

場の量子論の、場の量子論による、 場の量子論のための数学

立川裕二 (東京大学国際高等研究所 Kavli 数物連携宇宙研究機構)*

2018年7月31日

1. はじめに

時間、空間に広がったものを場と言い、それを量子力学的に取り扱う理論が場の量子論です。この総合講演では、場の量子論と数学との関連を、次の三つの側面から解説したいと思います:

- 場の量子論自体を数学として扱うことについて、(場の量子論「の」数学)、
- 場の量子論から取り出される数学的予言について、(場の量子論「による」数学)、
- 場の量子論に使われる色々な既存の数学について、(場の量子論「のための」数学)。

これをまとめたのが講演題目になっています。リンカーンの有名な言葉と無理に会わせて為、「の」「による」「のための」という日本語の自然な意味とは多少ずれているように思いますが、ご容赦を願います¹。また、この論説は、第4節を除いては筆者の別の英文論説 [Tac17] と大きな重複があることをお断りしておきます。また、以下、日本語での通常の用法に従い、用語「場の量子論」と「場の理論」を区別せず使用します。

2. 場の量子論「の」数学

2.1. 既存の定式化

まずは場の量子論自体を数学として扱うことについて述べましょう。理論物理には様々な分野がありますが、大抵の分野は数学的には何をやっているかははっきりしています。例えば、一般相対論は「多様体上の計量に関してアインシュタイン方程式と呼ばれる非線形偏微分方程式を考えること」、量子力学は「ヒルベルト空間上でいろいろな作用素のスペクトラムを考えること」ということが出来ます。それぞれの分野の具体的な興味深い問題は沢山ありますが、何にせよ、上記のような数学的枠組みの中で調べられるわけです。

これに対して、場の量子論が数学として何であるのかは長らく謎のままです。勿論、これまでも何度も数学者は物理屋の研究している場の量子論を扱っている数学的枠組みを取り出そうとしてきました。著名なものをあげれば:

- 1950年代にはまず Wightman 公理系と呼ばれるものが導入され、公理的場の量子論がはじまりました。これは 1960 年代には作用素環を用いる代数的場の量子論というものに深化しました。([SW00, Haa96, 荒江96]などを参照。)

2000 Mathematics Subject Classification: 81T40, 81T45, 81T60.

Keywords: physics, quantum field theory, supersymmetry.

* e-mail: yuji.tachikawa@ipmu.jp

web: <https://member.ipmu.jp/yuji.tachikawa/>

¹ ちなみに、「人民の人民による人民の為の政治 (government of the people, by the people, for the people)」というリンカーンの Gettysburg Address からの引用ですが、これの原語における解釈や日本語訳にもいろいろ問題があるようです。素人の意見としては「人民を人民が人民の為に治めること」と訳するのが良いのではないかと思います。専門家の意見は例えば [野10] など参照のこと。

- また、これらの公理系をみたす実例を作る構成的場の量子論という分野もあります。
([GJ87, 江新88, 原13]などを参照。)
- 1980年代には、二次元の共形場理論をあつかう代数的な枠組みとして頂点作用素代数が導入されました。([FLM88, FBZ04]などを参照。)
- 同じく1980年代後半には、共形場理論やトポロジカル場の理論に関して、幾何学的な定式化がなされました。([Ati88, Seg04]などが原論文。)
- 2000年代になって、摂動的場の量子論が数学的に定式化されました。([Cos11]などを参照。)

しかし、これらの既存の定式化には不満が残ります。まず、上記のようないろいろなアプローチが併存していること自体、場の量子論の数学的枠組みが確立していないことを示しています。また、上記最近までそれぞれの流派の間で交流があまりなかったことも不思議といえは不思議ではあります²。といっても、どれかが間違っているというわけではありません。場の量子論という大きな象を皆で撫でているわけですが、それぞれが撫でたあたりだけ数学的に定式化すると上記の定式化になっている、というのが近いように思います。

物理屋の思う場の量子論をひとつ取ってきましょう。それを平らな時空で考えると、Wightman 公理系を満たすでしょうし、相関関数を均してやれば代数的場の量子論で研究される作用素環のネットが得られるはずです。二次元の共形場理論であれば、正則な側だけ取り出せば頂点作用素代数で記述されますし、トポロジカル場の理論であれば Atiyah の公理系をみたします。物理の学生用の場の量子論の教科書に書いてあるのは、むしろ、素粒子実験で測られる量をどうやって形式的べき級数として計算するか、ということですが、この枠組みについても、Costello の定式化があります。

しかし、本来は、もっと一般的に、「場の量子論」の満たすべき公理系があって、それを、一つまえの段落に書いたような各場合に限定して考えると、それらの既存の公理系があらわれる、というようになっているべきだと思われます。以下、第3節と第4節での議論に必要なだけの公理系をこれから述べたいと思います。

2.2. この講演で必要な部分の定式化

まず、多様体上に考える構造 S をひとつ固定します。(ここで、構造、というのは、微分構造、それに追加してリーマン計量、さらにスピン構造を考える、さらに接続つき $U(1)$ 束を考える、などのことを指します。) 場の理論³ とは、一般に次元とよばれる正整数 d と構造 S に対して定まるものです。

2.2.1. 状態空間 H_Q と分配関数 Z_Q

まず、対象が $(d-1)$ 次元 S 構造付き境界なし多様体 N で、 N から N' への間の射が d 次元 S 構造付き多様体 M で $\partial M = N \sqcup \overline{N'}$ であるもの、というボルディズムの圏を考えます。ただし、 $\overline{N'}$ は(それぞれの構造 S に適切な意味で)多様体の向き付けを反対にしたものとしします。これは disjoint union を積として自然にテンソル圏になります。

² そんな中、2015年になって Carpi-Kawahigashi-Longo-Weiner [CKLW15] で二次元共形代数的場の量子論と頂点作用素代数の間を往き来できるようになったのは大きな進展です。河東の論説 [Kaw17] も参照。

³ 物理屋のために言い訳をしますが、以下、相対論的で、かつ、Wick 回転して Euclid 化した理論に議論を限ります。

すると、 d 次元の S -構造付き場の量子論 Q は、まずひとつのデータとして、上記のボルディズムのテンソル圏から $\mathbb{C}$ -ベクトル空間と線形写像のなすテンソル圏への関手を定めます。もっとあからさまには、

- $(d-1)$ 次元 S 構造付き境界なし多様体 N に対して状態空間 $\mathcal{H}_Q(N)$,
- d 次元 S 構造付き多様体 M で N から N' へのボルディズムであるもの $M : N \rightarrow N'$ であるものに対して線形写像 $Z_Q(M) : \mathcal{H}_Q(N) \rightarrow \mathcal{H}_Q(N')$

を対応させ、これらが標準的な関係式を満たすことを要求します。特に、空の多様体に対して $\mathcal{H}_Q(\emptyset) = \mathbb{C}$ です。すると、境界なし d 次元 S 構造付き多様体 M に対して $Z_Q(M) \in \mathbb{C}$ は複素数になり、これを分配関数と呼びます。

伝統的には、 S が微分構造である場合が位相的場の理論と呼ばれ⁴、 S がリーマン計量である場合が何も形容詞をつけずに場の理論と呼ばれます。共形場理論は S が共形構造である場合です。

自明な場の理論 $Q = \text{triv}$ は $\mathcal{H}_Q(N) = \mathbb{C}$ で $Z_Q(M)$ がすべて恒等写像であるようなものです。場の理論 Q, Q' に対して、 $Q \times Q'$ を $\mathcal{H}_{Q \times Q'}(N) = \mathcal{H}_Q(N) \otimes \mathcal{H}_{Q'}(N)$ となるように定めることができます。 triv はこの操作 $\times$ のもとの単位元です。 d 次元 S 構造付き場の量子論全体のなすあつまりを $\mathcal{Q}_S^d$ と書くと、そこにはいろいろな演算が定まっているわけです。

また、物理においては通常、 $\mathcal{H}_Q(N)$ にユニタリ内積が入っている場合を考えます。この場合、 N の向きを反転したものを $\bar{N}$ と書くと、 $\mathcal{H}_Q(\bar{N}) = \overline{\mathcal{H}_Q(N)}$ 、また同様に $Z_Q(\bar{M}) = \overline{Z_Q(M)}$ を要求します。これらの要請は反転正值性と呼ばれます。

2.2.2. G 対称性とそのゲージ化

構造 S に対して、接続つき G 束を追加した構造を $S \times G$ と書きましょう。対応して $\mathcal{Q}_{S \times G}^d$ を考えることができますが、これの G 依存性を強調する為に特に $\mathcal{Q}_S^d(G)$ と書きましょう。この元を物理では d 次元 (S 構造付き) G 対称場の量子論と呼びます。準同型 $\varphi : G \rightarrow G'$ に対して、引き戻し $\varphi^* : \mathcal{Q}_S^d(G') \rightarrow \mathcal{Q}_S^d(G)$ が自然に定まります。また、 $Q_1 \in \mathcal{Q}_S^d(G_1)$ and $Q_2 \in \mathcal{Q}_S^d(G_2)$ に対し $Q_1 \times Q_2 \in \mathcal{Q}_S^d(G_1 \times G_2)$ が定まります。

これらの形式的な振舞いは G 作用のある空間の振舞いに似ています: X に G 作用があり準同型 $\varphi : G \rightarrow G'$ があれば、 φ を用いて X に G' 作用があると思えますし、 X_1 に G_1 の、 X_2 に G_2 の作用があるならば $X_1 \times X_2$ には $G_1 \times G_2$ の作用があります。

さて、 G 作用のある空間 X の場合は、 $H \subset G$ を部分群とすると、 X/H を作れます。(ただし、特異点が生じるなどして、 X が属していたクラスに X/H が入らないことはしばしばあります。) H が正規部分群の場合は、 X/H には G/H の作用があります。

同様に、 G 対称な場の理論 $Q \in \mathcal{Q}_S^d(G)$ に対して、 $H \subset G$ を部分群として、 $Q \not\sim H$ なる場の理論をつくる事が出来ます⁵。 H が正規であれば、 $Q \not\sim H \in \mathcal{Q}_S^d(G/H)$ となります。これを H 対称性のゲージ化と呼び、この形の場の理論のことをゲージ理論と呼びます。

⁴Diff と Top には違いがあるのに伝統的にこう呼ばれます。純粋に数学的には、Diff 場の理論、PL 場の理論、Top 場の理論等を考えても面白からうと思われます。

⁵このシンボル $\not\sim$ は筆者が勝手に作りました。ゲージ化は G で割る ($/$) だけでなく、 G ゲージ場を足す (+) ことでもあるので、 $/$ と $+$ の混ざったような記号を使いたかったのです。 $\text{\LaTeX}$ では `\begin{document}` の前に `\usepackage{slashed}\def\gauge{\slashed{-}}` とやっておけば、 `$\gauge$` で出せます。

おおまかなアイデアは、

$$Z_{Q+H}(M, A_{G/H}) = \int_{\mathcal{M}_{G,M}(A_{G/H})} Z_Q(M, A_G) d\mu \quad (2.1)$$

と定義することです。ただし、 A_G で一般に M 上の接続付き G 束をあらわすこととし、 $\mathcal{M}_{G,M}(A_{G/H})$ は A_G で G/H に射影すると与えられた $A_{G/H}$ と一致するようなものの集合、 $d\mu$ はそのうえの適切な測度だとします。

言うは易し、行いうは難し、ということわざ通り、上式を実際に定義するのは G が有限群であるか $d=1$ であるかでない限り非常に困難です。たとえば、 $d=4$ とし、 $Q = \text{triv}$ と取り、 G がコンパクトリー群としたばあい、これをきちんと定義していくつかの期待される性質をしめせ、というのがミレニアム問題のひとつ [JW06] です。

2.2.3. 超対称性

超対称性は各次元 d 毎に有限種類存在する特定の構造 $\mathcal{S}$ で、具体的にはリーマン計量にいろいろなものが追加されたものです。 $d=4$ なら、 $\mathcal{N}=1, \mathcal{N}=2, \mathcal{N}=3, \mathcal{N}=4$ という四種類が存在します。

生憎、超対称性に対応する構造 $\mathcal{S}$ を数学者に伝わるようにすっきり定式化する方法を筆者は知りません。たとえば、超多様体は必要になりますが、空間を超多様体にするだけではありません。そもそも、超対称構造は $d \leq 11$ にしか存在しないので、次元に依らず定義する術がありません。個別の $(d, \mathcal{N})$ に対しては、この文章での超対称構造に相当するものは理論物理において「 d 次元 $\mathcal{N}$ 拡張超重力理論」とよばれ、大量の文献があります。

超対称な場の理論は、そうでない一般の場の理論より振舞いが大人しいため、スーパーコンピュータで数値計算をしなくてもさまざまな解析が可能になります。

2.2.4. 場の理論の「コンパクト化」

また、 $Q \in \mathcal{Q}_{\mathcal{S}}^d$ と、 $\mathcal{S}$ -構造付き d' 次元多様体 X に対して、 $Q\langle X \rangle \in \mathcal{Q}_{\mathcal{S}}^{d-d'}$ を次のように定めることができます：

$$\mathcal{H}_{Q\langle X \rangle}(N) = \mathcal{H}_Q(X \times N), \quad Z_{Q\langle X \rangle}(M) = Z_Q(X \times M). \quad (2.2)$$

この操作を物理屋は場の理論のコンパクト化と呼びます。

3. 場の量子論「による」数学

つぎに場の量子論から取り出される数学的予言についていくつか述べましょう。

3.1. ミラー対称性

まずは数学でも大きな分野であるミラー対称性が上記の枠組みでどのように解釈されるかをみましょう。関連する場の量子論は、 $d=2$ で、 $\mathcal{N}=(2,2)$ 超対称構造をもったものです。それらのなす集まりを $\mathcal{Q}_{\mathcal{N}=(2,2)}^{d=2}$ と書きましょう。 $d=2$ の $\mathcal{N}=(2,2)$ 超対称構造は、その一部のデータとして、二次元多様体上の接続付き $U(1)^2$ 束を含みます。 $d=2$ の $\mathcal{N}=(2,2)$ 超対称構造の上には、この二つの接続付き $U(1)$ 束をいれかえる $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の作用があります。これに対応して、 $\mathcal{Q}_{\mathcal{N}=(2,2)}^{d=2}$ の上にも、 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 作用

$$m : \mathcal{Q}_{\mathcal{N}=(2,2)}^{d=2} \rightarrow \mathcal{Q}_{\mathcal{N}=(2,2)}^{d=2} \quad (3.1)$$

があります。これを(2次元の)ミラー対称性と呼びます。これは簡単に定義出来るものです。 $Q \in \mathcal{Q}_{\mathcal{N}=(2,2)}^{d=2}$ に対して、 A 型の境界条件 $A(Q)$ および B 型の境界条件 $B(Q)$

という二つの三角圏が対応します。このふたつはミラー対称性で入れ替わります：
 $A(m(Q)) = B(Q)$ 。

M を複素 n 次元のカラビ=ヤウ多様体とします。 M をターゲットとする経路積分によって、 $\sigma(M) \in \mathcal{Q}_{\mathcal{N}=(2,2)}^{d=2}$ なる超対称場の量子論が定義出来ると信じられています。これを M 上の超対称 σ 模型とよびます。 $A(\sigma(M))$ は M の深谷圏、 $B(\sigma(M))$ は M の接続層の導来圏になると信じられています。

さて、しばしばもうひとつ W というカラビヤウ多様体があり $m(\sigma(M)) = \sigma(W)$ となります。すると、 $A(\sigma(M)) = B(\sigma(W))$ となり、あるカラビヤウ多様体 M の深谷圏と別のカラビヤウ多様体 W の接続層の導来圏が同じであるべしという予言が得られます。これが有名なホモロジー的ミラー対称性 [Kon94] です。さらに歴史をさかのぼる Hodge 数に関する等式 $h^{p,q}(M) = h^{n-p,q}(W)$ も同様に解釈できます。

3.2. ハイパーケーラー多様体との関連

3.2.1. 3次元 $\mathcal{N}=4$ 超対称理論の基本的性質

次に、 $d = 3$ で $\mathcal{N}=4$ 超対称な場合を考えます。それらのなす集まりを $\mathcal{Q}_{\mathcal{N}=4}^{d=3}$ と書きましょう。 $d = 3$ の $\mathcal{N}=4$ 超対称構造は、その一部のデータとして、二次元多様体上の接続付き $SU(2)^2$ 束を含みます。二つの接続付き $SU(2)$ 束を区別する為、添え字をつけて $SU(2)_C, SU(2)_H$ と書きましょう。添え字はそれぞれ Coulomb, Higgs の頭文字です。 $d = 3$ の $\mathcal{N}=4$ 超対称構造の上には、この二つの接続付き $SU(2)$ 束をいれかえる $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の作用があります。これに対応して、 $\mathcal{Q}_{\mathcal{N}=4}^{d=3}$ の上にも、 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 作用

$$m : \mathcal{Q}_{\mathcal{N}=4}^{d=3} \rightarrow \mathcal{Q}_{\mathcal{N}=4}^{d=3} \quad (3.2)$$

があります。これを(3次元の)ミラー対称性と呼びます。

$d = 3, \mathcal{N}=4$ でさらに対称性 G がある場合、超対称性の要求の為、多様体上の構造には接続つき G 束だけでなく、 G を $G = G_C \times G_H$ と分解して、同伴する $\mathfrak{su}(2)_C \otimes \mathfrak{g}_C \oplus \mathfrak{su}(2)_H \otimes \mathfrak{g}_H$ 束の切断も必要となります。 G_C を Coulomb 対称性、 G_H を Higgs 対称性と呼ぶことにしましょう。このような対称性を持つような場の理論全体を $\mathcal{Q}_{\mathcal{N}=4}^{d=3}(G_C, G_H)$ と書きましょう。当然ミラー対称性 m は G_C と G_H を入れ替えます：

$$m : \mathcal{Q}_{\mathcal{N}=4}^{d=3}(G_C, G_H) \rightarrow \mathcal{Q}_{\mathcal{N}=4}^{d=3}(G_H, G_C). \quad (3.3)$$

Q を $Q \neq G$ にするゲージ化の操作は、 $d = 3$ で $\mathcal{N}=4$ 超対称な理論を非超対称な理論にしてしまいます。 $\mathcal{N}=4$ 超対称性を保つようにゲージ化の操作を変更することは出来ませんが、それには二通りあり、正規部分群 $G' \subset G_H$ に対して

$$Q \not\equiv_H G' \in \mathcal{Q}_{\mathcal{N}=4}^{d=3}(G_C, G_H/G') \quad (3.4)$$

となるものと、正規部分群 $G' \subset G_C$ に対して

$$Q \not\equiv_C G' \in \mathcal{Q}_{\mathcal{N}=4}^{d=3}(G_C/G', G_H) \quad (3.5)$$

なるもののふたつがあります。

一般に、 $Q \in \mathcal{Q}_{\mathcal{N}=4}^{d=3}(G_C, G_H)$ に対し、ふたつのハイパーケーラー多様体 $\mathcal{M}_C(Q)$ と $\mathcal{M}_H(Q)$ が取り出せ、これらは Higgs 枝、Coulomb 枝と呼びます。それぞれ、ハイパーケーラー構造を保つような G_C, G_H 対称性を持ち、この二つはミラー対称性によって入れ替わります： $\mathcal{M}_H(m(Q)) = \mathcal{M}_C(Q)$ 。

また、一般に $\mathcal{M}_{C,H}$ は場の量子論の積を空間の積にうつします:

$$\mathcal{M}_H(Q_1 \times Q_2) = \mathcal{M}_H(Q_1) \times \mathcal{M}_H(Q_2), \quad \mathcal{M}_C(Q_1 \times Q_2) = \mathcal{M}_C(Q_1) \times \mathcal{M}_C(Q_2). \quad (3.6)$$

場の理論での考察から自然に従う式として、

$$\mathcal{M}_H(Q \underset{H}{\not\equiv} G) = \mathcal{M}_H(Q) /// G \quad (3.7)$$

があります。ここで右辺の $///$ はハイパーケーラー多様体の G 作用によるハイパーケーラー商とします。

3.2.2. ゲージ理論の Higgs 枝と Coulomb 枝

さて、 G 作用のある四元数ベクトル空間 V に対し、 $\text{Hyp}(V) \in \mathcal{Q}_{\mathcal{N}=4}^{d=3}(1, G)$ なる場の量子論が作れます。これは

$$\mathcal{M}_H(\text{Hyp}(V)) = V, \quad \mathcal{M}_C(\text{Hyp}(V)) = pt \quad (3.8)$$

を満たします。

$\text{Hyp}(V) \underset{H}{\not\equiv} G$ の形をしたものが通常の三次元 $\mathcal{N}=4$ 超対称ゲージ理論です。この Higgs 枝は、これまで述べた関係式より、

$$\mathcal{M}_H(\text{Hyp}(V) \underset{H}{\not\equiv} G) = V /// G \quad (3.9)$$

となり、右辺は四元数ベクトル空間のハイパーケーラー商で、これは数学や数理物理でしばしばあらわれ使われてきたハイパーケーラー空間の大きなクラスをなします。例えば、古典型リー群のインスタントンのモジュライ空間はこのような形であらわされます。

ここで不思議なのは、場の量子論はもうひとつ

$$\mathcal{M}_C(\text{Hyp}(V) \underset{H}{\not\equiv} G) \quad (3.10)$$

なるハイパーケーラー空間を与えるはずであるということです。 V と G をうまく選べば、このハイパーケーラー空間は、たとえば例外型群のインスタントンのモジュライ空間等、四元数ベクトル空間のハイパーケーラー商で書けそうもないハイパーケーラー空間をいろいろ生じうるということが物理の議論より知られていますので、(3.10) が数学的にどのように記述されるかが分かればいろいろご利益があるのではと思われます。

これは長らく未解決問題でしたが、最近になって Braverman, Finkelberg, Nakajima の連作 [Nak16, BFN16] によってようやく正則シンプレクティック多様体の枠内で定式化されました。詳細をここで述べる余裕はありませんが、彼らは一般に $Q \in \mathcal{Q}_{\mathcal{N}=4}^{d=3}(G_C, G_H)$ に対し、 G_C の複素化のアフィングラスマン多様体 Gr_{G_C} の同変構成可能層の導来圏内の可換代数対象 $\mathcal{A}_Q \in D_{G_C}(\text{Gr}_{G_C})$ が対応するべしとし⁶、また $\mathcal{M}_C(Q) = \text{Spec } H_{G_C}^*(\text{Gr}_{G_C}, \mathcal{A}_Q)$ であるべし、とし、特に $Q = \text{Hyp}(V)$ に対して $\mathcal{A}_Q$ を特定したのです。

3.2.3. ある予想とその解決

また、関連して筆者と G. Moore は [MT11] で次のような予想を提出しました。 $d=6$ で $\mathcal{N}=(2,0)$ 超対称な場の理論は ADE 分類があると信じられています。そこでひとつ G を simply-laced なリー群として取ってきます。対応して $Q_G \in \mathcal{Q}_{\mathcal{N}=(2,0)}^{d=6}$ があります。これを

⁶ $\mathcal{A}_Q$ の場の理論における意味を理解するのは重要な問題だと思われます。

S^1 かける点付き二次元面 Σ でコンパクト化することにより、3次元 $\mathcal{N}=4$ 場の理論を考えることができます。簡単のため、ここでは種数は $g=0$ とし、 Σ_n を n 点つき球面として

$$Q_{G,n} := Q_G \langle S^1 \times \Sigma_n \rangle \in \mathcal{Q}_{\mathcal{N}=4}^{d=3}(\emptyset, G^n \rtimes S_n) \quad (3.11)$$

とします。ここで、各点ごとに Higgs 対称性 G があり、点が区別がつかない為それらを入れ替える対称群 S_n の作用があります。また、点付き二次元面が与えられた際、そのうち二点をつないで新たな点付き二次元面をつくるのが出来ますが、それは Higgs 対称性のゲージ化に対応します。例えば

$$(Q_{G,n} \times Q_{G,n'}) \not\equiv_{\text{H}} G_{\text{diag}} = Q_{G,n+n'-2}, \quad (3.12)$$

但し左辺の G_{diag} は一つ目の面の n 点からひとつ選んだ点に関する G と二つ目の面の n' 点から選んだ点に関する G の対角部分群です。左辺の対称性は構成からは $(G^{n-1} \rtimes S_{n-1}) \times (G^{n'-1} \rtimes S_{n'-1})$ ですが、右辺の対称性は $G^{n+n'-2} \rtimes S_{n+n'-2}$ あるべきであることに注意してください。

ここで (3.12) の両辺に $\mathcal{M}_{\text{H}}$ を作用させると、ハイパーケーラー多様体のあつまり $X_{G,n} := \mathcal{M}_{\text{H}}(Q_{G,n})$ で、ハイパーケーラー構造を保つ $G^n \rtimes S_n$ の作用があり、

$$(X_{G,n} \times X_{G,n'}) \not\equiv G_{\text{diag}} = X_{G,n+n'-2} \quad (3.13)$$

を満たすものがある、という数学的な予想が得られます。我々が予想を [MT11] で出した時点で確立していたケースは $G = \text{SU}(2)$ のみで、その場合は

$$X_{\text{SU}(2),n=3} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \quad (3.14)$$

に $\text{SU}(2)^3 \rtimes S_3$ が自然に作用している場合でした。このときは、関係式 (3.13) は

$$(X_{\text{SU}(2),n=3} \times X_{\text{SU}(2),n=3}) \not\equiv \text{SU}(2)_{\text{diag}} \quad (3.15)$$

が $\text{SO}(8)$ の複素リー環の最小冪零軌道の ADHM 構成になっており、そのため $\mathfrak{su}(2)^{\oplus 4} \subset \mathfrak{so}(8)$ を積分してえられる $\text{SU}(2)^4 \rtimes S_4$ 作用があるということから従います。

この予想も昨年 Braverman-Finkelberg-Nakajima によって解かれました [BFN17]。場の理論側からは、 $T(G) \in \mathcal{Q}_{\mathcal{N}=4}^{d=3}(G, G)$ という自分自身とミラーな理論が存在し、

$$Q_{G,n} := T(G)^n \not\equiv_{\text{C}} G_{\text{diag}} \quad (3.16)$$

となることが知られています。ただし、右辺の G_{diag} は、 $T(G)^n$ のもつ G^n なる Coulomb 対称性の対角部分群です。これより、

$$\mathcal{M}_{\text{H}}(Q_{G,n}) = \mathcal{M}_{\text{C}}(T(G)^n \not\equiv_{\text{H}} G_{\text{diag}}) \quad (3.17)$$

となりますが、これは、彼らの一般的な枠組みにおいては、可換代数対象 $\mathcal{A}_{T(G)} \in D_G(\text{Gr}_G)$ さえ同定出来れば決定出来るもので、特に可換代数対象 $\mathcal{A}_{T(G)}$ はすでに [ABG04] で構成されていたのです。それを用いて $X_{G,n}$ を定義すると、予想の各関係式が自然に従います。

4. 場の量子論「のための」数学

おしまいに関場の量子論に使われる色々な既存の数学について述べましょう。筆者はこれまで十五年ばかりの研究のなかで、対象とする場の量子論をいろいろと変えて来ました。それに応じて、いろいろな数学を勉強して使う機会がありました。中でも、佐々木-Einstein 多様体を学んだこと、複素冪零軌道の理論を学んだことは思い出深くありますが、それぞれについて話すと散漫になりますので、いままさに勉強中の代数トポロジーとの関連について述べましょう。

代数トポロジーの非常に基礎的なところ、ホモトピー群やホモロジー群の簡単なものは、位相的ソリトンに関連して、場の量子論でも長らく扱われてきました。また、2000年前後、超弦理論における D-ブレーンの研究に伴って、K 理論が多少使われるようになりました。さらに最近の、2010年頃からの展開ですが、今回は物性理論においてトポロジカル物性という分野を研究していた界限からはじまって、文献 [CGLW13, KTTW15] などによって種々のボルディズム群を考察することが重要であるということが判ってきました。たとえば、空間 3 次元時間 1 次元の時間反転不変で $T^2 = (-1)^F$ を満たすようなトポロジカル超伝導体は $\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$ で分類されるという物性理論における結果がありますが、この論説での用語で言い換えれば、 $d = 3 + 1$ 次元で構造 S が Pin^+ 構造であるような可逆な場の量子論を分類せよ、という問題となり、以下に説明する一般論から、これは Pin^+ ボルディズム群 $\Omega_4^{\text{Pin}^+}$ のポントリャーギン双対で記述されが、文献 [KT90] 等で $\Omega_4^{\text{Pin}^+}$ を参照すると、それは $\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$ である、ということになります。ここにいたる最低限の過程を説明しましょう。

4.1. 可逆な場の理論

次元 d , 構造 S 付き場の理論の集合 $\mathcal{Q}_S^d$ を思い出します。 $Q_1, Q_2 \in \mathcal{Q}_S^d$ に対し $Q_1 \times Q_2 \in \mathcal{Q}_S^d$ が定まるのでした。ここで状態空間は $\mathcal{H}_{Q_1 \times Q_2}(N) = \mathcal{H}_{Q_1}(N) \otimes \mathcal{H}_{Q_2}(N)$ で定まりました。自明な場の理論 $\text{triv} \in \mathcal{Q}_S^d$ は $\mathcal{H}_Q(N) = \mathbb{C}$ とするもので、この $\times$ のもとで単位元をなします。どのような場の理論ならば逆元があるのでしょうか？ すこし考えると、 $\dim \mathcal{H}_Q(N) = 1$ であれば、すなわち $\mathcal{H}_Q(N)$ はカノニカルではないが $\mathbb{C}$ と同一視出来るならばよさそうであることがわかります。逆元 Q^{-1} は、 $\mathcal{H}_{Q^{-1}}(N) := \mathcal{H}_Q(N)^*$ と取ればよいわけです。このような場の理論を可逆な場の理論と呼びましょう。

通常、場の量子論の難しさは自由度が無限にあることから生じると言われます。可逆な場の理論は状態空間 $\mathcal{H}_Q(N)$ が(有限次元であるどころか)いつも一次元ですから、ある意味その正反対の極限にある、もっとも簡単なタイプの場の量子論です。

しかし、まずは、もっとも簡単なタイプの場の量子論が判っていないければ、一般の場の量子論も分かりようがありませんから、数学的にはまずはこれらを調べないとはじまりません。この基本的な問題が五、六年前まで省みられていなかったのは驚くべきことです。

4.2. 可逆な位相的場の理論の分類

構造 S が特に位相的場の理論に相当する場合はどのようになるのでしょうか。これの一般的な答えは [KTTW15] で予想され、最近 [Yon18] で数学的な証明が与えられました。

話を多少具体的にするため、時空 M に与える構造 S として、次のように定めた $S(G, X)$ を考えましょう: ここで構造としては、微分構造に加え、接束に $G = \text{O}, \text{SO}, \text{Spin}, \text{Pin}^\pm$ などの構造を与え、さらに固定した多様体 X への時空からの写像 $\varphi: M \rightarrow X$ を up to ホモトピーで考えます。

このとき、 d 次元 $S(G, X)$ -構造つき位相的場の理論とは Atiyah の意味では構造 $S(G, X)$ をもった $(d-1)$ 次元閉多様体を対象とし射はそれらの間の $S(G, X)$ -ボルディズムで与えられるようなボルディズム圏から $\mathbb{C}$ -ベクトル空間と線形写像のなすテンソル圏への関手 Q だったわけです。これらの関手達全体を考えると、それらの間にはベクトル空間の直積を考えることによって自然に積の構造が入ります。可逆な位相的場の理論は、この積のもとで可逆なもので、 $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}_Q(N) = 1$ で特徴付けられます。

さて、閉じた d 次元 $S(G, X)$ 構造つき多様体 M に対して、分配関数 $Z_Q(M) \in \mathbb{C}$ を対応させます。すると $M \sqcup M'$ に対しては公理から $Z_Q(M \sqcup M') = Z_Q(M)Z_Q(M')$ です。また、 Q がユニタリであって、 M と M' が $(d+1)$ 次元のボルディズムでつながるならば、 $Z_Q(M) = Z_Q(M')$ であると示すことができます。構造 $S(G, X)$ を持った d 次元の閉じた多様体を $(d+1)$ 次元のボルディズムで同一視したもののボルディズム群 $\Omega_d^G(X)$ と書かれます。すると Z_Q は可換群 $\Omega_d^G(X)$ の $\mathbb{C}$ への表現を与えます。

逆に、 $\Omega_d^G(X)$ の一次元表現を与えると、それが分配関数 Z_Q になるような可逆ユニタリ位相的場の理論を一意的に構成することができます。これで、構造 $S(G, X)$ をもつ d 次元可逆ユニタリ位相的場の理論は、ボルディズム群 $\Omega_d^G(X)$ のポントリャーギン双対と一対一に対応することが分かりました。

4.3. 可逆な場の理論の up to ホモトピーでの分類

位相的な場の理論ではなく、もっと一般の場の理論を考えた場合はどうでしょうか？そこで、構造として、次のように定めた $S'(G, X)$ を考えましょう：ここでは、微分構造に加え、接束に $G = O, SO, Spin, Pin^{\pm}$ などの構造を与え、さらに、リーマン計量をあたえます。そうして、さらに固定したリーマン多様体 X への時空からの写像 $\varphi: M \rightarrow X$ をあたえるものとします。

こうすると、多様体のトポロジーだけではなく、計量や写像 φ への連続変形に場の理論が依存しうするため、可逆場の理論自体を分類することは非常に困難だと思われます。しかし、二つの可逆場の理論が連続的な変形でうつりかわる場合を同一視することになると分類結果がどうなるべきかは [FH16] によって予想されています。答えは、既に出て来たボルディズム群 $\Omega_d^G(X)$ のアンダーソン双対 $(D\Omega^G)^{d+1}(X)$ で与えられます。

アンダーソン双対とは何でしょうか？⁷ 通常の $\mathbb{Z}$ 係数(コ)ホモロジー理論 $H_*(-, \mathbb{Z})$, $H^*(-, \mathbb{Z})$ の普遍係数定理を思い出しましょう：

$$0 \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}}(H_{d-1}(X, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \rightarrow H^d(X, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_d(X, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \rightarrow 0 \quad (4.1)$$

という短完全列があるのでした。より一般の(コ)ホモロジー理論 $h_*(-)$, $h^*(-)$ に対しては、アンダーソンによれば一般には h と異なる(コ)ホモロジー理論 $Dh_*(-)$, $Dh^*(-)$ があり、

$$0 \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}}(h_{d-1}(X), \mathbb{Z}) \rightarrow (Dh)^d(X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(h_d(X), \mathbb{Z}) \rightarrow 0 \quad (4.2)$$

が成り立ちます。また、一般に $DDh = h$ が成り立ちます。特に $DH(-, \mathbb{Z}) = H(-, \mathbb{Z})$, $DK = K$, $DKO = KSp$ が知られています。

d 次元の可逆な場の理論の分類に出てくるものは、ですから、

$$0 \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}}(\Omega_d^G(X), \mathbb{Z}) \rightarrow (D\Omega^G)^{d+1}(X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Omega_{d+1}^G(X), \mathbb{Z}) \rightarrow 0 \quad (4.3)$$

をみたまえ。

⁷ 原論文は [And69] です。最近の解説は例えば [HS14] を参照ください。

4.4. 例

実例として、空間 2 次元時間 1 次元で $X = pt$ 、 G として Spin 構造を選びましょう。すると $d = 2 + 1 = 3$ 、 $\Omega_3^{\text{Spin}}(pt) = 0$ 、 $\Omega_4^{\text{Spin}}(pt) = \mathbb{Z}$ です。よって、この次元でスピン構造に対する可逆位相的場の理論は自明なものしかありませんが、可逆場の理論は up to ホモトピーでは $\kappa \in \mathbb{Z}$ で分類されます。この整数は物性理論では熱的ホール伝導度として知られています。分配関数は

$$Z_\kappa(M) = \exp(2\pi i \kappa \int_W \frac{p_1}{48}) \quad (4.4)$$

で与えられます、ただし W は $\partial W = M$ なる四次元スピン多様体で、 p_1 はその上の第1ポントリャーギン類を微分形式でかいたものです。

次に、空間 3 次元時間 1 次元で $X = pt$ 、 G として Spin 構造を選ぶとどうなるでしょうか。 $d = 3 + 1 = 4$ 、 $\Omega_4^{\text{Spin}}(pt) = \mathbb{Z}$ 、 $\Omega_5^{\text{Spin}}(pt) = 0$ です。よって、スピン構造に対する可逆位相的場の理論は $\mathbb{Z}$ のポントリャーギン双対の $U(1)$ だけあります。具体的には、分配関数は $\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq U(1)$ に対し

$$Z_\alpha(M) = \exp(2\pi i \alpha \int_M \frac{p_1}{48}) \quad (4.5)$$

です。可逆場の理論を up to ホモトピーで考えると、一般論から分類は自明であることが分かります。

おしまい、空間 3 次元時間 1 次元で $X = pt$ 、 G として Pin^+ 構造をとります。すると $d = 3 + 1 = 4$ 、 $\Omega_4^{\text{Pin}^+} = \mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$ 、 $\Omega_5^{\text{Pin}^+} = 0$ となります。これより、この次元での Pin^+ 構造に対する可逆場の理論は自動的に位相的で、 $\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$ で分類されるということが分かりました。分配関数は Dirac 作用素の η 不変量をつかって表示できることが知られています。

References

- [ABG04] Sergey Arkhipov, Roman Bezrukavnikov, and Victor Ginzburg, *Quantum groups, the loop grassmannian, and the springer resolution*, *J. Amer. Math. Soc.* **17** (2004), 595–678, [arXiv:math.RT/0304173](#).
- [And69] Donald W. Anderson, *Universal coefficient theorems for K-theory*. <http://faculty.tcu.edu/gfriedman/notes/Anderson-UCT.pdf>. unpublished notes.
- [Ati88] Michael Atiyah, *Topological quantum field theories*, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1988), no. 68, 175–186 (1989).
- [BFN16] Alexander Braverman, Michael Finkelberg, and Hiraku Nakajima, *Towards a Mathematical Definition of Coulomb Branches of 3-dimensional $\mathcal{N} = 4$ Gauge Theories, II*, [arXiv:1601.03586](#) [[math.RT](#)].
- [BFN17] ———, *Ring Objects in the Equivariant Derived Satake Category Arising from Coulomb Branches*, [arXiv:1706.02112](#) [[math.RT](#)].
- [CGLW13] Xie Chen, Zheng-Cheng Gu, Zheng-Xin Liu, and Xiao-Gang Wen, *Symmetry Protected Topological Orders and the Group Cohomology of Their Symmetry Group*, *Phys. Rev.* **B87** (2013), no. 15, 155114, [arXiv:1106.4772](#) [[cond-mat.str-el](#)].
- [CKLW15] Sebastiano Carpi, Yasuyuki Kawahigashi, Roberto Longo, and Mihály Weiner, *From Vertex Operator Algebras to Conformal Nets and Back*, *Mem. Amer. Math. Sci.* **254** (2015), no. 1213, [arXiv:1503.01260](#) [[math.OA](#)].
- [Cos11] Kevin Costello, *Renormalization and effective field theory*, *Mathematical surveys and monographs*, vol. 170, American Mathematical Society, 2011.
- [FBZ04] Edward Frenkel and David Ben-Zvi, *Vertex algebras and algebraic curves*, second ed., *Mathematical Surveys and Monographs*, vol. 88, American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.
- [FH16] Daniel S. Freed and Michael J. Hopkins, *Reflection Positivity and Invertible Topological Phases*, [arXiv:1604.06527](#) [[hep-th](#)].

- [FLM88] Igor Frenkel, James Lepowsky, and Arne Meurman, *Vertex operator algebras and the monster*, Pure and applied mathematics, vol. 134, Academic Press, 1988.
- [GJ87] James Glimm and Arthur Jaffe, *Quantum physics*, second ed., Springer-Verlag, New York, 1987. A functional integral point of view.
- [Haa96] Rudolf Haag, *Local quantum physics*, second ed., Texts and Monographs in Physics, Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [HS14] Drew Heard and Vesna Stojanoska, *K-theory, reality, and duality*, J. K-Theory **14** (2014), 526–555, [arXiv:1401.2581 \[math.AT\]](#).
- [JW06] Arthur Jaffe and Edward Witten, *Quantum Yang-Mills theory*, The millennium prize problems, Clay Math. Inst., Cambridge, MA, 2006, pp. 129–152.
- [Kaw17] Yasuyuki Kawahigashi, *Conformal Field Theory, Vertex Operator Algebras and Operator Algebras*, 2017. [arXiv:1711.11349 \[math-ph\]](#).
- [Kon94] Maxim Kontsevich, *Homological Algebra of Mirror Symmetry*, [arXiv:alg-geom/9411018](#).
- [KT90] Robert C. Kirby and Laurence R. Taylor, *Pin structures on low-dimensional manifolds*, Geometry of Low-Dimensional Manifolds, vol. 2, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 151, 1990, pp. 177–242.
- [KTTW15] Anton Kapustin, Ryan Thorngren, Alex Turzillo, and Zitao Wang, *Fermionic Symmetry Protected Topological Phases and Cobordisms*, JHEP **12** (2015), 052, [arXiv:1406.7329 \[cond-mat.str-el\]](#). [JHEP12,052(2015)].
- [MT11] Gregory W. Moore and Yuji Tachikawa, *On 2D TQFTs Whose Values are Holomorphic Symplectic Varieties*, [arXiv:1106.5698 \[hep-th\]](#).
- [Nak16] Hiraku Nakajima, *Towards a Mathematical Definition of Coulomb Branches of 3-dimensional $\mathcal{N} = 4$ Gauge Theories, I*, Adv. Theor. Math. Phys. **20** (2016), 595–669, [arXiv:1503.03676 \[math-ph\]](#).
- [Seg04] Graeme Segal, *The definition of conformal field theory*, Topology, geometry and quantum field theory, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 308, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004, pp. 421–577.
- [SW00] Raymond F. Streater and Arthur S. Wightman, *PCT, spin and statistics, and all that*, Princeton Landmarks in Physics, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2000. Corrected third printing of the 1978 edition.
- [Tac17] Yuji Tachikawa, *On ‘Categories’ of Quantum Field Theories*, 2017. [arXiv:1712.09456 \[math-ph\]](#).
- [Yon18] Kazuya Yonekura, *On the Cobordism Classification of Symmetry Protected Topological Phases*, [arXiv:1803.10796 \[hep-th\]](#).
- [原13] 原隆, 構成的場の理論 – 古典的な問題の紹介. <http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~hara/lectures/13/MP2013-2015.pdf>. 「数理物理 2013」講義ノート.
- [江新88] 江沢洋 and 新井朝雄, 場の量子論と統計力学, 日本評論社, 1988.
- [荒江96] 荒木不二洋 and 江沢洋, 量子場の数理, 2nd ed., 岩波講座現代の物理学, vol. 21, 岩波書店, 1996.
- [野10] 野村忠央, “government of the people”の解釈について, 『英語と英語教育の眺望』20周年記念刊行物 (2010), 199–214. <http://jaell.org/gakkaishi20th/Tadao%20NOMURA.pdf>.