

Computable prestructures (計算可能前構造)

樋口 幸治郎^{*†}

本講演では, 計算可能な構造 $\mathcal{M}$ とその上の合同関係 $\equiv$ の組み $\mathbb{M} = (\mathcal{M}, \equiv)$ として定義される計算可能前構造というものに対して, 数理論理学の色々な概念, 特に決定不可能性の概念を中心に, 計算可能前構造の概念として捉え直し, その性質を探究する.

何を考察にせよ, 記述などの表現が必要であるが, 考察するものに関する表現を形式化したならば, そこには大抵, 計算可能前構造が付随している. すなわち, 形式化された表現に伴う計算可能構造 $\mathcal{M}$ と, 同じ内容の表現であるという合同関係 $\equiv$ との組み $\mathbb{M} = (\mathcal{M}, \equiv)$ としての計算可能前構造である.

例えば, 自然数上の1変数計算可能部分関数を論ずるに, その表現として, Turing 機械による表現法があり, これは形式的に記述できる. その記述全体の集合, 或いは, 必要に応じて, 関数の合成や関数の四則といった関数の解釈を含めた構造 $\mathcal{M}$ は計算可能構造で, また同一の関数を表すという関係 $\equiv$ は合同関係となり, 計算可能前構造 $\mathbb{M} = (\mathcal{M}, \equiv)$ が付随していることが分かる.

また, 別の例として, 群といった数学の何かの理論 T (の1階の部分) で成り立つことを論ずるには, T に関する文 (つまり, 自由変数のない論理式) は, 1階述語論理上で形式的に表現でき, T が数学でよく出てくるような特定の理論ならば, T に関する文全体の構造 $\mathcal{M}$ は計算可能構造と考えてよく, 理論 T の中では同じ意味を表す文という関係 $\equiv$, つまり, T 上で同値という関係 $\equiv$ は合同関係となり, ここにもやはり計算可能前構造 $\mathbb{M} = (\mathcal{M}, \equiv)$ が付随している. T で何が定理となるかを知るには, 合同関係 $\equiv$ が計算できること¹と同値である. $\equiv$ が計算可能であるような理論は決定可能であるといい, そうでないときは, 決定不可能であるという.

決定可能性・決定不可能性は, 自然に, 任意の計算可能前構造 $\mathbb{M} = (\mathcal{M}, \equiv)$ の概念として, 拡張できる. つまり, $\equiv$ が計算可能か計算不可能かに応じて, $\mathbb{M}$ は決定可能・決定不可能と定義する. 計算可能前構造が決定可能であれば, 二つの表現が同一の内容を持っているかどうか, 決定可能性の計算手順に従って判定できるということなので, 考察したい事柄の分析に有利であろう. しかしながら, 例えば, 先ほどの最初の例の計算可能関数に付随した計算可能前構造や, 2番目の例の例である Peano 算術の理論に付随した計算可能前構造は, 決定不可能であることが知られている.

実はこれらの例は遥かに強い意味で決定不可能である. 計算可能前構造 $\mathbb{M} = (\mathcal{M}, \equiv)$ について, $\equiv$ が計算不可能であるのみならず, $\equiv$ を拡張するどんな非自明な同値関係 $\equiv'$ も計

^{*}日本大学工学部

[†]email: higuchi.koujirou@nihon-u.ac.jp

¹つまり, 与えられた σ, τ に対し, 一様な計算法で $\sigma \equiv \tau$ かどうか判定できるということ

算不可能であるとき、 $\mathbb{M}$ は究極的に決定不可能であると定義する。これはつまり、表現を内容によって分類しようとしても、その分類は(つまらない例外を除いて) 計算不可能になるということである。先ほどの、計算可能関数やペアノ算術の二つの計算可能前構造の例は、究極的に決定不可能であることが示されている²。

究極的な決定不可能性を少し弱めた性質として、計算可能前構造 $\mathbb{M} = (\mathcal{M}, \equiv)$ について、 $\equiv$ を拡張するどんな非自明な合同関係 $\equiv'$ も計算不可能であるときには、 $\mathbb{M}$ は本質的に決定不可能であるという。この本質的決定不可能性は、1 階述語論理上の理論に関する性質として論ぜられていた概念を計算可能前構造の概念として自然に拡張したものである。横山・吉川は、1 階述語論理上の理論の計算可能前構造について、本質的決定不可能性と究極的決定不可能性の計算的に同値であること³を示した。計算可能前構造について、本質的決定不可能性と究極的決定不可能性が計算的に同値になることを、横山・吉川の性質を持つと定義する。倉橋・樋口は、計算可能前構造が特別な前構造であるとき、特に、色々な束構造の前構造であるときには、横山・吉川の性質が成り立つことを示した。本講演において、この結果の詳細や応用について説明する。

参考文献

- [1] 倉橋太志, 樋口幸治郎, 計算可能前構造と横山吉川の性質, 数理解析研究所講究録, 2050:24-40, 2017.
- [2] 横山啓太, 吉川紘史, ライスの定理のアナロジーについて, 数理解析研究所講究録, 1729:163-166, 2011.
- [3] Claudio Bernardi. On the relation provable equivalence and on partitions in effectively inseparable sets. *Studia Logica*, 40(1):29-37, 1981.
- [4] Henry Gordon Rice, “Classes of recursively enumerable sets and their decision problems”, *Transactions of the American Mathematical Society*, 74:358-366, 1953.

²計算可能関数に付随した計算可能前構造については、Rice の定理と呼ばれている。また、Peano 算術に付随した計算可能前構造については、Bernardi により示されている。

³これは、同値関係としての $\equiv$ の拡張から合同関係としての $\equiv$ の拡張を計算でき、逆に合同関係から同値関係も計算できるということを意味する。