力学を記述する確率微分方程式である.

2. Set up と代表例

$S = \mathbb{R}^d$ とする. $\mathbb{R}^d$ の無限粒子系の空間は $\mathbb{R}^{d\mathbb{N}} := (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ だが, 広すぎるので, 粒子を区別しない空間として, $\mathbb{R}^d$ 上の配置空間 $S = \{s = \sum_i \delta_{s_i}; s(S_r) < \infty \text{ for all } r \in \mathbb{N}\}$ を考える. 定義から S は, 有限もしくは無限個の点測度の和からなるラドン測度の空間である. S には, 漠位相を入れ, Polish 空間 (完備可分距離空間と位相同型) と見做す.

$(S, \mathcal{B}(S))$ の確率測度 μ を S の上の点過程とよぶ. 対称な関数 $\rho^n: S^n \rightarrow [0, \infty)$ は (2.1) を満たすときラドン測度 m に対する μ の n -点相関関数と呼ばれる:

$$\int_{A_1^{k_1} \times \dots \times A_m^{k_m}} \rho^n(x_1, \dots, x_n) m(dx_1) \cdots m(dx_n) = \int_S \prod_{i=1}^m \frac{s(A_i)!}{(s(A_i) - k_i)!} d\mu. \quad (2.1)$$

本研究は科研費 (課題番号:基盤研究 (S):16H06338) の助成を受けたものである.

キーワード: 無限粒子系, ランダム行列, クーロンポテンシャル, 無限次元確率微分方程式

* 〒819-0395 福岡市西区元岡 744 九州大学大学院数理学研究院

e-mail: osada@math.kyushu-u.ac.jp

web: http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~osada-labo/kiban_s_HP/index.html

但し, $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{B}(S)$, $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{N}$, $k_1 + \dots + k_m = n$. $s(A_i) - k_i < 0$ の時は, $s(A_i)!/(s(A_i) - k_i)! = 0$ と解釈する. 点過程 μ が核関数 $K: S \times S \rightarrow \mathbb{C}$ とラドン測度 m に付随する行列式点過程とは, μ の m に対する相関関数が次式で与えられることである.

$$\rho^n(x_1, \dots, x_n) = \det[K(x_i, x_j)]_{i,j=1}^n.$$

2.1. Sine $_{\beta}$ 干渉ブラウン運動 (無限次元 Dyson モデル) [17, 25]:

$d = 1$, $\Phi(x) = 0$, $\Psi(x, y) = -\log|x - y|$, $\beta = 1, 2, 4$ とする.

$$dX_t^i = dB_t^i + \frac{\beta}{2} \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{|X_t^i - X_t^j| < r, j \neq i} \frac{1}{X_t^i - X_t^j} dt \quad (i \in \mathbb{N}). \quad (2.2)$$

(2.2) は, $\beta = 2$ の時, 特に無限次元 Dyson モデルと呼ばれる. これが前述の (1.2) と対応している. アンラベル粒子の力学 $X_t = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{X_t^i}$ の定常分布 $\mu_{\text{sin}, \beta}$ は平行移動不変性を持ち, 係数の和は, 絶対収束はしない. 21a $\mu_{\text{sin}, \beta}$ は Sine $_{\beta}$ 点過程と呼ばれる. $\beta = 2$ の時, 行列式点過程となり, 核関数 $K_{\text{sin}, 2}$ は次式で与えられる.

$$K_{\text{sin}, 2}(x - y) = \frac{\sin 2(x - y)}{\pi(x - y)}. \quad (2.3)$$

2.2. Airy $_{\beta}$ 干渉ブラウン運動 [21]:

$d = 1$, $\Phi(x) = 0$, $\Psi(x, y) = -\log|x - y|$, $\beta = 1, 2, 4$ とする.

$$dX_t^i = dB_t^i + \frac{\beta}{2} \lim_{r \rightarrow \infty} \left\{ \left(\sum_{j \neq i, |X_t^j| < r} \frac{1}{X_t^i - X_t^j} \right) - \frac{2\sqrt{r}}{\pi} \right\} dt \quad (i \in \mathbb{N}). \quad (2.4)$$

$\beta = 2$ の時, 定常分布 $\mu_{\text{Ai}, 2}$ は, 行列式点過程であり, 核関数は次式で与えられる.

$$K_{\text{Ai}, 2}(x, y) = \frac{\text{Ai}(x)\text{Ai}'(y) - \text{Ai}'(x)\text{Ai}(y)}{x - y} \quad (x \neq y).$$

ただし $\text{Ai}'(x) = d\text{Ai}(x)/dx$ また $\text{Ai}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dk e^{i(zk + k^3/3)}$ ($z \in \mathbb{R}$) は Airy 関数.

2.3. Ginibre 干渉ブラウン運動 [17]:

$d = 2$, $\Psi(x, y) = -\log|x - y|$ とし, 二つの無限次元確率微分方程式 (2.5) と (2.6) :

$$dX_t^i = dB_t^i + \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{|X_t^i - X_t^j| < r, j \neq i} \frac{X_t^i - X_t^j}{|X_t^i - X_t^j|^2} dt \quad (i \in \mathbb{N}), \quad (2.5)$$

$$dX_t^i = dB_t^i - X_t^i + \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{|X_t^j| < r, j \neq i} \frac{X_t^i - X_t^j}{|X_t^i - X_t^j|^2} dt \quad (i \in \mathbb{N}) \quad (2.6)$$

を考える. 定常分布は Ginibre 点過程 μ_{Gin} と呼ばれる行列式過程で有り, その核関数は $\mathbb{R}^2$ を $\mathbb{C}$ と同一視して, 複素関数で表すと次式で与えられる.

$$K_{\text{Gin}}(x, y) = \frac{1}{\pi} \exp\left\{-\frac{1}{2}|x|^2 + x\bar{y} - \frac{1}{2}|y|^2\right\}.$$

明らかに, (2.5) と (2.6) は異なる方程式だが, Ginibre 点過程 μ_{Gin} のサポートの上では, μ_{Gin} -a.s. 出発点に対して同じ一意的強解を持つ.

2.4. Lennard-Jones 6-12 potential:

$d = 3$, $\beta > 0$ とし $\Psi_{6,12}(x) = \{|x|^{-12} - |x|^{-6}\}$ と置く. 干渉ポテンシャル $\Psi_{6,12}$ は Lennard-Jones 6-12 ポテンシャルと呼ばれる. 対応する無限次元確率微分方程式は

$$dX_t^i = dB_t^i + \frac{\beta}{2} \sum_{j=1, j \neq i}^{\infty} \left\{ \frac{12(X_t^i - X_t^j)}{|X_t^i - X_t^j|^{14}} - \frac{6(X_t^i - X_t^j)}{|X_t^i - X_t^j|^8} \right\} dt \quad (i \in \mathbb{N}).$$

3. ランダム行列と干渉ブラウン運動

N 次のガウス型ランダム行列 $M^N = [m_{ij}]_{i,j=1}^N$ とは, 正方行列であって, その成分が対称性–実対称, Hermit 対称, quaternion 対称 (分布の直交, ユニタリ, シンプレクティク不変性)– からくる制約を除いて独立同分布な確率変数である. これらのランダム行列は G(O/U/S)E と呼ばれる. 分散と平均を標準的に選べば M^N の固有値の分布は

$$m_{\beta}^N(d\mathbf{x}_N) = \frac{1}{Z} \left\{ \prod_{i < j}^N |x_i - x_j|^{\beta} \right\} \exp \left\{ -\frac{\beta}{4} \sum_{k=1}^N |x_k|^2 \right\} d\mathbf{x}_N, \quad (3.1)$$

ここで GOE, GUE, GSE は $\beta = 1, 2, 4$ にそれぞれ対応している.

$(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の確率測度全体の空間を $\mathcal{P}$ とおく. $m_{\beta}^N(d\mathbf{x}_N)$ の下で $\mathcal{P}$ 値確率変数

$$\mathbb{X}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{x_i/\sqrt{N}}$$

を考え, μ_{β}^N をその分布とする. 定義から μ_{β}^N は $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の確率測度全体の空間 $\mathcal{P}$ の上の確率測度である. $\mathcal{P}$ の元 $\sigma_{\text{semi}}(x)dx$ を

$$\sigma_{\text{semi}}(x) = \frac{1}{\pi} \sqrt{4 - x^2} \mathbf{1}_{(-2,2)}(x) \quad (3.2)$$

で定義する. $\sigma_{\text{semi}}(x)dx$ は形から半円分布と呼ばれる. 有名な Wigner の半円法則とは, $\{\mu_{\beta}^N\}$ がノンランダムな測度 $\delta_{\sigma_{\text{semi}}(x)dx}$ に弱収束することを主張する.

半円分布 $\sigma_{\text{semi}}(x)dx$ を考察した $\mathbb{R}$ の各点をマクロな位置とよぶ. 各マクロな位置 $\theta \in \mathbb{R}$ において意味のある極限があるように, 適切に (3.2) をリスケールする. これは $|\theta| < 2$ と $\theta = \pm 2$ の場合に可能で前者を Bulk, 後者を Soft Edge の位置と呼ぶことにする.

3.1. Bulk 極限と (小さな) 普遍性

Bulk の位置 $\{|\theta| < 2\}$ のスケーリングを Bulk 極限という. このとき (3.1) を

$$x_i \mapsto \frac{s_i + \theta N}{\sqrt{N}}$$

とスケーリングする. すると $m_{\beta}^N(ds_N)$ の分布は

$$\tilde{m}_{\beta}^N(ds_N) = \frac{1}{Z} \left\{ \prod_{i < j}^N |s_i - s_j|^{\beta} \right\} \exp \left\{ -\frac{\beta}{4} \sum_{k=1}^N \left| \frac{s_i + \theta N}{\sqrt{N}} \right|^2 \right\} ds_N. \quad (3.3)$$

対応する配置空間 S の分布を $\mu_{\beta,\theta}^N$ と表すと, 極限 $\mu_{\beta,\theta}$ は核関数 $K_{\theta}(x, y) = \frac{\sin\{\sqrt{4-\theta^2}(x-y)\}}{\pi(x-y)}$ をもつ Sine $_{\beta,\theta}$ 点過程になる. ここで $\theta = 0$ の場合が, (2.3) で現れた.

N 粒子系 $\mathbf{X}^N = (X^{N,i})_{i=1}^N$ の確率微分方程式は (3.3) から部分積分をして与えられる.

$$dX_t^{N,i} = dB_t^i + \frac{\beta}{2} \sum_{j \neq i}^N \frac{1}{X_t^{N,i} - X_t^{N,j}} dt - \frac{\beta}{2N} X_t^{N,i} dt - \frac{\beta}{2} \theta dt.$$

この確率微分方程式で N を形式的に飛ばした極限は

$$dX_t^{\infty,i} = dB_t^i + \frac{\beta}{2} \sum_{j \neq i}^{\infty} \frac{1}{X_t^{\infty,i} - X_t^{\infty,j}} dt - \frac{\beta}{2} \theta dt.$$

この方程式は $\theta = 0$ 以外では正しい極限を与えない. 実際, 極限は常に (2.2) である.

定理 3.1 (河本-O.[5]). $\beta = 2$ とする. アンラベル粒子の初期分布を $\mu_{2,\theta}^N$ で与え, 初期のラベルを適切に設定すると, 任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して $\mathbf{X}^N = (X^{N,i})_{i=1}^N$ の最初の m 個は $C([0, \infty); \mathbb{R}^m)$ に於いて, (2.2) の解の最初の m 個に弱収束する.

3.2. Soft Edge 極限, Airy 干渉ブラウン運動

半円分布の両端の点 $\theta = \pm 2$ でのスケーリングを Soft Edge 極限という. この時,

$$x \mapsto 2\sqrt{N} + \frac{s}{N^{1/6}}. \quad (3.4)$$

$N \rightarrow \infty$ の極限は, $\mu_{\text{Ai},\beta}$ となる. N 粒子系の分布 $\mu_{\text{Ai},\beta}^N(ds)$ は,

$$\mu_{\text{Ai},\beta}^N(ds_N) = \frac{1}{Z} \left\{ \prod_{i < j}^N |s_i - s_j|^\beta \right\} \exp \left\{ -\frac{\beta}{4} \sum_{k=1}^N \left| 2\sqrt{N} + \frac{s_k}{N^{1/6}} \right|^2 \right\} ds_N.$$

これから対応する N 粒子系 $\mathbf{X}^N = (X_t^{N,1}, \dots, X_t^{N,N})$ が満たす確率微分方程式は

$$dX_t^{N,i} = dB_t^i + \frac{\beta}{2} \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{1}{X_t^{N,i} - X_t^{N,j}} dt - \frac{\beta}{2} \left\{ N^{1/3} + \frac{1}{2N^{1/3}} X_t^{N,i} \right\} dt. \quad (3.5)$$

ここで $N \rightarrow \infty$ の極限をとる難しさは, (3.5) の係数が $-\frac{\beta}{2} N^{1/3} dt$ という発散項を含む点である. 種村氏との共同研究 [21] で無限次元確率微分方程式

$$dX_t^i = dB_t^i + \frac{\beta}{2} \lim_{r \rightarrow \infty} \left\{ \left(\sum_{j \neq i, |X_t^j| < r} \frac{1}{X_t^i - X_t^j} \right) - \frac{2\sqrt{r}}{\pi} \right\} dt \quad (3.6)$$

を解き, 河本氏との共同研究 [6] で (3.5) の解が (3.6) の解に収束することを示した. 尚, 確率微分方程式 (3.6) の形は半円分布 (3.2) とスケーリング (3.4) から直感的に導くことができる. この導出は普遍的だと思われる.

4. 代数的構成: 時空間相関関数の方法

干渉ポテンシャルが対数関数の時, 1次元系に於いて逆温度 $\beta = 2$ ならば, 時空間相関関数を拡張核関数の行列式で具体的に与えることで確率力学を構成できる. 1次元の無限粒子系の代表例, Sine, Airy 点過程の場合に, この拡張核関数を明示する.

S 値過程 $\mathbf{X}_t$ の多重時間モーメント生成関数を以下で定義する.

$$\Psi^t[\mathbf{f}] = \mathbb{E} \left[\exp \left\{ \sum_{m=1}^M \int_{\mathbb{R}} f_m d\mathbf{X}_{t_m} \right\} \right],$$

いま $\mathbb{K}(s, x; t, y)$ を拡張核関数とし, その Fredholm 行列式を用いて $\Psi^t[\mathbf{f}]$ を表示する:

$$\Psi^t[\mathbf{f}] = \text{Det}_{\substack{(s,t) \in \{t_1, t_2, \dots, t_M\}^2, \\ (x,y) \in \mathbb{R}^2}} \left[\delta_{st} \delta(x-y) + \mathbb{K}(s, x; t, y) \chi_t(y) \right],$$

ここで $M \in \mathbb{N}$, $\mathbf{f} = (f_i)_{i=1}^M \in C_0(\mathbb{R})^M$, $\mathbf{t} = (t_i)_{i=1}^M$ ($0 < t_1 < \dots < t_M$) である. また, $\chi_{t_i} = e^{f_i} - 1$ ($1 \leq i \leq M$) [3, 4].

(i) 拡張 **sine** 核: $\mathbb{K}_{\text{sin}}(s, x; t, y)$, $s, t \in \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{K}_{\text{sin}}(s, x; t, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_0^1 du e^{u^2(t-s)/2} \cos\{u(y-x)\} & \text{if } s < t, \\ K_{\text{sin}}(x, y) & \text{if } s = t, \\ -\frac{1}{\pi} \int_1^\infty du e^{u^2(t-s)/2} \cos\{u(y-x)\} & \text{if } s > t. \end{cases}$$

(ii) 拡張 **Airy** 核: $\mathbb{K}_{\text{Ai}}(s, x; t, y)$, $s, t \in \mathbb{R}^+$, $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{K}_{\text{Ai}}(s, x; t, y) = \begin{cases} \int_0^\infty du e^{-u(t-s)/2} \text{Ai}(u+x) \text{Ai}(u+y) & \text{if } s < t, \\ K_{\text{Ai}}(x, y) & \text{if } s = t, \\ -\int_{-\infty}^0 du e^{-u(t-s)/2} \text{Ai}(u+x) \text{Ai}(u+y) & \text{if } s > t. \end{cases}$$

5. 解析的構成:干渉ブラウン運動の一般論の始まり

点過程 μ の正則条件付き確率 $\mu_{r,\xi}^n$ を次式で定義する.

$$\mu_{r,\xi}^n(dx) = \mu(\pi_{S_r}(\cdot) \in \cdot | \pi_{S_r^c}(\mathbf{x}) = \pi_{S_r^c}(\xi), \mathbf{x}(S_r) = n). \quad (5.1)$$

ここで, $\pi_A(\mathbf{s}) = \mathbf{s}(\cdot \cap A)$, $S_r = \{s \in S; |s| < r\}$, $\xi \in S$. つまり S_r の外で ξ , 内部にちょうど n 個の粒子が存在するという条件付き確率である. Λ を Lebesgue 測度を強度とする Poisson 点過程とし, $\Lambda_r^n = \Lambda(\cdot \cap S_r^n)$ とおく. 但し, $S_r^n = \{\mathbf{s} \in S; \mathbf{s}(S_r) = n\}$. μ が (Φ, Ψ) -カノニカル Gibbs 測度とは, 次の関係式 (DLR 方程式) を満たすことである.

$$\mu_{r,\xi}^n(dx) = \frac{1}{Z} e^{-\mathcal{H}_{r,\xi}} \Lambda_r^n(dx). \quad (\text{DLR 方程式})$$

ここで $\mathcal{H}_{r,\xi} = \mathcal{H}_r + \mathcal{I}_{r,\xi}$ とする. ただし

$$\mathcal{H}_r(\mathbf{s}) = \beta \left\{ \sum_{i=1}^n \Phi(s_i) + \sum_{i < j, s_i, s_j \in S_r} \Psi(s_i, s_j) \right\}, \quad \mathcal{I}_{r,\xi} = \beta \sum_{s_i \in S_r, \xi_k \in S_r^c} \Psi(s_i, \xi_k). \quad (5.2)$$

$\mathcal{H}_r$ は S_r 内のハミルトニアン, $\mathcal{I}_{r,\xi}$ は内部と外部の干渉項である.

$\Psi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ で相互作用しながら運動する $\mathbb{R}^d$ のブラウン粒子は

$$dX_t^i = dB_t^i - \frac{\beta}{2} \sum_{j \neq i}^\infty \nabla \Psi(X_t^i - X_t^j) dt \quad (i \in \mathbb{N}). \quad (5.3)$$

で記述される. 確率微分方程式 (5.3) は, Lang [9, 10] によって始めて一般的に解かれた. 通常, 確率微分方程式を解くためには, 伊藤スキームを用いる. つまり常微分方

程式の場合と類似の Picard 近似による方法をとる．従って，少なくとも局所的な，係数の Lipschitz 連続性が必要となる．無限次元では，係数の Lipschitz 連続性は期待できないし，局所化も非常に複雑になる．Lang はポテンシャル係数が， $\Psi \in C_0^3(\mathbb{R}^d)$ の場合に，Gibbs 測度の評価と組み合わせることにより実行した．しかし Ψ が多項式減衰の場合は，Lang の方針—伝統的な伊藤の方法を用いること—で証明するのは無理だった．

無限次元確率微分方程式は，一般には無限個の異なる係数 σ_i と b_i によって

$$\begin{aligned} dX_t^1 &= \sigma_1(\mathbf{X}_t)dB_t^1 + b_1(\mathbf{X}_t)dt \\ dX_t^2 &= \sigma_2(\mathbf{X}_t)dB_t^2 + b_2(\mathbf{X}_t)dt \\ dX_t^3 &= \sigma_3(\mathbf{X}_t)dB_t^3 + b_3(\mathbf{X}_t)dt \\ &\dots \end{aligned}$$

という形で与えられる．もし， (σ_i, b_i) が $i \rightarrow \infty$ で十分に早く $(0, 0)$ に収束すれば，(収束の早さ次第で) 通常の SDE と同様に解くことが出来る．今の場合，問題は (σ_i, b_i) が「対称性」を持ち， $i \rightarrow \infty$ で $(0, 0)$ に収束しない点である．つまり，各係数が，1 つの関数 $(\sigma, b): \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow (\mathbb{R}^{d^2} \times \mathbb{R}^d) \cup \{\infty\}$ によって，次で与えられる．($X_t^{i\Diamond} = \sum_{j \neq i}^\infty \delta_{X_t^j}$)

$$\begin{aligned} dX_t^1 &= \sigma(X_t^1, X_t^{1\Diamond})dB_t^1 + b(X_t^1, X_t^{1\Diamond})dt \\ dX_t^2 &= \sigma(X_t^2, X_t^{2\Diamond})dB_t^2 + b(X_t^2, X_t^{2\Diamond})dt \\ dX_t^3 &= \sigma(X_t^3, X_t^{3\Diamond})dB_t^3 + b(X_t^3, X_t^{3\Diamond})dt \\ &\dots \end{aligned}$$

繰り返すが，ここで関数 $(\sigma, b)(x, s)$ が粒子の番号 i に依存しないことに注意する．

対称性は従来 of 感覚の手法を使う障害となった．逆にそれにより，系全体を配置空間に値をとる対象と見なせて，アンラベル確率力学 $\mathbf{X} = \sum_{i=1}^\infty \delta_{X^i}$ が有効になる． $\mathbf{X}$ は不変確率測度を持ち，幾何的な確率解析的手法，Dirichlet 形式論が有効になる．

6. 幾何的構成 : Dirichlet form approach (第一理論)

この章の目的は，次の無限次元確率微分方程式を解く一般論を展開することである．

$$dX_t^i = \sigma(X_t^i, X_t^{i\Diamond})dB_t^i + b(X_t^i, X_t^{i\Diamond})dt \quad (i \in \mathbb{N}), \quad \mathbf{X} \in \mathbf{W}^{\text{sol}}. \quad (6.1)$$

方程式は時間区間 $[0, T]$ で解くこととし $W(\mathbb{R}^{d\mathbb{N}}) = C([0, T]; \mathbb{R}^{d\mathbb{N}})$ と置く． $\mathbf{W}^{\text{sol}}$ は $W(\mathbb{R}^{d\mathbb{N}})$ の対称な部分集合で解の空間である．係数を自然に $W(\mathbb{R}^{d\mathbb{N}})$ の部分集合で定義された関数と見なした時， $\mathbf{W}^{\text{sol}}$ はその定義域に含まれているとする．

6.1. アンラベル拡散過程の構成

定義 6.1 (準 Gibbs 測度). Φ, Ψ をそれぞれ自由および干渉ポテンシャルとする． μ が (Φ, Ψ) 準 Gibbs 測度とは (5.1) の $\mu_{r, \xi}^n$ が， (r, ξ, n) に依存する正定数 $C = C(r, \xi, n)$ に対して次の不等式を満たすことである． μ -a.s. ξ とすべての $r, n \in \mathbb{N}$ に対して

$$C(r, \xi, n)^{-1} e^{-\mathcal{H}_r(s)} d\Lambda_r^n \leq \mu_{r, \xi}^n(ds) \leq C(r, \xi, n) e^{-\mathcal{H}_r(s)} d\Lambda_r^n.$$

ここで二つの測度 μ と ν が $\mu \leq \nu$ とは，すべての A に対して $\mu(A) \leq \nu(A)$ が成り立つことを表す． $\mathcal{H}_r(s)$ は (5.2) で定義された S_r 内部だけのハミルトニアンである．

(6.1) の係数 σ を用いて $a(x, s) = \sigma(x, s)^t \sigma(x, s)$ と置く．以下を仮定する．

(A1) a は一様楕円かつ有界, μ は (Φ, Ψ) 準 Gibbs 測度, 上半連続なポテンシャル (Φ_0, Ψ_0) と正定数 c_1 と c_2 によって, $c_1(\Phi_0, \Psi_0) \leq (\Phi, \Psi) \leq c_2(\Phi_0, \Psi_0)$.

(A2) ある $p > 1$ に対して μ の n 点相関関数がすべての $n \in \mathbb{N}$ について L^p 局所有界.

これらの, μ と a に対して以下のように Dirichlet 形式を定義する．

$$\mathcal{E}^{a, \mu}(f, g) = \int_S \mathbb{D}^a[f, g] d\mu, \quad \mathbb{D}^a[f, g] = \frac{1}{2} \sum_i a(s_i, s^{i\Diamond}) \frac{\partial \check{f}}{\partial s_i} \cdot \frac{\partial \check{g}}{\partial s_i}.$$

但し $s = \sum_i \delta_{s_i}$ に対して $s^{i\Diamond} = \sum_{j \neq i} \delta_{s_j}$ と置く． $\mathcal{D}_\circ$ を S 上の局所的かつ滑らかな関数空間とし, $\mathcal{D}_\circ^{a, \mu} = \{f \in \mathcal{D}_\circ \cap L^2(F, \mu); \mathcal{E}^{a, \mu}(f, f) < \infty\}$ と置く．

定理 6.1 ([14, 15, 18]). (A1) と (A2) を仮定する．このとき $(\mathcal{E}^{a, \mu}, \mathcal{D}_\circ^{a, \mu})$ は $L^2(F, \mu)$ 上, 可閉となる．その閉包 $(\mathcal{E}^{a, \mu}, \mathcal{D}^{a, \mu})$ に付随する拡散過程 $(X, \{P_s\}_{s \in S})$ が存在する．

6.2. ラベル力学

$S_{s,i} = \{s; s(\{x\}) = 0 \text{ or } 1 \text{ for } \forall x \in \mathbb{R}^d, s(\mathbb{R}^d) = \infty\}$ と置き, 次の二つを仮定する．

(A3) 各粒子 $\{X^i\}$ は非衝突かつ無限系: $P_\mu(X_t \in S_{s,i} \text{ for } \forall t \in [0, \infty)) = 1$.

(A4) 各粒子 $\{X^i\}$ は非爆発: $P_\mu(\bigcap_{i=1}^\infty \{\sup_{0 \leq u \leq t} |X_u^i| < \infty \text{ for } \forall t \in [0, \infty)\}) = 1$.

以上二つの仮定の下でアンラベルパス X_t に時刻 $t = 0$ でラベル $l(X_0) = s$ をつけるとそれはずっと保存される．このパス空間からパス空間への対応を l_{path} と表す．

定理 6.2. (A1)–(A4) を仮定する．定理 6.1 で構成したアンラベル力学 X に対して $X = l_{\text{path}}(X)$ によってラベル力学 $\mathbf{X}$ を構成できる． $\mathbf{X}$ は $\mathbb{R}^{d\mathbb{N}}$ 値拡散過程となる．

$\mu^{[m]}(dx ds) = \rho^m(x) dx \mu_x(ds)$ を μ の m -Campbell 測度とよぶ．ただし ρ^m は μ の m 点相関関数, μ_x は $x = (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^d)^m$ で条件づけられた縮約 Palm 測度である：

$$\mu_x(ds) = \mu(ds - \sum_{i=1}^n \delta_{x_i} | s(x_i) \geq 1 \text{ for all } i).$$

$\mu^{[m]}$ に対して m -ラベル力学に対する定理 6.1 の類似が成立する．そこで $\mu^{[m]}$ に対応する $(\mathbb{R}^d)^m \times S$ 上の Dirichlet 空間を $\Xi^{[m]}(\mu)$ と置く．

定理 6.3 ([16]). (A1)–(A4) を仮定する．この時, $\Xi^{[m]}(\mu)$ に対して 6 章の Λ の場合と同じカップリングが存在する．つまり, $\Xi^{[m]}(\mu)$ に付随する $\mathbf{X}^{[m]}$ は次を満たす．

$$\mathbf{X}^{[m]} = (X^1, \dots, X^m, \sum_{i=m+1}^\infty \delta_{X^i}) \quad \text{in distribution.}$$

ここで右辺の X^i は定理 6.2 で構成されたラベル力学 $\mathbf{X} = (X^i)_{i \in \mathbb{N}}$ の各成分である．

6.3. 無限次元確率微分方程式

つぎに確率微分方程式 (6.1) を解く．そのため, 対数微分 d^μ の概念を導入する．

定義 6.2. d^μ が μ の対数微分とはすべての $f \in C_0(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{D}_\circ$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}^d \times S} d^\mu f d\mu^{[1]} = - \int_{\mathbb{R}^d \times S} \nabla_x f d\mu^{[1]}. \quad (6.2)$$

(6.2) から、対数微分を $d^\mu(x, s) = \nabla_x \log \mu^{[1]}(x, s)$ と表す.

(A5) μ は対数微分 d^μ をもち、次の微分方程式を満たす.

$$2b(x, s) = \nabla_x a(x, s) + a(x, s) \nabla_x \log \mu^{[1]}(x, s).$$

定理 6.4 ([17]). (A1)–(A5) を仮定する. このとき与えられたラベル l に対して確率微分方程式 (6.1) は μ^l -a.s. s の出発点に対して解 $(\mathbf{X}, \mathbf{B})$ をもつ. $\mathbf{X}$ は, $(\mathbb{R}^d)^\mathbb{N}$ 値拡散過程になる. また対応するアンラベル確率力学 $\mathbf{X}$ は μ 可逆拡散過程である.

7. 末尾解析 (第二理論): 強解の存在とパスワイズ一意性

第一理論の解は、通常の $\mathbb{R}^{d\mathbb{N}}$ -値過程 $\mathbf{X}$ とブラウン運動 $\mathbf{B}$ の対 $(\mathbf{X}, \mathbf{B})$ として得られる弱解である. 一般に $\mathbf{X}$ がブラウン運動 $\mathbf{B}$ の関数として構成される場合、強解と呼ぶが、それではない. また、与えられた Dirichlet 空間に付随する解は一意だが、確率微分方程式 (6.1) に付随する Dirichlet 空間の一意性が示されておらず、故に第一理論では解の一意性は証明されていない.

この章では大きな無限次元空間 $\mathbb{R}^{d\mathbb{N}}$ の代わりに小さな無限次元空間の列 $(\mathbb{R}^d)^m \times S$ を考える. $(\mathbb{R}^d)^m \times S$ において S はランダム環境、また $(\mathbb{R}^d)^m$ を、強解の存在や一意性が成立する有限次元空間の列と捉え直し、その上の、有限次元確率微分方程式の列を考える. そして、 $(\mathbb{R}^d)^m$ ($m \in \mathbb{N}$) 上の確率微分方程式 (7.1) の間に、カップリングを導入する. つまり、1つの無限次元確率微分方程式を無限個の両立性を持つ有限次元確率微分方程式の列 (IFC) と解釈する. そのために、第一理論で構成した弱解 $(\mathbf{X}, \mathbf{B})$ を用いる.

7.1. 無限次元確率微分方程式の強解の存在とパスワイズ一意性

(6.1) の解 $(\mathbf{X}, \mathbf{B})$ が与えられているとする. つぎに $(\mathbf{X}, \mathbf{B})$ をもちいて、 $(\mathbb{R}^d)^m$ -値確率微分方程式の族を考える. 各 $m \in \mathbb{N}$ に対して $\mathbf{Y}^m = (Y^{m,i})_{i=1}^m$ についての方程式

$$dY_t^{m,i} = \sigma(Y_t^{m,i}, Y_t^{m,i\Diamond} + X_t^{m*}) dB_t^i + b(Y_t^{m,i}, Y_t^{m,i\Diamond} + X_t^{m*}) dt, \quad \mathbf{Y}_0^m = \mathbf{s}^m. \quad (7.1)$$

を考える. ここで、 $\mathbf{s} = (s_i)_{i \in \mathbb{N}}$ に対して $\mathbf{s}^m = (s_1, \dots, s_m)$ 、また、次のように置く.

$$Y^{m,i\Diamond} = \sum_{j \neq i}^m \delta_{Y^{m,j}}, \quad X^{m*} = \sum_{k=m+1}^{\infty} \delta_{X^k}, \quad X^{m*} = (X^k)_{k=m+1}^{\infty}.$$

各 $\mathbf{X}$ を固定するごとに、(7.1) は、時間非一様な dm 次元の確率微分方程式になる. 従って、 $\mathbf{X}$ の振る舞いが良ければ、有限次元確率微分方程式 (7.1) は、各 m に対してパスワイズ一意の強解をもつ. これは、 $(\mathbf{B}^m, \mathbf{X}^{m*})$ と初期条件 $\mathbf{s}^m$ の関数なので

$$\mathbf{Y}^m = \mathbf{Y}^m(\mathbf{s}^m, \mathbf{B}^m, \mathbf{X}^{m*}) = \mathbf{Y}^m(\mathbf{s}, \mathbf{B}, \mathbf{X}^{m*})$$

とあらわす. $\mathbf{Y}^m$ は $\sigma[\mathbf{s}, \mathbf{B}, \mathbf{X}^{m*}]$ 可測である. $(\mathbf{X}, \mathbf{B})$ が無限次元確率微分方程式の解という仮定と方程式 (7.1) の解のパスワイズ一意性から

$$\mathbf{X}^m = \mathbf{Y}^m \quad (7.2)$$

となり、極限 $\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{Y}^m$ が自明に存在する. つまり次式が成立する.

$$\mathbf{X} = \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{Y}^m(\mathbf{s}, \mathbf{B}, \mathbf{X}^{m*}). \quad (7.3)$$

尚, (7.2) より解 $\mathbf{X}$ が「不動点」と成るが, 時節ではより一般の場合も考えている.
 ラベルパス空間のラベルについての末尾 σ 加法族 $\mathcal{T}_{\text{path}}(\mathbb{R}^{d\mathbb{N}})$ を

$$\mathcal{T}_{\text{path}}(\mathbb{R}^{d\mathbb{N}}) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \sigma[\mathbf{X}^{m*}]$$

で定義する. 尚, 後で配置空間 S の空間についての末尾 σ 加法族を導入する. 更に

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^{d\mathbb{N}}) \times \mathcal{B}(W(\mathbb{R}^{d\mathbb{N}})) \times \mathcal{T}_{\text{path}}(\mathbb{R}^{d\mathbb{N}})$$

の「完備化」を $\widetilde{\mathcal{T}\mathcal{T}}_{\text{path}}$ とおく. すると, (7.3) から $\mathbf{X}$ は, $\widetilde{\mathcal{T}\mathcal{T}}_{\text{path}}$ 可測である.

弱解 $(\mathbf{X}, \mathbf{B})$ の分布を P とし, 初期条件 $\mathbf{s}$ とブラウン運動 $\mathbf{B}$ について条件付けた正則条件付き確率を $P_{\mathbf{s}, \mathbf{B}} = P(\cdot | (\mathbf{s}, \mathbf{B}))$, $\mathbf{B}$ の分布を P_{Br}^{∞} , $\Upsilon = (\mu \circ \Gamma^{-1}) \times P_{\text{Br}}^{\infty}$ とおく.

(P1) 無限次元確率微分方程式 (6.1) が $\mu \circ \Gamma^{-1}$ -a.s. $\mathbf{s}$ に対して解 $(\mathbf{X}, \mathbf{B})$ をもつ.

(P2) 各 $m \in \mathbb{N}$ に対して, (7.1) はパスワイズ一意の強解を持つ.

(P3) Υ -a.s. $(\mathbf{s}, \mathbf{B})$ に対して, $P_{\mathbf{s}, \mathbf{B}}|_{\mathcal{T}_{\text{path}}(\mathbb{R}^{d\mathbb{N}})}$ は自明かつ一意.

定理 7.1 ([20]). (P1)–(P3) を仮定する. すると, (6.1) は, $\mu \circ \Gamma^{-1}$ -a.s. $\mathbf{s}$ に対して強解が存在しパスワイズに一意である. 更に, 任意の解は一意的な強解と一致する.

(P1) は第一理論で解決した. (P2) と (P3) も広範囲で成立する十分条件がある.

7.2. IFC 解

(7.2) の両立性は漸近的なものでもよく, そこまで一般化すると IFC 解の概念が得られる. IFC 解には様々なレベルの種類があり, 古典解の性質「弱解」, 「強解」, 「パスワイズ一意性」と一対一に対応している. この章では (P2) を仮定する.

$\mathbf{W}_0 = \{\mathbf{X} \in W(\mathbb{R}^{d\mathbb{N}}); \mathbf{X}_0 = \mathbf{0}\}$, $\mathbf{W}_{\mathbf{s}}^{\text{sol}} = \{\mathbf{X} \in \mathbf{W}^{\text{sol}}; \mathbf{X}_0 = \mathbf{s}\}$ と置く. 写像 $F_{\mathbf{s}}^m : \mathbf{W}_{\mathbf{s}}^{\text{sol}} \times \mathbf{W}_0 \rightarrow \mathbf{W}_{\mathbf{s}}^{\text{sol}}$ を次式で定義する.

$$F_{\mathbf{s}}^m(\mathbf{X}, \mathbf{B}) = \{(Y_t^{m,1}, \dots, Y_t^{m,m}, X_t^{m+1}, X_t^{m+2}, \dots)\}_{0 \leq t \leq T}.$$

ここで $\mathbf{Y}^m = (Y^{m,i})_{i=1}^m$ は仮定 (P2) から得られる (7.1) の一意解である.

各 $(\mathbf{s}, \mathbf{B})$ を固定すると, $F_{\mathbf{s}}^m(\cdot, \mathbf{B})$ は $\mathbf{W}_{\mathbf{s}}^{\text{sol}}$ から $\mathbf{W}_{\mathbf{s}}^{\text{sol}}$ への写像 $F_{\mathbf{s}}^m = (F_{\mathbf{s}}^{m,i})_{i=1}^m$ を定める. $\mathbf{W}_{\mathbf{s}}^{\text{sol}} \times \mathbf{W}_0$ 上の確率測度 $\bar{P}_{\mathbf{s}}$ が与えられたとする. この時,

$$F_{\mathbf{s}}^{\infty}(\mathbf{X}, \mathbf{B}) = \lim_{m \rightarrow \infty} F_{\mathbf{s}}^m(\mathbf{X}, \mathbf{B}) \text{ in } \mathbf{W}^{\text{sol}} \text{ under } \bar{P}_{\mathbf{s}} \quad (7.4)$$

とは, 下記の条件が満たされることとする. $F_{\mathbf{s}}^{\infty}(\mathbf{X}, \mathbf{B}) \in \mathbf{W}^{\text{sol}}$ かつ, すべての $i \in \mathbb{N}$ に対して, $W(\mathbf{S})$ に於ける極限 (7.5)–(7.7) が $\bar{P}_{\mathbf{s}}$ -a.s. $(\mathbf{X}, \mathbf{B})$ に対して存在する.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} F_{\mathbf{s}}^{m,i}(\mathbf{X}, \mathbf{B}) = F_{\mathbf{s}}^{\infty,i}(\mathbf{X}, \mathbf{B}), \quad (7.5)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^{\cdot} \sigma^i(F_{\mathbf{s}}^m(\mathbf{X}, \mathbf{B})_u) dB_u^i = \int_0^{\cdot} \sigma^i(F_{\mathbf{s}}^{\infty}(\mathbf{X}, \mathbf{B})_u) dB_u^i, \quad (7.6)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^{\cdot} b^i(F_{\mathbf{s}}^m(\mathbf{X}, \mathbf{B})_u) du = \int_0^{\cdot} b^i(F_{\mathbf{s}}^{\infty}(\mathbf{X}, \mathbf{B})_u) du. \quad (7.7)$$

ここで $\sigma^i(\mathbf{Z}_t) = \sigma(Z_t^i, Z_t^{i,\diamond})$, また b^i も同様に定義する.

定義 7.1 (IFC解). $\bar{P}_s$ は (7.4) と (7.8) を満たすとき, (6.1) の IFC 解と呼ぶ.

$$\bar{P}_s(\mathbf{W}_s^{\text{sol}} \times \mathbf{W}_0) = 1, \quad \bar{P}_s(\mathbf{B} \in \cdot) = P_{\text{Br}}^\infty. \quad (7.8)$$

まず, (6.1) の弱解を IFC 解から構成する.

補題 7.2 (種村-O.[20]). 初期条件 $\mathbf{s}$ を固定する. **(P2)** を仮定する. $\bar{P}_s$ は (6.1) の IFC 解とする. この時 $\bar{P}_s$ の下で $(F_s^\infty(\mathbf{X}, \mathbf{B}), \mathbf{B})$ は (6.1) の弱解である.

定理 7.3 (種村-O.[20]). 初期条件 $\mathbf{s}$ を固定する. **(P2)** を仮定する. 次が成立する.

- (1) $\bar{P}_s$ を (6.1) の IFC 解とする. この時, $\bar{P}_s$ の下で $(F_s^\infty(\mathbf{X}, \mathbf{B}), \mathbf{B})$ が強解になることと, $\mathcal{T}_{\text{path}}(\mathbb{R}^{d\mathbb{N}})$ が P_{Br}^∞ -a.s. $\mathbf{B}$ に対して $\bar{P}_{s, \mathbf{B}}$ -自明であることは同値である.
- (2) $\mathbf{X}$ と $\mathbf{X}'$ を同じブラウン運動 $\mathbf{B}$ に対して定義された (6.1) の強解とし, $\bar{P}_s$ と $\bar{P}'_s$ をそれぞれ $(\mathbf{X}, \mathbf{B})$ と $(\mathbf{X}', \mathbf{B})$ の分布とする. この時, (7.9) と (7.10) は同値である.

$$P_{\text{Br}}^\infty(\mathbf{X} = \mathbf{X}') = 1 \quad (7.9)$$

$$\mathcal{T}_{\text{path}}^{[1]}(\mathbb{R}^{d\mathbb{N}}; \bar{P}_{s, \mathbf{B}}) = \mathcal{T}_{\text{path}}^{[1]}(\mathbb{R}^{d\mathbb{N}}; \bar{P}'_{s, \mathbf{B}}) \quad \text{for } P_{\text{Br}}^\infty\text{-a.s. } \mathbf{B}. \quad (7.10)$$

- (3) (6.1) が一意な強解 $\mathbf{X}$ を持つことと, P_{Br}^∞ -a.s. $\mathbf{B}$ に対して $\mathcal{T}_{\text{path}}(\mathbb{R}^{d\mathbb{N}})$ が $\bar{P}_{s, \mathbf{B}}$ -自明であり, かつ $\mathcal{T}_{\text{path}}^{[1]}(\mathbb{R}^{d\mathbb{N}}; \bar{P}_{s, \mathbf{B}})$ が (6.1) の解 $(\mathbf{X}, \mathbf{B})$ の分布 $\bar{P}_s$ と独立であることは同値である.

この理論ではパス空間のラベルについての末尾 σ 加法族 $\mathcal{T}_{\text{path}}(\mathbb{R}^{d\mathbb{N}})$ を強解の境界条件として扱っている. $\mathcal{T}_{\text{path}}(\mathbb{R}^{d\mathbb{N}})$ が自明であり, 更に解の分布の $\mathcal{T}_{\text{path}}(\mathbb{R}^{d\mathbb{N}})$ への制限が一意であることが, もとの無限次元確率微分方程式の解の一意性を示しているのである.

7.3. (P3) の十分条件

$\mathcal{T}(\mathbf{S}) = \bigcap_{r=1}^\infty \sigma[\pi_{S_r^c}]$ を $\mathbb{R}^d$ の配置空間 $\mathbf{S}$ の末尾 σ 加法族とする. ここで集合 $A \subset \mathbb{R}^d$ に対して, $\pi_A: \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{S}$ は射影 $\pi_A(\mathbf{s}) = \mathbf{s}(\cdot \cap A)$, $S_r^c = \{s \in \mathbb{R}^d; |s| \geq r\}$.

(Q1) μ の末尾 σ 加法族 $\mathcal{T}(\mathbf{S})$ は自明. つまり, $\mu(A) \in \{0, 1\}$ for all $A \in \mathcal{T}(\mathbf{S})$.

(Q2) $P_\mu \circ \mathbf{X}_t^{-1} \prec \mu$ for all t . (絶対連続条件).

(Q3) $P_\mu(\bigcap_{r=1}^\infty \{m_r(\mathbf{X}) < \infty\}) = 1$, (no big jump 条件)

但し $\mathbf{X} = \sum_{i \in \mathbb{N}} \delta_{X^i}$ に対して, $m_r = \inf\{m \in \mathbb{N}; X^i \in C([0, T]; S_r^c) \text{ for } m < \forall i \in \mathbb{N}\}$.

定理 7.4 (種村-O.[20]). **(P2)**, **(Q1)**–**(Q3)** を仮定する. この時, **(P3)** が成立する.

行列式点過程は **(Q1)** を満たす. 準 Gibbs 測度は, 常に末尾自明な測度に分解できる. その上で, 定理 7.1 を適用できる. アンラベル力学 $\mathbf{X}$ が μ -可逆なので, **(Q2)** は自明. **(Q3)** は可逆性と Lyons-Zheng 分解から従う. 記号を準備しアイデアを説明する.

$$\mathbf{T} = \{\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_m); t_i \in [0, T], m \in \mathbb{N}\}, \quad \mathbf{X}_{\mathbf{t}}^{n*} = (\mathbf{X}_{t_1}^{n*}, \dots, \mathbf{X}_{t_m}^{n*})$$

$$\tilde{\mathcal{T}}_{\text{path}}(\mathbf{S}) = \bigvee_{\mathbf{t} \in \mathbf{T}} \bigcap_{r=1}^\infty \sigma[\pi_r^c(\mathbf{X}_{\mathbf{t}})], \quad \tilde{\mathcal{T}}_{\text{path}}(\mathbb{R}^{d\mathbb{N}}) = \bigvee_{\mathbf{t} \in \mathbf{T}} \bigcap_{n=1}^\infty \sigma[\mathbf{X}_{\mathbf{t}}^{n*}].$$

定義から, $\tilde{\mathcal{T}}_{\text{path}}(\mathbf{S})$ は, アンラベルパス空間のシリンドー末尾 σ 加法族であり, $\tilde{\mathcal{T}}_{\text{path}}(\mathbb{R}^{d\mathbb{N}})$ は, ラベルパスの空間のシリンドー末尾 σ 加法族である. $\mathcal{T}_{\text{path}}(\mathbb{R}^{d\mathbb{N}})$ の自明性を $\tilde{\mathcal{T}}_{\text{path}}(\mathbf{S})$

の末尾自明性から、下図の手順に従って証明する.

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{T}(S) & \xrightarrow[\text{(Q1), (Q2)}]{\text{(Step I)}} & \tilde{\mathcal{T}}_{\text{path}}(S) & \xrightarrow[\text{(Q3)}]{\text{(Step II)}} & \tilde{\mathcal{T}}_{\text{path}}(\mathbb{R}^{d\mathbb{N}}) & \xrightarrow[\text{(IFC)}]{\text{(Step III)}} & \mathcal{T}_{\text{path}}(\mathbb{R}^{d\mathbb{N}}) \\
\mu & & P_\mu & & P_{\mu^l} = \int \bar{P}_s(X \in \cdot) d\mu^l & & \bar{P}_{s,B} \text{ a.s. } (s, B).
\end{array}$$

矢印の下に書いたのは、その段階で使われる条件や概念、下段は自明性を証明する確率測度である. 小さな無限次元からひとつひとつ大きな無限次元に移行していく.

8. ランダム行列の力学的普遍性

2000 年以降ランダム行列の普遍性が盛んに研究されてきた. 大別して二つの定式化があり、一つは行列の成分をガウス分布以外に一般化にすること、もう一つは対数ガスにおいて自由ポテンシャルを x^2 から一般化することである. 数多くの成果があるが、前者は Tao, 後者は H.T. Yau が中心となって非常に一般的に証明されている.

Wigner の半円則に現れるノンランダムな確率測度は、ちょうど大数の法則における平均値の対応物であり、実際、一般にはモデルごとに様々なものが現れる. 一方、それをリスケールした点過程のレベルでの収束先は、マクロなポジション、つまり、bulk, soft edge, hard edge などに応じて、1次元ならば、sine, Airy, Bessel 点過程、2次元ならば、bulk で Ginibre 点過程が出現するもので、モデルの詳細によらない.

上の二つのグループは、相関関数の弱収束を証明している. 古典的な中心極限定理と同等のレベルの収束概念である. 一方、より強く相関関数の強収束 (局所一様収束) を示した結果もいろいろと知られている. これは、古典的中心極限定理において、「局所中心極限定理」に対応するレベルである. 次に確率力学版について述べる.

$(\mathcal{E}^{\mu, \text{lwr}}, \mathcal{D}^{\mu, \text{lwr}})$ を有界領域で反斜壁境界条件を課した Dirichlet 形式の単調増大極限とする. $(\mathcal{E}^{\mu, \text{lwr}}, \mathcal{D}^{\mu, \text{lwr}})$ は $(\mathcal{E}^\mu, \mathcal{D}^\mu)$ の拡張となっており μ に対して自然に定義される.

定理 8.1 (河本-O.[7]). $(\mathcal{E}^\mu, \mathcal{D}^\mu) = (\mathcal{E}^{\mu, \text{lwr}}, \mathcal{D}^{\mu, \text{lwr}})$ とする. さらに、 μ^N の相関関数が μ の相関関数に局所一様収束し、かつ、極限の相関関数の零点の *capacity* がゼロとする. このとき N 粒子系の確率力学は極限の確率力学にパス空間で弱収束する.

$(\mathcal{E}^\mu, \mathcal{D}^\mu) = (\mathcal{E}^{\mu, \text{lwr}}, \mathcal{D}^{\mu, \text{lwr}})$ の十分条件は [8] で与えられた. この条件はこの abstract のすべてを含む広い範囲で成り立つ. 特に、3.1 章と 3.2 章の収束定理は、この結果からは直ちに導出できる. 定理 8.1 は、複雑な有限粒子系近似 μ^N の例に広範囲に適用できる. 応用例をふたつのべる.

8.1. Airy 干渉ブラウン運動の普遍性

$l \in \mathbb{N}$, $\kappa_{2l} > 0$, $V(x) = \sum_{i=0}^{2l} \kappa_i x^i$ とする. 点過程 $\mu_{\text{Ai}, V}^N$ を次のように定義する.

$$\mu_{V, \text{Ai}}^N(ds^N) = \frac{1}{Z} \prod_{i < j}^N |s_i - s_j|^2 \prod_{k=1}^N \exp(-NV(N^{-\frac{1}{2l}}(c_N(1 + \frac{s_k}{\alpha_N N^{\frac{2}{3}}}) + d_N))) ds^N.$$

ここで α_N , c_N , d_N は V と N のみによる定数である [2]. N 次元確率微分方程式は、

$$dX_t^{N,i} = dB_t^i + \sum_{j \neq i}^N \frac{1}{X_t^{N,i} - X_t^{N,j}} dt - \frac{N^{\frac{1}{3} - \frac{1}{2l}} c_N}{2\alpha_N} V' \left(\frac{1}{N^{\frac{1}{2l}}} \left\{ c_N \left(1 + \frac{X_t^{N,i}}{\alpha_N N^{\frac{2}{3}}} \right) + d_N \right\} \right) dt.$$

この解は Airy 干渉ブラウン運動 (2.4) に $N \rightarrow \infty$ で収束する.

8.2. Ginibre 干渉ブラウン運動の普遍性 (Akemann の「強非エルミット」モデル)

定数 $\gamma \geq 0$, $K_p \in \mathbb{R}$, $\tau \in [0, 1)$ に対し N 次正規行列の空間 $\mathcal{J}(N)$ 上の確率測度

$$\sigma(J) = \frac{1}{\mathcal{Z}} \exp \left\{ -\frac{N}{1-\tau^2} \text{Tr}(JJ^* - \frac{\tau}{2}(J^2 + J^{*2})) - \gamma(\text{Tr}JJ^* - NK_p)^2 \right\}$$

を考える. この時, 固有値の分布密度は次の関数の定数倍となる.

$$\prod_{i < j}^N |z_i - z_j|^2 \times \exp \left\{ -\frac{N}{1-\tau^2} \left(\sum_{i=1}^N |z_i|^2 - \frac{\tau}{2} \sum_{i=1}^N (z_i^2 + \bar{z}_i^2) \right) - \gamma \left(\sum_{i=1}^N |z_i|^2 - NK_p \right)^2 \right\}$$

$c_1, c_2, c_3 > 0$ は K_p, γ, τ に依存する定数, $E = \{z \in \mathbb{C}; c_1(\Re z)^2 + c_2(\Im z)^2 < 1\}$ とする.

補題 8.2 ([1, Theorem 1]). $\zeta \in E$, $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \rho_N^1(\zeta) &= \frac{c_3}{\pi} 1_E(\zeta), \\ \frac{1}{(c_3 N)^k} \rho_N^k \left(\zeta + \frac{z_1}{\sqrt{c_3 N}}, \dots, \zeta + \frac{z_k}{\sqrt{c_3 N}} \right) &= \rho_{\text{gin}}^k(z_1, \dots, z_k) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right). \end{aligned}$$

N 粒子系の確率微分方程式を計算すると, $(i = 1, \dots, N)$ に対して

$$\begin{aligned} dX_t^{N,i} &= dB_t^i + \frac{1}{2} \left\{ \left(\sum_{j \neq i}^N \frac{2(X_t^{N,i} - X_t^{N,j})}{|X_t^{N,i} - X_t^{N,j}|^2} \right) - \frac{\tau N}{1-\tau^2} \left(\zeta + \frac{X_t^{N,i}}{\sqrt{c_3 N}} \right) \frac{1}{\sqrt{c_3 N}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\tau N}{1-\tau^2} \left(\zeta + \frac{X_t^{N,i}}{\sqrt{c_3 N}} \right)^\dagger \frac{1}{\sqrt{c_3 N}} - \left(\zeta + \frac{X_t^{N,i}}{\sqrt{c_3 N}} \right) \frac{2\gamma}{\sqrt{c_3 N}} \left\{ \sum_{k=1}^N \left| \zeta + \frac{X_t^{N,k}}{\sqrt{c_3 N}} \right|^2 - NK_p \right\} \right\} dt. \end{aligned}$$

ここで $(x, y)^\dagger = (x, -y) \in \mathbb{R}^2$. $N \rightarrow \infty$ で Ginibre 干渉ブラウン運動 (2.5) に収束する.

9. Ginibre と GAF と渦の方程式

9.1. GAF (Gaussian analytic function)

平面 GAF というガウス確率変数を係数に持つ解析関数 F を考える.

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi_k}{\sqrt{k!}} z^k.$$

ここで $\{\xi_k\}$ は独立同分布, ξ_k の分布は $\frac{1}{\pi} e^{-|z|^2} dz$ である.

μ_{GAF} を F の零点からなる $\mathbb{C}$ の点過程とする. μ_{GAF} は, 平行移動不変かつ回転不変で, Ginibre 点過程に大変よく似ているが, より剛性が高いことが知られている. 実際, $S_r = \{|x| \leq r\}$ の外側を条件つけると, 中の粒子の平均がランダムでなくなる. μ_{GAF} は準 Gibbs 測度ではないが, 第一理論を拡張することで, Dirichlet 形式の可閉性がいえ, 拡散過程を構成できる. しかし, μ_{GAF} の「対数微分」は存在は言えるが, 「よい表現」はない. 少なくとも, 2体の干渉ポテンシャルで簡単に記述できるようなものにはならないと思われる.

ランダムな解析関数は様々な状況で考えられるから, それからその零点や極として構成した点過程は興味深いと思われる.

9.2. 渦の方程式

最後にまだ解けていない無限次元確率微分方程式を紹介する．粘性のある平面に無限個の渦が運動しているとする．Ginibreに合わせるため，すべて同じ強さの同じ向きの渦とする． $\mathbf{X}_t = (X_t^i)_{i \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}}$ と書く．定数(粘性と渦度)を適当に選べば，

$$dX_t^i = dB_t^i + \sum_{j \neq i} \frac{(X_t^i - X_t^j)^\dagger}{|X_t^i - X_t^j|^2} dt \quad (i \in \mathbb{N}).$$

「 $\dagger$ 」以外はGinibre干渉ブラウン運動と同じである．しかし背後にある幾何学は非常に異なり，また，力学的にも，これは歪対称な運動を記述する．

渦の個数が有限個の場合は，たとえどんな種類の渦度を持つ場合でも，対応する熱方程式を解くことで拡散過程を構成し，さらにそれを用いて確率微分方程式を解ける．これには一般化された発散形式を用いるのだが，実は，学生時代に研究した懐かしい話です．[11, 12, 13]

10. Remarks

- 確率微分方程式の解の一意性には様々な応用がある．例えば，Dirichlet形式の一意性 [22, 8] や SDE Gap [5]，有限粒子系近似 [6, 7, 8]，代数的構成と解析的構成の一致 [23]，マルチンゲール問題の一意性などを証明することに使用できる．
- 強解の存在と一意性以外にも，このIFCの考えが，他の様々な確率解析の古典理論の成果の無限粒子系への拡張を可能にすると思われる．例えば無限次元 $\mathbb{R}^{d\mathbb{N}}$ での Stochastic flow の構成や，アンラベル力学について空間のエルゴード分解，無限次元確率微分方程式の非平衡解の構成などに，発展することを期待している．
- 今回は，ブラウン運動を基にした無限粒子系を考察したが，これ以外にも「格子気体(川崎力学)」「Jump 過程」などでも類似の話を展開できるとと思われる．対称マルコフ過程 (Dirichlet 形式) を持つ場合は平行した議論が可能と思われる．さらに，非マルコフ的な粒子系にも，発展できるかもしれない．
- パス値拡散過程は，(粒子の種類は無限だが) 無限粒子系とみなせる場合があり，その時は，今回の論法が使える可能性がある．

参考文献

- [1] Akemann, G., Cikovic, M., Vender, M., *Universality at weak and strong non-Hermiticity beyond the elliptic Ginibre ensemble*, available on arXiv.
- [2] Deift, P., Gioev, D., *Universality at the edge of the spectrum for unitary, orthogonal, and symplectic ensembles of random matrices*, Comm. Pure Appl. Math. **60** (2007), 867-910.
- [3] M. Katori and H. Tanemura, *Noncolliding Brownian motion and determinantal processes*, J. Stat. Phys. **129** (2007), no. 5-6, 1233–1277. MR 2363394
- [4] M. Katori and H. Tanemura, *Markov property of determinantal processes with extended sine, Airy, and Bessel kernels*, Markov Process. Related Fields **17** (2011), no. 4, 541–580. MR 2918121
- [5] Y. Kawamoto and H. Osada, *Dynamical bulk scaling limit of Gaussian unitary ensembles and stochastic differential equation gaps*, J Theor Probab (2018). <https://doi.org/10.1007/s10959-018-0816-2>
- [6] Y. Kawamoto and H. Osada, *Finite-particle approximations for interacting brownian particles with logarithmic potentials*, J. Math. Soc. Japan, **70-3** (2018), 921-952.

- [7] Y. Kawamoto and H. Osada, *Dynamical universality for random matrices*, (preprint).
- [8] Y. Kawamoto, H. Osada and H. Tanemura, *Uniqueness of Dirichlet forms related to infinite systems of interacting Brownian motions*, (preprint) [arXiv:1711.07796v2](#).
- [9] R. Lang, *Unendlich-dimensionale wienerprocesse mit wechselwirkung I*, Z. Wahrschverw. Gebiete **38** (1977), 55–72.
- [10] R. Lang, *Unendlich-dimensionale wienerprocesse mit wechselwirkung II*, Z. Wahrschverw. Gebiete **39** (1978), 277–299.
- [11] H. Osada, *Diffusion processes with generators of generalized divergence form* Journal of Mathematics of Kyoto University, 1987, 27(4), 597–619, DOI:10.1215/kjm/1250520601.
- [12] H. Osada, *A stochastic differential equation arising from the vortex problem* Proceedings of the Japan Academy Series A: Mathematical Sciences, 1985, 61(10), 333–336. DOI:10.3792/pjaa.61.333
- [13] H. Osada, *Propagation of chaos for the two-dimensional Navier-Stokes equation* Probabilistic methods in mathematical physics (Katata/Kyoto, 1985), 1987, 303–334.
- [14] H. Osada, *Dirichlet form approach to infinite-dimensional Wiener processes with singular interactions*, Comm. Math. Phys. **176** (1996), no. 1, 117–131. MR 1372820
- [15] H. Osada, *Interacting Brownian motions with measurable potentials*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **74** (1998), no. 1, 10–12. MR 1617695
- [16] H. Osada, *Tagged particle processes and their non-explosion criteria*, J. Math. Soc. Japan **62** (2010), no. 3, 867–894. MR 2648065
- [17] H. Osada, *Infinite-dimensional stochastic differential equations related to random matrices*, Probab. Theory Related Fields **153** (2012), no. 3-4, 471–509. MR 2948684
- [18] H. Osada, *Interacting Brownian motions in infinite dimensions with logarithmic interaction potentials*, Ann. Probab. **41** (2013), no. 1, 1–49. MR 3059192
- [19] H. Osada, *Interacting Brownian motions in infinite dimensions with logarithmic interaction potentials II: Airy random point field*, Stochastic Process. Appl. **123** (2013), no. 3, 813–838. MR 3005007
- [20] H. Osada and H. Tanemura, *Infinite-dimensional stochastic differential equations and tail σ -fields*, (preprint) [arXiv:1412.8674 \[math.PR\]](#).
- [21] H. Osada and H. Tanemura, *Infinite-dimensional stochastic differential equations arising from airy random point fields*, (preprint) [arXiv:1408.0632 \[math.PR\]](#).
- [22] H. Osada and H. Tanemura, *Cores of Dirichlet forms related to random matrix theory*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **90** (2014), no. 10, 145–150. MR 3290438
- [23] H. Osada and H. Tanemura, *Strong Markov property of determinantal processes with extended kernels*, Stochastic Process. Appl. **126** (2016), no. 1, 186–208. MR 3426516
- [24] H. Spohn, *Interacting Brownian particles: a study of Dyson's model*, Hydrodynamic behavior and interacting particle systems (Minneapolis, Minn., 1986), IMA Vol. Math. Appl., vol. 9, Springer, New York, 1987, pp. 151–179. MR 914993
- [25] L.-C. Tsai, *Infinite dimensional stochastic differential equations for Dyson's model*, Probab. Theory Related Fields **166** (2016), no. 3-4, 801–850. MR 3568040