

2 圏論的被覆理論と導来同値

静岡大学理学部 浅芝 秀人

はじめに

代数的閉体 $\mathbb{k}$ 上の基本的 (basic) 有限次元多元環 A は、クイバーと関係式 (Q, R) によって $A \cong \mathbb{k}(Q, R) := \mathbb{k}Q/\langle R \rangle$ の形で与えられ、 A の加群圏 $\text{Mod } A$ は、 (Q, R) の $\mathbb{k}$ 上の表現の圏 $\text{Rep}_{\mathbb{k}}(Q, R)$ と同値になる. このことを用いて、多元環の具体例が大量に簡単に作ることができ、その加群圏も理解しやすくなり、多元環の表現論が飛躍的に発展した. Q が有向閉路をもつ場合と持たない場合を比べると、後者の方が計算がずっと簡単になるが、自己入射多元環では、ほとんどいつもクイバーは有向閉路を持つ. そこで、有向閉路を持つクイバーの表現を、有向閉路を持たないクイバーの表現に帰着させる方法が Riedtmann [20], Bongartz–Gabriel [9], Gabriel [14], Green [15] 達によって導入された. クイバーを図形とみて、その普遍被覆を取れば閉路を消すことができるが、彼らの理論は、このことを代数的に行ったものである. そのため、これは多元環の表現論における被覆理論とよばれる. この理論はクイバーで定義される線形圏の加群圏の研究で非常に便利なものであったので、これを一般の線形圏の加群圏や導来圏にも適用したいと考えることは自然である. それを実際に行い、応用して、有限表現型自己入射多元環を導来同値のもとで分類することができた [1, 2]. ここで解説する理論はその中心的道具を一般化させて得られたものである. クイバーと関係式で与えられる線形圏においては、異なる対象は互いに非同型である. この特殊性から理論は簡単な形になっていたが、一般の線形圏では互いに同型な異なる対象はいくらでもあるので、このままでは理論は適用できない. その困難は、自然変換の族を用いることで回避できる. それで、線形圏の集まりとそれらの間の関手、さらにそれら関手の間の自然変換も考える設定が必要になってくる. すなわち 2-圏論的扱いが自然に必要なってくる (2-圏については [18] などを参照). 本講演では、この 2-圏論的被覆理論を解説し、それを導来同値に応用する. 最初は群作用を持つ線形圏での設定で行っていたが [3, 4], 群の作用は圏の同型でなく同値で与えられる場合がほとんどなので、群作用では応用が限られる. Deligne, Drinfeld などの人々によって導入されていた、群の弱い作用を用いる方が自然である. この群の弱い作用は、見方を変えると、単に群から 2-圏への擬関手 (pseudofunctor) となるが、このことはあまり知られていないように思われるので、このことも解説に加えた.

第 1 節では、この群の擬作用の設定のもとで 2-圏論的被覆理論を打ち立てる. 第 2 節では、これを導来同値に応用する. 第 3 節では、群の作用から圏の作用に一般化することに少し触れる. これにより、有向閉路を解消する理論であったものを、多くの圏を関手で貼り合わせる理論に強化することができた [5, 6]. この理論はさらに、圏を両側加群で貼り合わせる理論に一般化できる. また、ここで取り扱った導来同値は片側傾け加群に関係するものであるが、両側傾け加群に相当する理論もあり、いろいろな応用が期待できる. ここでは紙面 (時間) の関係で、これらについては触れることはできなかった.

1. 2 圏論的被覆理論

この節では、 $\mathbb{k}$ を可換環とする。圏 $\mathcal{C}$ は、すべての対象 x, y について $\mathcal{C}(x, y)$ が $\mathbb{k}$ -加群で、合成が双線形になっているとき、 $\mathbb{k}$ -線形圏あるいは短く $\mathbb{k}$ -圏とよばれる。それらの間の関手 $F: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ は、 $\mathcal{B}(x, y) \rightarrow \mathcal{C}(Fx, Fy)$ ($x, y \in \mathcal{B}_0$) が $\mathbb{k}$ -線形であるとき、 $\mathbb{k}$ -関手とよばれる。 $\mathbb{k}$ -小圏の全体とその間の $\mathbb{k}$ -関手、それらの関手の間の自然変換からなる 2-圏を $\mathbb{k}\text{-Cat}$ で表す。 $\mathbb{k}$ -圏の集まり $\mathcal{S}$ に対して、それを対象の全体とし、それらの間の $\mathbb{k}$ -関手を 1-射の全体、それら 1-射の間の自然変換を 2-射の全体とする 2-圏を $\mathbb{k}\text{-Cat}(\mathcal{S})$ で表す。

1a. 群の作用と擬作用. $\mathcal{C}$ を線形圏とする。 G の $\mathcal{C}$ への作用とは、群準同型 $X: G \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{C})$ のことであり、組 $(\mathcal{C}, X)$ を G -作用を持つ圏、あるいは単に G -圏とよぶ。群 $G = (G, \cdot)$ を単対象圏 $(\{*\}, G, \text{dom}, \text{cod}, \cdot)$ と見なし、単対象からなる圏 $\mathbb{k}\text{-Cat}(\{\mathcal{C}\})$ ($\mathcal{C}$ から $\mathcal{C}$ への関手の全体を射とする) を考えると、この X は、関手 $G \rightarrow \mathbb{k}\text{-Cat}(\{\mathcal{C}\})$ と同一視できる。さらに、 $\mathcal{C}$ を小圏に限れば、 $(\mathcal{C}, X)$ は、次で定義される関手 $X': G \rightarrow \mathbb{k}\text{-Cat}$ と同一視できる：

$$X'(*) := \mathcal{C}, X'(a) := X(a) \quad (a \in G).$$

そこで、上で用いていなかった $\mathbb{k}\text{-Cat}(\{\mathcal{C}\})$ および $\mathbb{k}\text{-Cat}$ の 2-圏構造 (関手の間の自然変換の全体を 2-射とする) を活用して、 G -圏の概念を次のように一般化する。

定義 1.1. 線形圏 $\mathcal{C}$ と擬関手 $X: G \rightarrow \mathbb{k}\text{-Cat}(\{\mathcal{C}\})$ の組 $(\mathcal{C}, X)$ を G -擬作用を持つ圏 (短く擬 G -圏) とよぶ。特に $\mathcal{C}$ が小圏であるとき、これを擬関手 $X: G \rightarrow \mathbb{k}\text{-Cat}$ で $X(*) = \mathcal{C}$ を満たすものと同一視する。すなわち、 X は次のデーターからなり以下の公理を満たすものである。

データー：

- (1) $\mathbb{k}$ -圏 $\mathcal{C}$,
- (2) 関手の族 $(X(a): \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C})_{a \in G}$,
- (3) 自然同型 $X_*: X(1) \Rightarrow \mathbb{1}_{\mathcal{C}}$,
- (4) 自然同型の族 $(X_{b,a}: X(ba) \Rightarrow X(b) \circ X(a))_{a,b \in G}$.

公理：

$$\begin{array}{c}
 \text{(a}_1\text{)} \quad \begin{array}{c} X(a) \curvearrowright \\ \textcircled{X_*} \\ \textcircled{X_{a,1}} \\ \downarrow X(a \cdot 1) \end{array} = \left| \begin{array}{c} X(a) \end{array} \right|, \quad \text{(a}_2\text{)} \quad \begin{array}{c} X(a) \curvearrowright \\ \textcircled{X_*} \\ \textcircled{X_{1,a}} \\ \downarrow X(1 \cdot a) \end{array} = \left| \begin{array}{c} X(a) \end{array} \right| \quad (a \in G)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \text{(b)} \quad \begin{array}{c} X(b) \curvearrowright \\ \textcircled{X_{b,a}} \\ \textcircled{X_{c,ba}} \\ \downarrow X(cba) \end{array} = \begin{array}{c} X(b) \curvearrowright \\ \textcircled{X_{c,b}} \\ \textcircled{X_{cb,a}} \\ \downarrow X(cba) \end{array} \quad (a, b, c \in G)
 \end{array}$$

注意 1.2. (1) 自然変換の合成には水平合成 ($\circ$ で表す) と垂直合成 ($\bullet$ で表す) の 2 つがあるが, 上のようにストリング図を用いると, これらを視覚的に区別でき, 2 種類の合成の交替法則も自動的に表すことができる. ここでは, 垂直合成は下から上に, 水平合成は右から左に書いている. 同じ内容は, 普通は自然変換の可換図式で表されている.

(2) $(\mathcal{C}, X)$ を擬 G -圏とすると, 各 $X(a)$ ($a \in G$) は $\mathcal{C}$ の自己同値になっている. 実際, $X(a) \circ X(a^{-1}) \cong X(aa^{-1}) = X(1) \cong \mathbb{1}_{\mathcal{C}}$. 同様にして, $X(a^{-1}) \circ X(a) \cong \mathbb{1}_{\mathcal{C}}$.

補題 1.3. 擬 G -圏のデーター (1), (2) (4) の組が公理 (b) を満たし, $X(1): \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ が圏の同値であると仮定する. すると, 随伴同値系 $(X(1), Y, \eta, \varepsilon)$ が存在する. このとき, 条件 (a₁), 条件 (a₂) および次の 4 つの条件はすべて互いに同値である:

(a'₁): $a = 1$ に対する (a₁), (a'₂): $a = 1$ に対する (a₂),

$$(a''_1): X_* = \begin{array}{c} \eta^{-1} \\ \downarrow X(1) \\ Y \\ \downarrow X(1) \\ \eta \end{array} \quad , \quad (a''_2): X_* = \begin{array}{c} \varepsilon \\ \downarrow X(1) \\ X_{1,1}^{-1} \\ \downarrow X(1) \\ \varepsilon^{-1} \end{array}$$

したがって特に, (a'₁) または (a'₂) が成り立てば次が成り立つ.

$$\begin{array}{c} \eta^{-1} \\ \downarrow X(1) \\ Y \\ \downarrow X(1) \\ \eta \end{array} = \begin{array}{c} \varepsilon \\ \downarrow X(1) \\ X_{1,1}^{-1} \\ \downarrow X(1) \\ \varepsilon^{-1} \end{array}$$

注意 1.4. 以上の補題より,

(a') $X(1)$ は自己同値である

という条件を考えると, 擬 G -圏は, 定義 1.1 のデーター (1), (2), (4) と公理 (a'), (b) だけで定まる. すなわち, この定義は Deligne 等 [12], [13], [10] による群の圏への弱い作用¹の定義と同値である.

1b. 群の擬作用を持つ圏と同変関手のなす 2 圏.

定義 1.5. 擬 G -圏 $(\mathcal{C}, X)$ から擬 G -圏 $(\mathcal{C}', X')$ への G -同変関手とは, 次のデーターの組 (E, ρ) で, 以下の公理を満たすものである.

データー:

- 関手 $E: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$
- 自然同型の族 $\rho = (\rho_a: X'(a)E \Rightarrow EX(a))_{a \in G}$

¹(a') よりも強く, すべての $X(a)$ ($a \in G$) が自己同値と仮定しているが, この部分も注意 1.2 から従う.

公理: 各 $a, b \in G$ に対して次の2つの等式が成り立つ:

$$(1-1) \quad \begin{array}{c} E \\ | \\ \textcircled{\rho_1} \\ | \\ X'(1) \end{array} \begin{array}{c} X_* \\ | \\ X(1) \\ | \\ E \end{array} = \begin{array}{c} X'_* \\ | \\ X'(1) \end{array} \begin{array}{c} | \\ | \\ E \end{array},$$

$$(1-2) \quad \begin{array}{c} X(b) \\ | \\ \textcircled{\rho_b} \\ | \\ X'(b) \end{array} \begin{array}{c} E \\ | \\ \textcircled{\rho_a} \\ | \\ X'(a) \end{array} \begin{array}{c} X(a) \\ | \\ E \end{array} = \begin{array}{c} X(b) \\ | \\ \textcircled{X_{b,a}} \\ | \\ X'(ba) \end{array} \begin{array}{c} X(a) \\ | \\ E \end{array}$$

また特に, 上の ρ_a がすべて恒等射にとれるとき, すなわち各 $a \in G$ に対して $X'(a)E = EX(a)$ となるとき, E は厳格な G -同変関手であるという.

G -同変関手 (E, ρ) は, E が同値であるとき, G -同変同値とよばれる.

定義 1.6. $(E, \rho), (E', \rho'): (\mathcal{C}, X) \rightarrow (\mathcal{C}', X')$ を擬 G -圏の間の G -同変関手とする. (E, ρ) から (E', ρ') への射とは自然変換 $\eta: E \Rightarrow E'$ で, 各 $a \in G$ に対して次の等式を満たすものである.

$$\begin{array}{c} E' \\ | \\ \textcircled{\eta} \\ | \\ E \end{array} \begin{array}{c} X(a) \\ | \\ \textcircled{\rho_a} \\ | \\ X'(a) \end{array} = \begin{array}{c} E' \\ | \\ \textcircled{\rho'_a} \\ | \\ X'(a) \end{array} \begin{array}{c} X(a) \\ | \\ \textcircled{\eta} \\ | \\ E \end{array}$$

補題 1.7. $(\mathcal{C}, X) \xrightarrow{(E, \rho)} (\mathcal{C}', X') \xrightarrow{(E', \rho')} (\mathcal{C}'', X'')$ を擬 G -圏の間の G -同変関手とすると,

$$(E', \rho') \circ (E, \rho) := (E' \circ E, \rho' \circ \rho): \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}''$$

も G -同変関手となる. これを (E, ρ) と (E', ρ') の合成という. ただし, $\rho' \circ \rho := ((E' \circ \rho_a) \bullet (\rho'_a \circ E))_{a \in G}$, つまり $\rho' \circ \rho$ は次の自然同型の族である:

$$(\rho' \circ \rho)_a := \begin{array}{c} E' \\ | \\ \textcircled{\rho'_a} \\ | \\ X''(a) \end{array} \begin{array}{c} E \\ | \\ \textcircled{\rho_a} \\ | \\ X'(a) \end{array} \begin{array}{c} X(a) \\ | \\ E \end{array}$$

定義 1.8. 次で2-圏 $G\text{-Cat}$ [および $G\text{-Cat}^s$] が定義される.

- 対象は擬 G -小圏 $[G\text{-小圏}] (\mathcal{C}, X): G \rightarrow \mathbb{k}\text{-Cat}$ の全体.
- 1-射はそれらの間の G -同変関手の全体.
- 対象 $(\mathcal{C}, X)$ の恒等 1-射は, $(1_{\mathcal{C}}, (1_{1_{\mathcal{C}}})_{a \in G})$ に等しい.
- 2-射は G -同変関手の間の射の全体.
- 1-射 $(E, \rho): (\mathcal{C}, X) \rightarrow (\mathcal{C}', X')$ の恒等 2-射は, E の恒等自然変換 1_E .
- 1-射の合成は上の補題で与えられたもの.
- 2-射の垂直合成, 水平合成は自然変換に対して普通に定義されるもの.

1c. 群次数付き圏と (弱) 次数保存関手のなす 2 圏.

定義 1.9. (1) G -次数圏とは, 次のデーターからなり以下の公理を満たすものである.

データー:

- 線形圏 $\mathcal{B}$,
- ベクトル空間の内部直和による分解 $\mathcal{B}(x, y) = \bigoplus_{a \in G} \mathcal{B}^a(x, y)$ (正確にいうと, 部分空間の族 $(\mathcal{B}^a(x, y))_{a \in G}$ でこの等式を満たすもの) の族 $(x, y \in \mathcal{B}_0)$.

公理:

$$\mathcal{B}^b(y, z) \circ \mathcal{B}^a(x, y) \subseteq \mathcal{B}^{ba}(x, z) \quad (x, y \in \mathcal{B}; a, b \in G).$$

各 $a \in G$ に対して, $\mathcal{B}^a(x, y)$ の元 f を $\mathcal{B}(x, y)$ の斉次元, a を f の次数といい, $\deg f := a$ とおく $(x, y \in \mathcal{B})$.

(2) 次数保存関手とは, G -次数圏の間の線形関手 $H: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ と写像 $r: \mathcal{B}_0 \rightarrow G$ との対 (H, r) であり, 条件

$$H(\mathcal{B}^{r_y a}(x, y)) \subseteq \mathcal{A}^{ar_x}(Hx, Hy) \quad (x, y \in \mathcal{B}, a \in G)$$

を満たすものである (上の条件は, $H(\mathcal{B}^a(x, y)) \subseteq \mathcal{A}^{r_y^{-1}ar_x}(Hx, Hy)$ と同値).

(3) G -次数圏の間の線形関手 $H: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ は, $H(\mathcal{B}^a(x, y)) \subseteq \mathcal{A}^a(Hx, Hy)$ $(x, y \in \mathcal{B}; a \in G)$ を満たすとき, 厳格な次数保存関手であるという. この条件は, 1 を定数写像 $\mathcal{B}_0 \rightarrow G, x \mapsto 1 \in G$ $(x \in \mathcal{B}_0)$ とするとき, $(H, 1)$ が次数保存関手であることと同値であることに注意する.

(4) $(H, r), (I, s): \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ を次数保存関手とする. このとき, 自然変換 $\theta: H \Rightarrow I$ は, $\theta x \in \mathcal{A}^{s_x^{-1}r_x}(Hx, Ix)$ $(x \in \mathcal{B})$ を満たすとき, 次数保存関手の間の射であるという.

補題 1.10. $\mathcal{B} \xrightarrow{(H, r)} \mathcal{B}' \xrightarrow{(H', r')} \mathcal{B}''$ を次数保存関手とする. このとき,

$$(H' \circ H, (r_x r'_{Hx})_{x \in \mathcal{B}}): \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}''$$

も次数保存関手になる. これを (H, r) と (H', r') の合成とよび $(H', r') \circ (H, r)$ で表す.

定義 1.11. 次で 2-圏 $G\text{-GrCat}$ [および $G\text{-GrCat}^s$] が定義される.

- 対象は G -次数小圏の全体.
- 1-射はそれらの間の次数保存関手の全体 [厳格な次数保存関手の全体].
- 対象 $\mathcal{B}$ の恒等 1-射は $(1_{\mathcal{B}}, 1)$.
- 2-射は次数保存関手の間の射の全体.
- 1-射 $(H, r): \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ の恒等 2-射は H の恒等 1_H . これは, $(1_H)x = 1_{Hx} \in \mathcal{A}^1(Hx, Hx) = \mathcal{A}^{r_x^{-1}r_x}(Hx, Hx)$ $(x \in \mathcal{B}_0)$ より 2-射になっている.
- 1-射の合成は上の補題で与えられたもの.
- 2-射の垂直合成, 水平合成は自然変換に対して普通に定義されるもの.

1d. 被覆関手.

定義 1.12. 2-関手 $\Delta: \mathbb{k}\text{-Cat} \rightarrow G\text{-Cat}$ を次で定義し, これを対角 2-関手とよぶ.

- $\mathcal{C}$ が $\mathbb{k}\text{-Cat}$ の対象であるとき, $\Delta(\mathcal{C})(*) := \mathcal{C}, \Delta(\mathcal{C})(a) := \mathbb{1}_{\mathcal{C}} \ (a \in G)$ とおく. すなわち, $\mathcal{C}$ に自明な G -作用を与えたものとする.
- $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ が $\mathbb{k}\text{-Cat}$ の 1-射であるとき, $\Delta(F): \Delta(\mathcal{C}) \rightarrow \Delta(\mathcal{C}')$ は, $G\text{-Cat}$ における 1-射 $(F, (\mathbb{1}_F: \mathbb{1}_{\mathcal{C}} \circ F \Rightarrow F \circ \mathbb{1}_{\mathcal{C}})_{a \in G})$ とする.
- $F, F': \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}', \alpha: F \Rightarrow F'$ がそれぞれ $\mathbb{k}\text{-Cat}$ の 1-射, 2-射であるとき, $G\text{-Cat}$ における 2-射 $\Delta(\alpha): \Delta(F) \Rightarrow \Delta(F')$ を $\Delta(\alpha) := \alpha$ で定義する.

注意 1.13. $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ が $\mathbb{k}\text{-Cat}$ の 1-射であるとき,

$\Delta F: \Delta(\mathcal{C}) \rightarrow \Delta(\mathcal{C}')$ は $G\text{-Cat}$ の厳格な G -同変関手である.

補題 1.14. $H: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ が $\mathbb{k}\text{-Cat}$ の 1-射で $(F, \psi): \mathcal{C} \rightarrow \Delta \mathcal{B}$ が $G\text{-Cat}$ の 1-射ならば, $\Delta(H) \circ (F, \psi) = (H \circ F, (H \circ \psi_a)_{a \in G}): \mathcal{C} \rightarrow \Delta(\mathcal{A})$.

定義 1.15. $\mathcal{B}$ を線形圏とし, $(F, \psi): \mathcal{C} \rightarrow \Delta(\mathcal{B})$ を $G\text{-Cat}$ の 1-射とする.

(1) (F, ψ) は, 各 $x, y \in \mathcal{C}_0$ に対して

$$(F, \psi)_{x,y}^{(1)}: \prod_{a \in G} \mathcal{C}(X(a)x, y) \rightarrow \mathcal{B}(Fx, Fy), (f_a)_{a \in G} \mapsto \sum_{a \in G} F(f_a) \cdot \psi_a x$$

が同型であるとき, G -前被覆であるという.

(2) (F, ψ) が G -前被覆で, 関手 F が稠密である (すなわち, 各 $y \in \mathcal{B}$ はある $x \in \mathcal{C}$ によって $Fx \cong y$ と書ける) とき, (F, ψ) は G -被覆であるという.

1e. 軌道圏構成による 2 関手.

定義 1.16. 2-関手 $?/G: G\text{-Cat} \rightarrow \mathbb{k}\text{-Cat}$, $x \mapsto x/G \ (x \in (G\text{-Cat})_i, i = 0, 1, 2)$ を次のように定義し, これを軌道 2-関手とよぶ.

(0) 対象に対して: 擬 G -圏 $\mathcal{C}$ に対して線形圏 $\mathcal{C}/G$ を次で定義し, これを $\mathcal{C}$ の G による軌道圏とよぶ.

- $(\mathcal{C}/G)_0 := \mathcal{C}_0$.
- 各 $x, y \in (\mathcal{C}/G)_0$ に対して, $(\mathcal{C}/G)(x, y) := \coprod_{a \in G} \mathcal{C}(X(a)x, y)$. とする. ここで,

$$\sigma_a^{\mathcal{C}/G}: \mathcal{C}(X(a)x, y) \rightarrow (\mathcal{C}/G)(x, y), \quad f \mapsto (\delta_{b,a}f)_{b \in G}$$

を標準入射とし (δ はクロネッカーのデルタ記号²とする),

$$(1-3) \quad (\mathcal{C}/G)^a(x, y) := \sigma_a^{\mathcal{C}/G}(\mathcal{C}(X(a)x, y)),$$

$(x, y \in \mathcal{C}_0 = (\mathcal{C}/G)_0, a \in G)$ とおくと,

$$(1-4) \quad (\mathcal{C}/G)(x, y) = \bigoplus_{a \in G} (\mathcal{C}/G)^a(x, y)$$

と内部直和の形に書ける.

- 各 $f = (f_a)_{a \in G} \in (\mathcal{C}/G)(x, y), g = (g_b)_{b \in G} \in (\mathcal{C}/G)(y, z)$ に対して,

$$g \circ f := \left(\sum_{\substack{a, b \in G \\ ba=c}} g_b \circ X(b)f_a \circ X_{b,a}x \right)_{c \in G}$$

²すなわち, 第 b 成分は, $b = a$ のとき f で, それ以外では 0.

ここで、各項は次の合成である:

$$X(ba)x \xrightarrow{X_{b,a}x} X(b)X(a)x \xrightarrow{X(b)f_a} X(b)y \xrightarrow{g_b} z.$$

- 各 $x \in (\mathcal{C}/G)_0$ に対して、 $\mathcal{C}/G$ における恒等射 $\mathbb{1}_x^{\mathcal{C}/G}$ は次で与えられる:

$$\mathbb{1}_x^{\mathcal{C}/G} = \sigma_1^{\mathcal{C}/G}(X_*x) = (\delta_{a,1}X_*x)_{a \in G} \in \coprod_{a \in G} \mathcal{C}(X(a)x, x).$$

この形から $\deg \mathbb{1}_x^{\mathcal{C}/G} = 1$ であることに注意する.

(1) 1-射に対して: $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, X), \mathcal{C}' = (\mathcal{C}', X')$ を擬 G -圏とし, $(F, \psi): \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ を $G\text{-Cat}$ での 1-射とする. このとき, $\mathbb{k}\text{-Cat}$ での 1-射

$$(F, \psi)/G: \mathcal{C}/G \rightarrow \mathcal{C}'/G$$

を次で定義する.

- 各 $x \in (\mathcal{C}/G)_0 = \mathcal{C}_0$ に対して,

$$(1-5) \quad ((F, \psi)/G)(x) := F(x).$$

- 各 $x, y \in (\mathcal{C}/G)_0$ と各 $f = (f_a)_{a \in G} \in (\mathcal{C}/G)(x, y)$ に対して, $((F, \psi)/G)(f) := (F(f_a) \circ \psi_a x)_{a \in G}$. ここで、各成分は合成

$$X'(a)F x \xrightarrow{\psi_a x} F X(a)x \xrightarrow{F(f_a)} F y$$

で与えられる.

(2) 2-射に対して: $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, X), \mathcal{C}' = (\mathcal{C}', X')$ を $G\text{-Cat}$ の対象, $(F, \psi), (F', \psi'): \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ を $G\text{-Cat}$ での 1-射とし, $\zeta: (F, \psi) \Rightarrow (F', \psi')$ を $G\text{-Cat}$ での 2-射とする. このとき, $\mathbb{k}\text{-Cat}$ の 2-射

$$\zeta/G: (F, \psi)/G \Rightarrow (F', \psi')/G$$

を次で定義する. 各 $x \in \mathcal{C}_0$ に対して,

$$\zeta x \circ X_* F(x) \in \mathcal{C}'(X(1)F(x), F'(x))$$

であることに注意して,

$$(1-6) \quad (\zeta/G)x := \sigma_1^{\mathcal{C}'/G}(\zeta x \circ X_* F(x)) \in (\mathcal{C}'/G)^1(F(x), F'(x)).$$

とおく.

注意 1.17. 定義 1.16(0) における直和分解 (1-4) と合成の定義によって、軌道圏 $\mathcal{C}/G$ は G -次数圏になっていることに注意する. また, $G\text{-Cat}$ の任意の 1-射 (F, ψ) に対して, $(F, \psi)/G$ は厳格な次数保存関手, 任意の 2-射 ζ に対して, ζ/G は $G\text{-GrCat}$ の 2-射になっている. したがって、軌道 2-関手は

$$?/G: G\text{-Cat} \rightarrow G\text{-GrCat}$$

と見ることができる. G -次数を忘れる, 忘却 2-関手 $\text{Fgt}: G\text{-GrCat} \rightarrow \mathbb{k}\text{-Cat}$ を考えると, 2-関手

$$?/G: G\text{-Cat} \rightarrow \mathbb{k}\text{-Cat}$$

は, 合成 $\text{Fgt} \circ (?/G)$ であるとも見ることができる.

定義 1.18. $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, X) \in G\text{-Cat}_0$ とする. $G\text{-Cat}$ での 1-射である, 標準被覆関手 $(P, \phi): \mathcal{C} \rightarrow \Delta(\mathcal{C}/G)$ を次で定義する (命題 1.21 でこれが実際に G -被覆であることが示される).

- $\mathcal{C}$ の各対象 x に対して, $Px := x$.

- $\mathcal{C}$ の各射 $f: x \rightarrow y$ に対して,

$$Pf := \sigma_1^{\mathcal{C}/G}(f \circ X_*x) = (\delta_{a,1}f \circ X_*x)_{a \in G} \in (\mathcal{C}/G)^1(Px, Py).$$

- 各 $a \in G$ に対して, 自然変換 $\phi_a: P \Rightarrow PX(a)$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{P} & \mathcal{C}/G \\ X(a) \downarrow & \searrow \phi_a & \parallel \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{P} & \mathcal{C}/G \end{array}$$

を $\phi_a x := \sigma_a^{\mathcal{C}/G}(\mathbb{1}_{X(a)x}) = (\delta_{b,a} \mathbb{1}_{X(a)x})_{b \in G}$ ($x \in \mathcal{C}$) で定義する. この形から $\deg \phi_a x = a$ であることに注意する.

補題 1.19. 上において各 $a \in G$ に対して, $\phi_a := (\phi_a x)_{x \in \mathcal{C}}: P \Rightarrow PX(a)$ は自然同型であり, $\phi := (\phi_a)_{a \in G}$ とおくと, $(P, \phi): \mathcal{C} \rightarrow \Delta(\mathcal{C}/G)$ は G -同変関手になる.

例 1.20. $\mathcal{C} = R$ が $\mathbb{k}$ -多元環 (= 単対象線形圏) で R が G -作用をもつとき, 軌道圏 R/G は歪群環 $R * G$ (を圏と見なしたもの) と同型になる.

命題 1.21. $(\mathcal{C}, X) \in G\text{-Cat}$ とすると, 標準被覆関手 $(P, \phi): \mathcal{C} \rightarrow \Delta(\mathcal{C}/G)$ は G -被覆となる. 詳しくいうと, すべての $x, y \in \mathcal{C}_0$ に対して,

$$(P, \phi)_{x,y}^{(1)}: \coprod_{a \in G} \mathcal{C}(X(a)x, y) \rightarrow (\mathcal{C}/G)(Px, Py)$$

は恒等写像になる.

1f. 軌道 2-関手と対角 2-関手の 2-随伴. 軌道圏 $\mathcal{C}/G$ の G -次数付けを忘れることにより $\mathcal{C}/G \in \mathbb{k}\text{-Cat}_0$ と見なす (注意 1.17). これにより 2-関手 $?/G: G\text{-Cat} \rightarrow \mathbb{k}\text{-Cat}$ が得られる. この節では, これが対角 2-関手 $\Delta: \mathbb{k}\text{-Cat} \rightarrow G\text{-Cat}$ に対する厳格な 2-左随伴であることを証明する. その証明から, 標準被覆関手が随伴の 2-単位射の成分となっていることが分かる. また, この随伴から, 被覆関手の普遍性による特徴付けが得られる.

定義 1.22. 各 $\mathcal{D} \in \mathbb{k}\text{-Cat}$ に対して, 関手 $Q_{\mathcal{D}}: \Delta(\mathcal{D})/G \rightarrow \mathcal{D}$ を次で定義する.

- 各 $x \in (\Delta(\mathcal{D})/G)_0 = \mathcal{D}_0$ に対して, $Q_{\mathcal{D}}(x) := x$,
- 各 $(f_a)_{a \in G} \in (\Delta(\mathcal{D})/G)(x, y) = \coprod_{a \in G} \mathcal{D}(x, y)$ に対して, $Q_{\mathcal{D}}((f_a)_{a \in G}) := \sum_{a \in G} f_a$ ($x, y \in (\Delta(\mathcal{D})/G)_0$).

容易に分かるように $Q_{\mathcal{D}}$ は線形関手である.

定理 1.23. 軌道 2-関手 $?/G: G\text{-Cat} \rightarrow \mathbb{k}\text{-Cat}$ は対角 2-関手 $\Delta: \mathbb{k}\text{-Cat} \rightarrow G\text{-Cat}$ の厳格な左 2-随伴である. 単位射は標準被覆関手の族 $((P_{\mathcal{C}}, \phi_{\mathcal{C}}): \mathcal{C} \rightarrow \Delta(\mathcal{C}/G))_{\mathcal{C} \in G\text{-Cat}_0}$ で与えられ, 余単位射は上で定義された関手の族 $(Q_{\mathcal{D}}: \Delta(\mathcal{D})/G \rightarrow \mathcal{D})_{\mathcal{D} \in \mathbb{k}\text{-Cat}_0}$ で与えられる.

したがって一般論により, 各 $\mathcal{C} \in G\text{-Cat}, \mathcal{D} \in \mathbb{k}\text{-Cat}$ について自然な圏の同型

$$(1-7) \quad \mathbb{k}\text{-Cat}(\mathcal{C}/G, \mathcal{D}) \cong G\text{-Cat}(\mathcal{C}, \Delta(\mathcal{D})), \quad H \mapsto \Delta(H) \circ (P_{\mathcal{C}}, \phi_{\mathcal{C}})$$

が存在する. 特に, (P_X, ϕ_X) は次の意味の普遍性を持っている. すなわち, $G\text{-Cat}$ の各 1-射 $(F, \psi): \mathcal{C} \rightarrow \Delta(\mathcal{D})$, ($\mathcal{D} \in \mathbb{k}\text{-Cat}$) に対して, 次の $G\text{-Cat}$ における図式

を厳格に可換にする $\mathbb{k}\text{-Cat}$ の 1-射 $H: \mathcal{C}/G \rightarrow \mathcal{D}$ がただ 1 つ存在する:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{(F, \psi)} & \Delta(\mathcal{D}). \\ (P_{\mathcal{C}}, \phi_{\mathcal{C}}) \downarrow & \nearrow \Delta(H) & \\ \Delta(\mathcal{C}/G) & & \end{array}$$

1g. スマッシュ積による 2 関手. この節では, 軌道 2-関手 $?/G: G\text{-Cat} \rightarrow G\text{-GrCat}$ の擬逆となる 2-関手 $? \# G: G\text{-GrCat} \rightarrow G\text{-Cat}$ を定義する. これにより, 被覆する方の圏を構成することができる [11, 7].

定義 1.24. $\mathcal{B}$ を G -次数圏とすると, $\mathcal{B}$ と G のスマッシュ積 $\mathcal{B} \# G$ という G -圏を次で定義する.

- $(\mathcal{B} \# G)_0 := \mathcal{B}_0 \times G = \{x^{(a)} := (x, a) \mid x \in \mathcal{B}, a \in G\}.$
- 各 $x^{(a)}, y^{(b)} \in (\mathcal{B} \# G)_0$ に対して,

$$\begin{aligned} (\mathcal{B} \# G)(x^{(a)}, y^{(b)}) &:= \{b\} \times \mathcal{B}^{b^{-1}a}(x, y) \times \{a\} \\ &= \{^{(b)}f^{(a)} := (b, f, a) \mid f \in \mathcal{B}^{b^{-1}a}(x, y)\}. \end{aligned}$$

混乱の恐れのないときには, これを第 2 射影

$$\text{pr}_2: (\mathcal{B} \# G)(x^{(a)}, y^{(b)}) \rightarrow \mathcal{B}^{b^{-1}a}(x, y), \quad ^{(b)}f^{(a)} \mapsto f$$

によって $\mathcal{B}^{b^{-1}a}(x, y)$ と同一視する.

- 各 $x^{(a)}, y^{(b)}, z^{(c)} \in (\mathcal{B} \# G)_0$ に対して, 合成を次の可換図式で定義する.

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{B} \# G)(y^{(b)}, z^{(c)}) \times (\mathcal{B} \# G)(x^{(a)}, y^{(b)}) & \longrightarrow & (\mathcal{B} \# G)(x^{(a)}, z^{(c)}) \\ \text{pr}_2 \times \text{pr}_2 \downarrow & & \downarrow \text{pr}_2 \\ \mathcal{B}^{c^{-1}b}(y, z) \times \mathcal{B}^{b^{-1}a}(x, y) & \longrightarrow & \mathcal{B}^{c^{-1}a}(x, z) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{B}(y, z) \times \mathcal{B}(x, y) & \longrightarrow & \mathcal{B}(x, z) \end{array}$$

ただし, 底辺の準同型は $\mathcal{B}$ の合成で与える. すなわち, 任意の $(g, f) \in \mathcal{B}^{c^{-1}b}(y, z) \times \mathcal{B}^{b^{-1}a}(x, y)$, $h \in \mathcal{B}^{c^{-1}a}(x, z)$ に対して, 次の同値が成り立つ.

$$(1-8) \quad ^{(c)}g^{(b)} \circ ^{(b)}f^{(a)} = ^{(c)}h^{(a)} \iff g \circ f = h$$

- $\mathcal{B} \# G$ への G -作用 $X := X^{\mathcal{B} \# G}$ を次で定義する.

$$(1-9) \quad \begin{cases} X(c)(x^{(a)}) := x^{(ca)} \\ X(c)(^{(b)}f^{(a)}) := ^{(cb)}f^{(ca)} \end{cases}$$

$(x^{(a)}, y^{(b)}) \in (\mathcal{B} \# G)_0, ^{(b)}f^{(a)} \in (\mathcal{B} \# G)(x^{(a)}, y^{(b)}), x, y \in \mathcal{B}_0, a, b, c \in G, f \in \mathcal{B}^{b^{-1}a}(x, y))$. 定義より, 明らかにこの作用は自由である.

定義 1.25. G -次数圏 $\mathcal{B}$ に対して関手 $Q_{\mathcal{B}, G} := Q: \mathcal{B} \# G \rightarrow \mathcal{B}$ を次で定義する.

- $Q(x^{(a)}) = x \quad (x^{(a)} \in \mathcal{B} \# G),$
- $Q(^{(b)}f^{(a)}) := f \quad (^{(b)}f^{(a)} \in (\mathcal{B} \# G)(x^{(a)}, y^{(b)})).$

命題 1.26. Q を上の通りとすると, $Q = QX(a)$ が成り立つ ($a \in G$). すなわち, Q は, 厳格な G -不変関手であり, $Q = (Q, 1): \mathcal{B}\#G \rightarrow \mathcal{B}$ は, G -被覆関手になる. したがって特に, $(P, \phi): \mathcal{B}\#G \rightarrow (\mathcal{B}\#G)/G$ を標準被覆関手とすると, あるただ1つの同値 $H: (\mathcal{B}\#G)/G \rightarrow \mathcal{B}$ によって $Q = H \circ (P, \phi)$ となる.

定義 1.27. スマッシュ積の構成を次のようにして2-関手に拡張する.

1-射について: $(H, r): \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$ を $G\text{-GrCat}$ の1-射とする. このとき, $G\text{-Cat}$ の1-射となる関手 $(H, r)\#G: \mathcal{B}\#G \rightarrow \mathcal{B}'\#G$ を次で定義する.

対象に対して. 各 $x^{(a)} \in \mathcal{B}\#G$ に対して,

$$((H, r)\#G)(x^{(a)}) := (Hx)^{(ar_x)}$$

とおく.

射に対して. 各 $f \in (\mathcal{B}\#G)(x^{(a)}, y^{(b)}) = \mathcal{B}^{b^{-1}a}(x, y)$ に対して, $H(f) \in \mathcal{B}'^{r_y^{-1}b^{-1}ar_x}(Hx, Hy) \cong (\mathcal{B}'\#G)((Hx)^{(ar_x)}, (Hy)^{(br_y)})$ であることに注意して,

$$((H, r)\#G)^{(b)}f^{(a)} := {}^{(br_y)}H(f)^{(ar_x)}$$

とおく.

容易に分かるように, $(H, r)\#G$ は厳格な G -同変関手である. したがって, $(H, r)\#G = ((H, r)\#G, 1): \mathcal{B}\#G \rightarrow \mathcal{B}'\#G$ は $G\text{-Cat}$ の1-射である.

2-射について: 次に $(H', r'): \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$ を $G\text{-GrCat}$ の1-射, $\theta: (H, r) \Rightarrow (H', r')$ を2-射とする. このとき $\theta\#G: (H, r)\#G \Rightarrow (H', r')\#G$ を

$$\begin{aligned} (\theta\#G)x^{(a)} &:= \theta x \in \mathcal{B}'^{r'_x^{-1}r_x}(Hx, H'x) \cong (\mathcal{B}'\#G)((Hx)^{(ar_x)}, (H'x)^{(ar'_x)}) \\ &= (\mathcal{B}'\#G)((H, r)\#G)(x^{(a)}), ((H', r')\#G)(x^{(a)}) \end{aligned}$$

で定義する ($x^{(a)} \in \mathcal{B}\#G$). 容易に確かめられるように, $\theta\#G$ は $G\text{-Cat}$ の2-射になっている.

補題 1.28. 以上の定義により, スマッシュ積の構成は2-関手

$$\#G: G\text{-GrCat} \rightarrow G\text{-Cat}.$$

に拡張される.

1h. 2 圏論的 Cohen-Montgomery 双対.

定理 1.29. 2-関手 $?/G$ と $\#G$ はともに2-同値である. これらは互いに他の2-擬逆になっている. したがって, 2-圏 $G\text{-Cat}$ と $G\text{-GrCat}$ は2-同値である. より詳しくいうと, 4つの2-自然変換

$$\begin{array}{ccc} G\text{-Cat} & \xrightarrow{?/G} & G\text{-GrCat} \\ \downarrow & \nearrow \scriptstyle ?\#G & \downarrow \\ 1_{G\text{-Cat}} & \begin{array}{c} \xrightarrow{\epsilon} \\ \xleftarrow{\epsilon'} \end{array} & \begin{array}{c} \xrightarrow{\omega'} \\ \xleftarrow{\omega} \end{array} 1_{G\text{-GrCat}} \\ \downarrow & \nwarrow & \downarrow \\ G\text{-Cat} & \xrightarrow{?/G} & G\text{-GrCat} \end{array}$$

が存在し、これらは以下の4つの関係式を満たして2-自然同値になる.

$$(1-10) \quad \varepsilon' \bullet \varepsilon \cong \mathbb{1}_{G\text{-Cat}},$$

$$(1-11) \quad \varepsilon \bullet \varepsilon' \cong \mathbb{1}_{(? \# G) \circ (?/G)},$$

$$(1-12) \quad \omega' \bullet \omega = \mathbb{1}_{G\text{-GrCat}},$$

$$(1-13) \quad \omega \bullet \omega' \cong \mathbb{1}_{(?/G) \circ (? \# G)},$$

さらに次が成り立つ.

- (1) ε'_C は厳格な G -同変関手 ($C \in G\text{-Cat}$), ω_B は厳格な次数保存関手である ($B \in G\text{-GrCat}$).
- (2) ε と ω' は厳格な2-自然変換である.
- (3) $(?/G, ? \# G, \varepsilon, \omega')$ は厳格な2-随伴系である.

2. 導来同値

以下, 導来同値を扱うので, 簡単のために $\mathbb{k}$ を体と仮定する.

2a. 傾け部分圏.

定義 2.1. $\mathbb{k}$ ベクトル空間全体のなす圏を $\mathbb{k}\text{-Mod}$ で表す. $\mathbb{k}$ -圏 $\mathcal{A}$ に対して, 反変 $\mathbb{k}$ -関手 $\mathcal{A} \rightarrow \mathbb{k}\text{-Mod}$ を右 $\mathcal{A}$ -加群とよび, それら全体のなすアーベル圏を $\text{Mod } \mathcal{A}$ で, その導来圏を $\mathcal{D}(\text{Mod } \mathcal{A})$ で表す. また $\text{Mod } \mathcal{A}$ の有限生成射影対象全体のなす充満部分圏を $\text{prj } \mathcal{A}$ で表し, その有界ホモトピー圏を $\mathcal{K}^b(\text{prj } \mathcal{A})$ で表す, $\mathcal{K}^b(\text{prj } \mathcal{A})$ の充満部分圏 $\mathcal{T}$ は次の条件を満たすとき, $\mathcal{A}$ に対する傾け部分圏とよばれる:

- $\mathcal{K}^b(\text{prj } X(i))(U, V[n]) = 0$, ($U, V \in \mathcal{T}_0, 0 \neq n \in \mathbb{Z}$);
- 直和と直和因子で閉じた $\mathcal{K}^b(\text{prj } X(i))$ の充満部分圏のうち, $\mathcal{T}$ を含む最も小さなものは $\mathcal{K}^b(\text{prj } X)$ に一致する.

$\mathbb{k}$ -圏 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ に対して, 導来圏 $\mathcal{D}(\text{Mod } \mathcal{A})$ と $\mathcal{D}(\text{Mod } \mathcal{B})$ が三角圏として同値であるとき, $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ は導来同値であるという.

定理 2.2 (Keller [17], Rickard [19]). $\mathbb{k}$ -圏 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ に対して次は同値である.

- (1) $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ は導来同値である.
- (2) $\mathcal{K}^b(\text{prj } \mathcal{A})$ と $\mathcal{K}^b(\text{prj } \mathcal{B})$ は三角圏として同値である.
- (3) $\mathcal{B}$ は $\mathcal{A}$ に対するある傾け部分圏と同値である.

2b. 軌道圏と導来同値.

補題 2.3. $G\text{-Cat}$ の1-射 $(F, \psi): \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ に対して, 次は同値である.

- (1) (F, ψ) は $G\text{-Cat}$ における同値1-射である.
- (2) F は圏の同値である.

アーベル $\mathbb{k}$ -小圏全体のなす2-圏 $\mathbb{k}\text{-Ab}$ の2-部分圏 $\mathbb{k}\text{-ModCat}$ を次で定義する:

$$\mathbb{k}\text{-ModCat}_0 := \{\text{Mod } \mathcal{C} \mid \mathcal{C} \in \mathbb{k}\text{-Cat}_0\},$$

$$\mathbb{k}\text{-ModCat}_1 := (\text{対象の間の関手で完全右随伴をもつもの全体}),$$

$$\mathbb{k}\text{-ModCat}_2 := (1\text{-射の間の自然変換全体}).$$

また, $\mathbb{k}\text{-Tri}$ を三角 $\mathbb{k}$ -小圏全体のなす2-圏とする. このとき, 対応

$$\mathcal{C} \mapsto \text{Mod } \mathcal{C} \mapsto \mathcal{D}(\text{Mod } \mathcal{C})$$

は, それぞれ自然に2-圏の間の擬関手

$$\mathbb{k}\text{-Cat} \xrightarrow{\text{Mod}} \mathbb{k}\text{-ModCat} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathbb{k}\text{-Tri}$$

に拡張できる． G から 2-圏 $\mathbf{C}$ への擬関手全体のなす 2-圏が自然に定義され，それを $\mathbf{Pfun}(G, \mathbf{C})$ で表す．

定理 2.4. $\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ を 2-圏, $V: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ を擬関手とすると，自明に定義される対応

$$\mathbf{Pfun}(\mathbf{B}, V): \mathbf{Pfun}(\mathbf{B}, \mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{Pfun}(\mathbf{B}, \mathbf{D})$$

は自然に擬関手に拡張される．

この定理を $\mathbf{B} = G, V := \mathcal{D} \circ \text{Mod}: \mathbf{k}\text{-Cat} \rightarrow \mathbf{k}\text{-Tri}$ に適用し， $G\text{-Cat} = \mathbf{Pfun}(G, \mathbf{k}\text{-Cat})$, $((\mathcal{C}, X) \leftrightarrow X)$ に注意すると，次が得られる．

命題 2.5. 対応 $(\mathcal{C}, X) \mapsto \mathcal{D}(\text{Mod}(\mathcal{C}, X)) := (\mathcal{D}(\text{Mod } \mathcal{C}), \mathcal{D}(\text{Mod } X))$, $(\mathcal{C} \in G\text{-Cat}_0)$ は擬関手

$$\mathcal{D}(\text{Mod}): G\text{-Cat} \rightarrow \mathbf{Pfun}(G, \mathbf{k}\text{-Tri})$$

に拡張される．

各 $(\mathcal{C}, X) \in G\text{-Cat}$ に対して， X は $\mathcal{K}^b(\text{prj } \mathcal{C})$ に自然な G -擬作用 $\mathcal{K}^b(\text{prj } X)$ を定義する．以下， $\mathcal{K}^b(\text{prj } \mathcal{C}) = \mathcal{K}^b(\text{prj } (\mathcal{C}, X)) = (\mathcal{K}^b(\text{prj } \mathcal{C}), \mathcal{K}^b(\text{prj } X))$ と見なす．

命題 2.6. 対応 $(\mathcal{C}, X) \mapsto \mathcal{K}^b(\text{prj } (\mathcal{C}, X))$, $(\mathcal{C} \in G\text{-Cat}_0)$ は自然に擬関手

$$\mathcal{K}^b(\text{prj}): G\text{-Cat} \rightarrow \mathbf{Pfun}(G, \mathbf{k}\text{-Tri})$$

に拡張される．

定義 2.7. $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, X)$ および $\mathcal{C}' = (\mathcal{C}', X')$ を $G\text{-Cat}$ の対象とする．

- (1) $\mathcal{D}(\text{Mod } \mathcal{C})$ と $\mathcal{D}(\text{Mod } \mathcal{C}')$ が 2-圏 $\mathbf{Pfun}(G, \mathbf{k}\text{-Tri})$ において同値であるとき， $\mathcal{C}$ と $\mathcal{C}'$ は導来同値であるという．
- (2) 擬 G -圏 $\mathcal{K}^b(\text{prj } (\mathcal{C}, X))$ の擬 G -部分圏 $\mathcal{T} = (\mathcal{T}, Y)$ は， $\mathcal{T}$ が $\mathcal{C}$ に対する傾け部分圏であるとき， $(\mathcal{C}, X)$ に対する傾け擬 G -部分圏であるという．

定理 2.8. $\mathcal{C}, \mathcal{C}' \in G\text{-Cat}_0$ に対して，次は同値である．

- (1) $\mathcal{C}$ と $\mathcal{C}'$ は導来同値である．
- (2) $\mathcal{K}^b(\text{prj } \mathcal{C})$ と $\mathcal{K}^b(\text{prj } \mathcal{C}')$ は $\mathbf{Pfun}(G, \mathbf{k}\text{-Tri})$ において同値である．
- (3) $\mathcal{C}'$ は， $\mathcal{C}$ に対するある傾け擬 G -部分圏 $(\mathcal{T}, Y)$ と G -同変同値であり，包含関手 $(\mathcal{T}, Y) \hookrightarrow \mathcal{K}^b(\text{prj } (\mathcal{C}, X))$ は G -同変関手に拡張される．

定理 2.9. 擬 G -圏 $\mathcal{C}$ と $\mathcal{C}'$ が導来同値ならば，それらの軌道圏 $\mathcal{C}/G$ と $\mathcal{C}'/G$ も導来同値である．

2c. スマッシュ積と導来同値. この節の内容は，まだ擬 G -圏での確認が済んでいないので，擬 G -圏の代わりに G -圏を扱うことにする．

定義 2.10. $\mathcal{A}$ を圏， $\mathcal{B}$ を G -次数圏とする．

- (1) $E, F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ を関手とする．自然変換 $\varepsilon: E \Rightarrow F$ が斉次であるとは，すべての $x \in \mathcal{A}_0$ に対して， $\varepsilon_x: Ex \rightarrow Fx$ が $\mathcal{B}$ において斉次であることである．
- (2) $\mathcal{S}$ を $\mathcal{B}_0$ の部分クラス， $\mathcal{B}'$ を $\mathcal{B}'_0 = \mathcal{S}$ を満たす $\mathcal{B}$ の充満部分圏とする．このとき $\mathcal{S}$ (あるいは $\mathcal{B}'$) が $\mathcal{B}$ のなかで斉次稠密であるとは，各 $x \in \mathcal{B}_0$ に対してある $x' \in \mathcal{S}$ と斉次同型 $x \rightarrow x'$ がとれることである．
- (3) 関手 $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ が斉次稠密であるとは，対象のクラス $F(\mathcal{A}_0)$ が $\mathcal{B}$ のなかで斉次稠密であることである．

例 2.11. $\mathcal{B}$ を G -次数圏とする. すべての $x \in \mathcal{B}_0$ に対して $\mathcal{B}(x, x)$ が局所 $\mathbb{k}$ -多元環であれば, $\mathcal{B}$ のすべての稠密充満部分圏は斉次稠密である.

定理 2.12. $G\text{-GrCat}$ における次数保存関手 $(H, r): \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ に対して次は同値である.

- (1) (H, r) は $G\text{-GrCat}$ における同値である.
- (2) $H: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ は圏同値であり, I をその左随伴としての擬逆とすると, 単位射 $\eta: \mathbb{1}_{\mathcal{B}} \Rightarrow HI$ も余単位射 $\varepsilon: IH \Rightarrow \mathbb{1}_{\mathcal{A}}$ もともに斉次自然同型である.
- (3) H は充満忠実かつ斉次稠密である (すなわち, 斉次稠密同値である).

定義 2.13. $\mathcal{B}$ を G -次数圏とする.

- (1) $\mathcal{B}$ -加群の複体 $X^\bullet = (X^n, d_X^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ が G -次数付きであるとは, 各 $n \in \mathbb{Z}$ に対して, $X^n = (X^n, W_{X^n})$ ($W_{X^n}: X^n = \bigoplus_{a \in G} X_a^n$ は $\mathbb{k}$ -加群としての直和分解) が G -次数 $\mathcal{B}$ -加群であり, $d_X^n: X^n \rightarrow X^{n+1}$ が G -次数保存準同型である (すなわち, $d_X^n(X_a^n) \subseteq X_a^{n+1}$ ($a \in G$) となる) ことである.
- (2) 有界複体の圏 $\mathcal{C}^b(\text{prj } \mathcal{B})$ における射 $f^\bullet: X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ が G -次数保存射であるとは, すべての $n \in \mathbb{Z}$ に対して $f^\bullet$ の成分写像 $f^n: X^n \rightarrow Y^n$ が G -次数保存準同型であることである.
- (3) G -次数付き複体と G -次数保存射のなす圏を $\mathcal{C}^b(\text{prj } \mathcal{B})_G$ で表す.
- (4) G -次数保存射で定義されるホモトピー関係で $\mathcal{C}^b(\text{prj } \mathcal{B})_G$ を割って得られる剰余圏を $\mathcal{K}^b(\text{prj } \mathcal{B})_G$ で表す. また, 忘却関手 $\mathcal{K}^b(\text{prj } \mathcal{B})_G \rightarrow \mathcal{K}^b(\text{prj } \mathcal{B})$, $(X^n, W_{X^n}, d_X^n)_n \mapsto (X^n, d_X^n)_n$ を Fgt で表す.
- (5) 複体 $X^\bullet \in \mathcal{K}^b(\text{prj } \mathcal{B})_0$ が G -次数付け可能であるとは, ある $Y^\bullet \in \mathcal{K}^b(\text{prj } \mathcal{B})_G$ によって $X^\bullet \cong \text{Fgt}(Y^\bullet)$ ($\mathcal{K}^b(\text{prj } \mathcal{B})$ において) となることである.

定理 2.14 ([3]). $\mathcal{C}$ を G -圏とし $P: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}/G$ を標準被覆関手とする. このとき押し下げ関手 $P_*: \mathcal{K}^b(\text{prj } \mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{K}^b(\text{prj } \mathcal{C}/G)$ は Fgt とある同値 P'_* の合成として書ける:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K}^b(\text{prj } \mathcal{C}) & \xrightarrow{P_*} & \mathcal{K}^b(\text{prj } \mathcal{C}/G). \\ & \searrow P'_* & \nearrow \text{Fgt} \\ & \mathcal{K}^b(\text{prj } \mathcal{C}/G)_G & \end{array}$$

$\mathcal{B}$ を G -次数圏とすると, 標準 G -被覆関手 $Q: \mathcal{B} \# G \rightarrow \mathcal{B}$ は, 標準被覆関手 $\mathcal{B} \# G \rightarrow (\mathcal{B} \# G)/G$ と次数保存同値 $\omega'_B = (\omega'_B, r_B): (\mathcal{B} \# G)/G \rightarrow \mathcal{B}$, (これは $G\text{-GrCat}$ における同値でもある) との合成になる. このことを用いて次が得られる.

系 2.15. $\mathcal{B}$ を G -次数圏, $Q: \mathcal{B} \# G \rightarrow \mathcal{B}$ を標準被覆関手とする. このとき, 押し下げ関手 $Q_*: \mathcal{K}^b(\text{prj } \mathcal{B} \# G) \rightarrow \mathcal{K}^b(\text{prj } \mathcal{B})$ は Fgt と同値 Q'_* の合成として書ける:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K}^b(\text{prj } \mathcal{B} \# G) & \xrightarrow{Q_*} & \mathcal{K}^b(\text{prj } \mathcal{B}). \\ & \searrow Q'_* & \nearrow \text{Fgt} \\ & \mathcal{K}^b(\text{prj } \mathcal{B})_G & \end{array}$$

上のことから直ちに次が得られる.

系 2.16. 上の設定において, $\mathcal{P}$ を $\mathcal{K}^b(\text{prj } \mathcal{B})$ の G -次数付け可能複体からなるある集合とし, $\{U^\bullet \in \mathcal{K}^b(\text{prj } \mathcal{B} \# G)_0 \mid Q_\bullet(U^\bullet) \cong X^\bullet (\exists X^\bullet \in \mathcal{P}_0)\}$ を対象の全体とする $\mathcal{K}^b(\text{prj } \mathcal{B} \# G)$ の充満部分圏を $\mathcal{U}_{\mathcal{P}}$ とする. すると, 押し下げ関手 $Q_\bullet$ の制限は, G -被覆関手 $Q_\bullet|_{\mathcal{U}_{\mathcal{P}}}: \mathcal{U}_{\mathcal{P}} \rightarrow \mathcal{P}$ を与える.

注意 2.17. 条件 $Q_\bullet(L(X^\bullet)) \cong X^\bullet$ ($X^\bullet \in \mathcal{P}_0$) を満たす写像 $L: \mathcal{P}_0 \rightarrow (\mathcal{U}_{\mathcal{P}})_0$ を $\mathcal{P}$ 上の $Q_\bullet$ の切断とよぶことにする. $\mathcal{K}^b(\text{prj } \mathcal{B} \# G)$ の G -作用を Y とおき, L を $\mathcal{P}$ 上の $Q_\bullet$ の 1 つの切断とする. すると, 被覆関手 $Q_\bullet|_{\mathcal{U}_{\mathcal{P}}}$ と切断 L によって次のように $\mathcal{P}$ に G -次数を定義することができる. 各 $X^\bullet, Y^\bullet \in \mathcal{P}$ に対して, $Q_\bullet$ は自然な同型

$$Q_\bullet^{(1)}: \coprod_{a \in G} \mathcal{U}(Y(a)L(X^\bullet), L(Y^\bullet)) \rightarrow \mathcal{P}(X^\bullet, Y^\bullet)$$

を導くが, これを用いて直和分解 $(V_L)_{X^\bullet, Y^\bullet}: \mathcal{P}(X^\bullet, Y^\bullet) = \bigoplus_{a \in G} \mathcal{P}^a(X^\bullet, Y^\bullet)$ を

$$\mathcal{P}^a(X^\bullet, Y^\bullet) := Q_\bullet^{(1)}(\mathcal{U}(Y(a)L(X^\bullet), L(Y^\bullet)))$$

とおくことによって定義する. すると, $(\mathcal{P}, V_L)$ は G -次数圏になる.

定理 2.8 における (1) と (3) の同値に注目し, その類似から次のように定義する.

定義 2.18. $\mathcal{B} = (\mathcal{B}, W)$ と $\mathcal{B}' = (\mathcal{B}', W')$ を G -次数圏とする. G -次数付け可能複体からなる $\mathcal{K}^b(\text{prj } \mathcal{B})$ のある傾け部分圏 $\mathcal{P}$ と $\mathcal{P}$ 上の $Q_\bullet$ のある切断 L をとると, $(\mathcal{B}', W')$ と $(\mathcal{P}, V_L)$ が $G\text{-GrCat}$ において同値となり, 包含関手 $(\mathcal{P}, V_L) \hookrightarrow \mathcal{K}^b(\text{prj } \mathcal{B})$ が次数保存関手に拡張されるとき, $(\mathcal{B}, W)$ と $(\mathcal{B}', W')$ は G -次数圏として導来同値であるという.

定理 2.19. $(\mathcal{B}, W)$ と $(\mathcal{B}', W')$ が G -次数圏として導来同値であれば, スマッシュ積 $\mathcal{B} \# G$ と $\mathcal{B}' \# G$ は導来同値になる.

定義 2.20. $(F, \psi): \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$ を G -圏 $\mathcal{C}$ から G -次数圏 $\mathcal{B}$ への G -被覆とする. このとき (F, ψ) は標準被覆関手 $(P, \phi): \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}/G$ と, ただ 1 つの同値 $H: \mathcal{C}/G \rightarrow \mathcal{B}$ との合成となっているが, この H が次数保存関手に拡張できるとき, (F, ψ) は次数保存関手を導くという.

定理 2.21. $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, X)$ と $\mathcal{C}' = (\mathcal{C}', X')$ を G -圏, $\mathcal{B} = (\mathcal{B}, W)$ と $\mathcal{B}' = (\mathcal{B}', W')$ を G -次数圏, $(F, \psi): \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$ と $(F', \psi'): \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{B}'$ を次数保存関手を導く G -被覆とする. このとき, 次は同値である.

- (1) $(\mathcal{C}, X)$ と $(\mathcal{C}', X')$ は G -圏として導来同値である.
- (2) $(\mathcal{B}, W)$ と $(\mathcal{B}', W')$ は G -次数圏として導来同値である.

3. 小圏の余弱作用への一般化

以上の話において, 群 G を小圏 I におきかえ, 擬関手 $X: G \rightarrow \mathbb{k}\text{-Cat}$ の代わりに余弱関手 $X: I \rightarrow \mathbb{k}\text{-Cat}$ におきかえてもかなりのことが成り立つ. その際, 軌道圏構成 $\mathcal{C} \mapsto \mathcal{C}/G$ は Grothendieck 構成 $X \mapsto \text{Gr}(X)$ に置き換わり [16], G -次数圏は, I -次数圏に拡張され, G -次数圏のスマッシュ積 $\mathcal{B} \# G$ も, I -次数圏のスマッシュ積 $\mathcal{B} \# I$ に拡張される. ただし, 定理 1.29 のように, 2-圏としての同値を主張するときは, 余弱関手ではなく擬関手 $I \rightarrow \mathbb{k}\text{-Cat}$ をとる必要がある. 余弱関手 $X, X': I \rightarrow \mathbb{k}\text{-Cat}$ の導来同値性は定義 2.7 を拡張して定義される. 1 つだけ定理を挙げておく.

定理 3.1. $X, X': I \rightarrow \mathbb{k}\text{-Cat}$ を余弱関手とする. X と X' が導来同値であれば, $\text{Gr}(X)$ と $\text{Gr}(X')$ は導来同値になる.

余弱関手 $X: I \rightarrow \mathbb{k}\text{-Cat}$ は, I の各対象 i を $\mathbb{k}$ -圏 $X(i)$ に対応させ, I の各射 $a: i \rightarrow j$ を $\mathbb{k}$ -関手 $X(a): X(i) \rightarrow X(j)$ に対応させる. このとき, $\text{Gr}(X)$ は全部の $X(i)$ を $X(a)$ で “貼り合わせた” $\mathbb{k}$ -圏となる. X と X' の導来同値は, 各 $X(i)$ と $X'(i)$ の導来同値に “ I -同変性” を入れたものになる. したがって, 上の定理は, $X(i)$ と $X'(i)$ の間の導来同値の全体が I -同変性をもつとき, それらを貼り合わせて $\text{Gr}(X)$ と $\text{Gr}(X')$ の間の導来同値を作ることができる, ということを意味する. 例を 1 つ挙げておく.

例 3.2. n を 3 以上の正整数とし, I をクイバー $Q := 2 \xrightarrow{a_2} 3 \xrightarrow{a_3} \dots \xrightarrow{a_{n-1}} n$ で定義される自由圏とする. 関手 $X, X': I \rightarrow \mathbb{k}\text{-Cat}$ を次で定義する.

各 $i \in I_0 = \{2, \dots, n\}$ に対して $X(i)$ をクイバー

$$1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha_1} \\ \xleftarrow{\beta_1} \end{array} 2 \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha_2} \\ \xleftarrow{\beta_2} \end{array} 3 \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha_3} \\ \xleftarrow{\beta_3} \end{array} \dots \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha_{i-1}} \\ \xleftarrow{\beta_{i-1}} \end{array} i$$

で定義される Brauer 樹木多元環 (を $\mathbb{k}$ -圏と見たもの) とする. また I の各矢 $a_i: i \rightarrow i+1$ に対して, $X(a_i): X(i) \rightarrow X(i+1)$ を包含関手とする. これにより関手 $X: I \rightarrow \mathbb{k}\text{-Cat}$ が定義される.

各 $i \in I_0 = \{2, \dots, n\}$ に対して, $X'(i)$ をクイバー

$$1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\gamma_1} \\ \xleftarrow{\gamma_i} \end{array} 2 \xrightarrow{\gamma_2} 3 \xrightarrow{\gamma_3} \dots \xrightarrow{\gamma_{i-1}} i$$

で定義される Brauer 樹木多元環 (を $\mathbb{k}$ -圏と見たもの) とする. 各矢 $a_i: i \rightarrow i+1$ に対して, $X(a_i): X(i) \rightarrow X(i+1)$ を対応 $1 \mapsto 1, j \mapsto j+1, \alpha_1 \mapsto \alpha_2\alpha_1, \alpha_j \mapsto \alpha_{j+1}$ ($j = 2, \dots, i$) で定義される関手とする. これにより関手 $X': I \rightarrow \mathbb{k}\text{-Cat}$ が定義される. 各 i について $X(i)$ と $X'(i)$ の間の標準的な導来同値は X と X の間の導来同値に拡張される. したがって上の定理により, これらの導来同値は貼り合わせて, $\text{Gr}(X)$ と $\text{Gr}(X')$ の間の導来同値を与えることができる. 例えば $n = 5$ のときこれらのクイバーは次のようになる.

$$\text{Gr}(X) = \begin{array}{ccccccc} & & \alpha_1 & & & & \\ & & \curvearrowright & & & & \\ 1 & & & 2 & & & \\ & & \beta_1 & & & & \\ & & \downarrow & & & & \\ & & \alpha_1 & & \alpha_2 & & \\ & & \curvearrowright & & \curvearrowright & & \\ 1 & & & 2 & & 3 & \\ & & \beta_1 & & \beta_2 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & \alpha_1 & & \alpha_2 & & \alpha_3 \\ & & \curvearrowright & & \curvearrowright & & \curvearrowright \\ 1 & & & 2 & & 3 & & 4 \\ & & \beta_1 & & \beta_2 & & \beta_3 & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ & & \alpha_1 & & \alpha_2 & & \alpha_3 & \alpha_4 \\ & & \curvearrowright & & \curvearrowright & & \curvearrowright & \curvearrowright \\ 1 & & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 \\ & & \beta_1 & & \beta_2 & & \beta_3 & & \beta_4 & \end{array}, \quad \text{Gr}(X') = \begin{array}{ccccccc} & & \gamma_1 & & & & \\ & & \curvearrowright & & & & \\ 1 & & & 2 & & & \\ & & \gamma_2 & & & & \\ & & \downarrow & & & & \\ & & \gamma_1 & & \gamma_2 & & \\ & & \curvearrowright & & \curvearrowright & & \\ 1 & & & 2 & & 3 & & 4 \\ & & \gamma_3 & & \gamma_4 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ & & \gamma_1 & & \gamma_2 & & \gamma_3 & \gamma_4 \\ & & \curvearrowright & & \curvearrowright & & \curvearrowright & \curvearrowright \\ 1 & & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 \\ & & \gamma_4 & & \gamma_5 & & & & \end{array}$$

関係式は [8] を用いて計算できる.

参考文献

- [1] Asashiba, H.: *A covering technique for derived equivalence*, J. Alg., **191** (1997), 382–415.
- [2] Asashiba, H.: *The derived equivalence classification of representation-finite selfinjective algebras*, J. Alg., **214** (1999), 182–221.
- [3] Asashiba, H.: *A generalization of Gabriel’s Galois covering functors and derived equivalences*, J. Algebra **334** (2011), 109–149.
- [4] Asashiba, Hideto: *A generalization of Gabriel’s Galois covering functors II: 2-categorical Cohen-Montgomery duality*, Applied categorical Structures **25** (2017) no.8, 3278–3296.
- [5] Asashiba, H.: *Derived equivalences of actions of a category*, Appl. Categor. Struct. **21**(6) (2013), 811–836, DOI 10.1007/s10485-012-9284-5.
- [6] Asashiba, H.: *Gluing derived equivalences together*, Adv. Math. **235** (2013), 134–160.
- [7] Asashiba, Hideto: *Smash products of group weighted bound quivers and Brauer graphs*, to appear in Comm. Algebra, arXiv: arXiv:1709.09289.
- [8] Asashiba, H. and Kimura, M.: *Presentations of Grothendieck constructions*, Comm. in Alg., (arXiv:1111.3845).
- [9] Bongartz, K. and Gabriel, P.: *Covering spaces in representation theory*, Invent. Math. **65**, 1982, 331–378.
- [10] Chen, J., Chen, X. and Ruan, S.: *The dual actions, autoequivalences and stable tilting objects*, preprint, arXiv:1708.08222.
- [11] Cibils, C. and Marcos, E.: *Skew category, Galois covering and smash product of a k -category*, Proc. Amer. Math. Soc. **134** (1), (2006), 39–50.
- [12] Deligne, P.: *Action du groupe des tresses sur une catégorie*, Invent. Math. **128** (1997), 159–175.
- [13] Drinfeld, V., Gelaki, S., Nikshych, D., and Ostrik, V.: *On braided fusion categories, I*, Sel. Math. New Ser. **16** (2010), 1–119.
- [14] Gabriel, P.: *The universal cover of a representation-finite algebra*, in Lecture Notes in Mathematics, Vol. **903**, Springer-Verlag, Berlin/New York (1981), 68–105.
- [15] Green, E. L.: *Graphs with relations, coverings and group-graded algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **279**(1), 1983, 297–310.
- [16] Grothendieck, A.: *Revêtements étales et groupe fondamental*, Springer-Verlag, Berlin, 1971. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1960–1961 (SGA 1), Lecture Notes in Mathematics, Vol. **224**.
- [17] Keller, B.: *Deriving DG categories*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4^e série, t. **27**, 1994, 63–102.
- [18] Kelly, G. M. and Street, R.: *Review of the Elements of 2-Categories*, Lecture Notes in Mathematics, **420**, Springer-Verlag (1974), 75–103.
- [19] Rickard, J.: *Morita theory for derived categories*, J. London Math. Soc., **39** 1989, 436–456.
- [20] Ch. Riedtmann: *Algebren, Darstellungsköcher, Überlagerungen und zurück*, Comm. Math. Helv. **55** (1980), 199–224.