

Schur 多重ゼータ関数について

山崎 義徳 (愛媛大学)*

1. はじめに

現在, 多重ゼータ関数と呼ばれる多変数複素関数, および, その正の整数点における特殊値である多重ゼータ値が, 数学や数理論理における様々な分野との関連から非常に活発に研究されている. ただし, 多重ゼータ関数にもいろいろと種類があるが, ここでは多重ゼータ関数といったら以下で定義される 2 種類の関数を意味するものとする.

$$\zeta(\mathbf{s}) = \sum_{1 \leq m_1 < \dots < m_n} \frac{1}{m_1^{s_1} \dots m_n^{s_n}}, \quad \zeta^*(\mathbf{s}) = \sum_{1 \leq m_1 \leq \dots \leq m_n} \frac{1}{m_1^{s_1} \dots m_n^{s_n}}.$$

ここで $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{C}^n$ であり, これらの級数は $\operatorname{Re}(s_1), \dots, \operatorname{Re}(s_{n-1}) \geq 1$ かつ $\operatorname{Re}(s_n) > 1$ のとき絶対収束する. $\zeta(\mathbf{s}), \zeta^*(\mathbf{s})$ は Euler-Zagier 型多重ゼータ関数と呼ばれ, いずれも Riemann ゼータ関数 $\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s}$ の一般化である. 以下, 区別のため, 前者を等号なし多重ゼータ関数 (または単に多重ゼータ関数), 後者を等号付き多重ゼータ関数と呼ぶ. 後者はしばしば多重ゼータスター関数とも呼ばれる.

表題にある Schur 多重ゼータ関数とは, $\zeta(\mathbf{s})$ と $\zeta^*(\mathbf{s})$ を組合せ論的に補間するゼータ関数であり, 対称関数の親玉的な存在である Schur 関数の類似物として定義される. この関数について, 数論的・組合せ論的性質を紹介することが本講演の目的である. 結果の詳しい証明等については [2, 9] をご覧いただきたい.

2. 定義と基本的な性質

まずは Schur 多重ゼータ関数の定義を与える. 一言で言えば, Schur 多重ゼータ関数は Schur 関数のタブロー表示の類似として定義される.

$\mu \subset \lambda$ を満たす分割 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p), \mu = (\mu_1, \dots, \mu_q)$ の組を λ/μ と書く (μ が空分割 $\emptyset$ の場合, $\lambda/\mu = \lambda/\emptyset$ を単に λ と書く). $\mathbf{s} = (s_{i,j}) \in T(\lambda/\mu, \mathbb{C})$ に対して, 型が λ/μ の Schur 多重ゼータ関数を次の級数で定義する.

$$\zeta(\mathbf{s}) = \zeta_{\lambda/\mu}(\mathbf{s}) = \sum_{(m_{i,j}) \in \operatorname{SSYT}(\lambda/\mu)} \prod_{(i,j) \in D(\lambda/\mu)} \frac{1}{m_{i,j}^{s_{i,j}}}.$$

ここで, $D(\lambda/\mu) = \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 \mid \mu_i < j \leq \lambda_i \ (1 \leq i \leq p)\}$ は λ/μ の Young 図形であり, $T(\lambda/\mu, X)$ (ただし X は集合) は X の元を成分とする型が λ/μ の Young 盤全体のなす集合である. また Young 盤 $(m_{i,j}) \in T(\lambda/\mu, \mathbb{N})$ は任意の i, j に対して $m_{i,j} \leq m_{i,j+1}$ かつ $m_{i,j} < m_{i+1,j}$ を満たすとき半標準 Young 盤と言われ, 型が λ/μ の半標準 Young 盤全体のなす集合を $\operatorname{SSYT}(\lambda/\mu)$ と書く. この級数の収束については次が基本的である: $\operatorname{Cor}(\lambda/\mu) \subset D(\lambda/\mu)$ を λ/μ の角 (行と列の両方の終端) 全体のなす集合とし,

$$W_{\lambda/\mu} = \left\{ (s_{i,j}) \in T(\lambda/\mu, \mathbb{C}) \left| \begin{array}{l} \operatorname{Re}(s_{i,j}) \geq 1 \ ((i, j) \notin \operatorname{Cor}(\lambda/\mu)) \\ \operatorname{Re}(s_{i,j}) > 1 \ ((i, j) \in \operatorname{Cor}(\lambda/\mu)) \end{array} \right. \right\}$$

本研究は科研費 (課題番号:18K03242) の助成を受けたものである.

2010 Mathematics Subject Classification: 11M41, 05E05

キーワード: 多重ゼータ関数, Schur 関数, Jacobi-Trudi 公式

* 〒790-8577 松山市文京町 2-5 愛媛大学 大学院理工学研究科

e-mail: yamasaki.yoshinori.mh@ehime-u.ac.jp

とすると、上の級数は $\mathbf{s} \in W_{\lambda/\mu}$ のとき絶対収束する ([9, Lemma 2.1]).

例えば $\lambda/\mu = (4, 4, 3)/(3, 1)$ のとき、

$$\zeta \left(\begin{array}{ccc|c} & & & s_{1,4} \\ & s_{2,2} & s_{2,3} & s_{2,4} \\ s_{3,1} & s_{3,2} & s_{3,3} & \end{array} \right) = \sum_{\substack{m_{1,4} \\ m_{2,2} \leq m_{2,3} \leq m_{2,4} \\ m_{3,1} \leq m_{3,2} \leq m_{3,3}}} \frac{1}{m_{1,4}^{s_{1,4}} \cdot m_{2,2}^{s_{2,2}} m_{2,3}^{s_{2,3}} m_{2,4}^{s_{2,4}} \cdot m_{3,1}^{s_{3,1}} m_{3,2}^{s_{3,2}} m_{3,3}^{s_{3,3}}}$$

であり、 $(\text{Cor}((4, 4, 3)/(3, 1)) = \{(2, 4), (3, 3)\}$ なので) この級数は $\text{Re}(s_{1,4}), \text{Re}(s_{2,2}), \text{Re}(s_{2,3}), \text{Re}(s_{3,1}), \text{Re}(s_{3,2}) \geq 1$ かつ $\text{Re}(s_{2,4}), \text{Re}(s_{3,3}) > 1$ のとき絶対収束する。

2.1. ζ と ζ^* の補間として

Schur 多重ゼータ関数は等号なし多重ゼータ関数、等号付き多重ゼータ関数を次の意味で補間する:

$$\zeta(s_1, \dots, s_n) = \zeta_{(1^n)} \left(\begin{array}{c} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{array} \right), \quad \zeta^*(s_1, \dots, s_n) = \zeta_{(n)} \left(\begin{array}{c|c|c} s_1 & \cdots & s_n \end{array} \right).$$

一方で、定義からわかるように、Schur 多重ゼータ関数はそれぞれ等号なし多重ゼータ関数、等号付き多重ゼータ関数の整数係数の一次結合として書くことができる (この意味で、これは新しい関数ではない)。例えば $\lambda = (2, 1)$ のとき、

$$\begin{aligned} \zeta \left(\begin{array}{c|c} s_{1,1} & s_{1,2} \\ \hline s_{2,1} \end{array} \right) &= \sum_{\substack{m_{1,1} \leq m_{1,2} \\ m_{2,1}}} \frac{1}{m_{1,1}^{s_{1,1}} m_{1,2}^{s_{1,2}} \cdot m_{2,1}^{s_{2,1}}} \\ &= \zeta(s_{1,1}, s_{1,2}, s_{2,1}) + \zeta(s_{1,1}, s_{2,1}, s_{1,2}) + \zeta(s_{1,1}, s_{1,2} + s_{2,1}) + \zeta(s_{1,1} + s_{1,2}, s_{2,1}) \\ &= \zeta^*(s_{1,1}, s_{1,2}, s_{2,1}) + \zeta^*(s_{1,1}, s_{2,1}, s_{1,2}) - \zeta^*(s_{1,1}, s_{1,2} + s_{2,1}) - \zeta^*(s_{1,1} + s_{2,1}, s_{1,2}). \end{aligned}$$

等号なし多重ゼータ関数、等号付き多重ゼータ関数を補間する関数は Schur 多重ゼータ関数だけに限らない。例えば Yamamoto [12] によって導入された t -補間多重ゼータ関数とその例として挙げられる。また、最近 Bachmann [1] によって、 ζ_λ と $\zeta_{\lambda'}$ (ただし λ' は λ の転置) を t -補間する多重ゼータ関数も導入されている。

2.2. 対称関数との関係

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots)$ を変数とする。次で定義される形式的べき級数を λ/μ に付随する (歪) Schur 関数という。

$$s_{\lambda/\mu} = s_{\lambda/\mu}(\mathbf{x}) = \sum_{(m_{i,j}) \in \text{SSYT}(\lambda/\mu)} \prod_{(i,j) \in D(\lambda/\mu)} x_{m_{i,j}}.$$

Schur 関数は対称関数であることが知られている (対称関数については [6] を参照のこと)。明らかに、Schur 多重ゼータ関数は Schur 関数の類似物である。さらに、 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して基本対称関数、完全対称関数がそれぞれ

$$e_n = e_n(\mathbf{x}) = \sum_{1 \leq m_1 < \cdots < m_n} x_{m_1} \cdots x_{m_n}, \quad h_n = h_n(\mathbf{x}) = \sum_{1 \leq m_1 \leq \cdots \leq m_n} x_{m_1} \cdots x_{m_n}$$

で定義されるが, $e_n = s_{(1^n)}$, $h_n = s_{(n)}$ なので, 上記を踏まえれば等号なし多重ゼータ関数, 等号付き多重ゼータ関数はそれぞれ基本対称関数, 完全対称関数の類似物とみることができる. Schur 多重ゼータ関数の研究はこの観察から始まった [13]. また, 上とは別の重要な対称関数のクラスにべき和対称関数

$$p_n = p_n(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^n$$

があるが, これは変数を n 倍した Riemann ゼータ関数に対応する.

Schur 多重ゼータ関数は, 一般には Schur 関数の特殊化として得ることはできない. しかし, 特別な変数に対しては特殊化になっている場合がある. 実際, $s \in \mathbb{C}$ に対して, (i, j) 成分がすべて s である Young 盤を $\{s\}^{\lambda/\mu} \in T(\lambda/\mu, \mathbb{C})$ と書くと, 定義より $\operatorname{Re}(s) > 1$ において次が成り立つ.

$$\zeta(\{s\}^{\lambda/\mu}) = s_{\lambda/\mu}(1^{-s}, 2^{-s}, \dots).$$

このように見ることで, 例えば次がただちにわかる.

命題 2.1. $\zeta(\{s\}^{\lambda/\mu})$ は $\prod_{i=1}^r \zeta(\nu_i s)$ (ただし $(\nu_1, \dots, \nu_r)$ は $|\lambda/\mu|$ の分割) たちの有理数係数の一次結合で書ける. 特に, $k \in \mathbb{N}$ に対して, $\zeta(\{2k\}^{\lambda/\mu}) \in \mathbb{Q}\pi^{2k|\lambda/\mu|}$.

$\zeta(\{2k\}^{\lambda/\mu})$ の有理数部分については, 特別な場合に組合せ論的な記述が可能である. 型が λ/μ の標準 Young 盤の個数を $f^{\lambda/\mu}$ と書く. ここで半標準 Young 盤 $(m_{i,j}) \in \text{SSYT}(\lambda/\mu)$ は $\{m_{i,j} \mid (i, j) \in D(\lambda/\mu)\} = \{1, 2, \dots, |\lambda/\mu|\}$ のとき標準 Young 盤と呼ばれる. $f^{\lambda/\mu}$ は対称群の表現の次元などにも現れる重要な組合せ論的量である. Stanley [10, Theorem 3.7] によって以下が得られた: $m \geq \lambda_1$ を満たす任意の整数 m に対して,

$$\begin{aligned}\zeta(\{2\}^{\lambda/\mu}) &= \frac{f^{(2\lambda' + \gamma_m + \delta_{m-1})/(2\mu' + \delta_{m-1})}}{(2n + m)!} \pi^{2n}, \\ \zeta(\{4\}^{\lambda/\mu}) &= \frac{2^{m+2n} f^{(4\lambda' + 2\gamma_m + 3\delta_{m-1})/(4\mu' + 3\delta_{m-1})}}{(4n + 2m)!} \pi^{4n}, \\ \zeta(\{6\}^{\lambda/\mu}) &= \frac{6^m 2^{6n} f^{(6\lambda' + 3\gamma_m + 5\delta_{m-1})/(6\mu' + 5\delta_{m-1})}}{(6n + 3m)!} \pi^{6n}.\end{aligned}$$

ここで $|\lambda/\mu| = n$, $\gamma_m = (1^m)$, $\delta_m = (m, m-1, \dots, 2, 1)$ である.

例 2.2. $\lambda/\mu = (3, 2)/(1)$ のとき, $s_{(3,2)/(1)}$ は 4 次の対称関数なので, 4 次対称関数環の基底である $p_4, p_3 p_1, p_2^2, p_2 p_1^2, p_1^4$ の有理数係数の一次結合で書ける:

$$s_{(3,2)/(1)} = -\frac{1}{4}p_4 - \frac{1}{3}p_3 p_1 + \frac{1}{8}p_2^2 + \frac{1}{4}p_2 p_1^2 + \frac{5}{24}p_1^4.$$

よって, 特殊化 $\mathbf{x} = (1^{-s}, 2^{-s}, \dots)$ により

$$\begin{aligned}\zeta\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline & s & s \\ \hline s & s & \\ \hline \end{array}\right) &= s_{(3,2)/(1)}(1^{-s}, 2^{-s}, \dots) \\ &= -\frac{1}{4}\zeta(4s) - \frac{1}{3}\zeta(3s)\zeta(s) + \frac{1}{8}\zeta(2s)^2 + \frac{1}{4}\zeta(2s)\zeta(s)^2 + \frac{5}{24}\zeta(s)^4\end{aligned}$$

を得る. これより, 例えば $s = 2, 4, 6$ とすると,

$$\begin{aligned}\zeta\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline & 2 & 2 \\ \hline 2 & 2 & \\ \hline \end{array}\right) &= \frac{61}{362880}\pi^8, \\ \zeta\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline & 4 & 4 \\ \hline 4 & 4 & \\ \hline \end{array}\right) &= \frac{667}{631547280000}\pi^{16}, \\ \zeta\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline & 6 & 6 \\ \hline 6 & 6 & \\ \hline \end{array}\right) &= \frac{9077644}{432684797065192546875}\pi^{24}\end{aligned}$$

が得られる. 一方で, Stanley の公式を $m = \lambda_1 = 3$ として用いれば,

$$\begin{aligned}\zeta\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline & 2 & 2 \\ \hline 2 & 2 & \\ \hline \end{array}\right) &= \frac{f^{(7,6,3)/(4,1)}}{11!}\pi^8, \\ \zeta\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline & 4 & 4 \\ \hline 4 & 4 & \\ \hline \end{array}\right) &= \frac{2^{11}f^{(16,13,6)/(10,3)}}{22!}\pi^{16}, \\ \zeta\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline & 6 & 6 \\ \hline 6 & 6 & \\ \hline \end{array}\right) &= \frac{6^3 2^{24}f^{(25,20,9)/(16,5)}}{33!}\pi^{24}\end{aligned}$$

を得る. これと上の表示とを比較することで, 次が得られる.

$$\begin{aligned}f^{(7,6,3)/(4,1)} &= 6710, \\ f^{(16,13,6)/(10,3)} &= 579637674, \\ f^{(25,20,9)/(16,5)} &= 50270540048960.\end{aligned}$$

3. 関係式

Schur 多重ゼータ関数の研究方法として, 素朴には以下の 2 つが考えられる.

- (1) Schur 多重ゼータ関数を Schur 関数の類似物とみて, Schur 関数で成り立っている公式が Schur 多重ゼータ関数に対して成り立つかどうかを研究する.
- (2) Schur 多重ゼータ関数を等号なし多重ゼータ関数, 等号付き多重ゼータ関数の一般化とみて, 等号なし多重ゼータ関数, 等号付き多重ゼータ関数で成り立っている公式が Schur 多重ゼータ関数に対して成り立つかどうかを研究する.

以下では, この方針の下で得られた Schur 多重ゼータ関数の関係式について, いくつか掻い摘んで紹介する.

3.1. Schur 関数の類似として

[9] において, Schur 多重ゼータ関数に関する以下の公式が得られた.

- (i) Jacobi-Trudi 公式.
- (ii) Giambelli 公式.
- (iii) 双対 Cauchy 公式.

ここでは (i) の Jacobi-Trudi 公式のみを紹介する.

$(i, j) \in D(\lambda/\mu)$ に対して $c(i, j) = j - i$ とする. また, $W_{\lambda/\mu}^{\text{diag}} \subset W_{\lambda/\mu}$ を次で定義する.

$$W_{\lambda/\mu}^{\text{diag}} = \{ (s_{i,j}) \in W_{\lambda/\mu} \mid c(i, j) = c(i', j') \text{ のとき } s_{i,j} = s_{i',j'} \}.$$

これは各対角線上で成分がすべて等しい Young 盤 $\mathbf{s} \in W_{\lambda/\mu}$ 全体のなす集合である. $\mathbf{s} = (s_{i,j}) \in W_{\lambda/\mu}^{\text{diag}}$ のとき $s_{i,j} = s_{c(i,j)}$ とも書く. 例えば $\mathbf{s} = (s_{i,j}) \in W_{(4,3,2)}^{\text{diag}}$ に対して,

$$\mathbf{s} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline s_{1,1} & s_{1,2} & s_{1,3} & s_{1,4} \\ \hline s_{2,1} & s_{2,2} & s_{2,3} & \\ \hline s_{3,1} & s_{3,2} & & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline s_0 & s_1 & s_2 & s_3 \\ \hline s_{-1} & s_0 & s_1 & \\ \hline s_{-2} & s_{-1} & & \\ \hline \end{array}.$$

$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_q)$ に対して, それらの転置を $\lambda' = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_{p'})$, $\mu' = (\mu'_1, \dots, \mu'_{q'})$ と書く. このとき Schur 関数 $s_{\lambda/\mu}$ は, 完全対称関数, 基本対称関数の行列式としてそれぞれ以下のように書くことができる (Jacobi-Trudi 公式).

$$s_{\lambda/\mu} = \det \left[h_{\lambda_i - \mu_j - i + j} \right]_{1 \leq i, j \leq p}, \quad s_{\lambda/\mu} = \det \left[e_{\lambda'_i - \mu'_j - i + j} \right]_{1 \leq i, j \leq p'}.$$

ただし $h_0 = e_0 = 1$, $h_n = e_n = 0$ ($n < 0$) とする. この公式の類似として, 以下が得られる. 等号付き多重ゼータ関数は完全対称関数の, 等号なし多重ゼータ関数は基本対称関数の類似物とみることができたことに注意する.

定理 3.1 ([9, $\mu = \emptyset$ のとき Theorem 1.1, μ が一般の場合は Theorem 4.3]). λ, μ を上の通りとし, $\mathbf{s} = (s_{i,j}) = (s_{c(i,j)}) \in W_{\lambda/\mu}^{\text{diag}}$ とする.

(1) 任意の $1 \leq i \leq p$ に対して $\text{Re}(s_{i,\lambda_i}) > 1$ を仮定する. このとき,

$$\zeta(\mathbf{s}) = \det \left[\zeta^*(s_{\mu_j - j + 1}, s_{\mu_j - j + 2}, \dots, s_{\mu_j - j + (\lambda_i - \mu_j - i + j)}) \right]_{1 \leq i, j \leq p}.$$

ここで $\zeta^*(\dots)$ は $\lambda_i - \mu_j - i + j = 0$ のとき 1, $\lambda_i - \mu_j - i + j < 0$ のとき 0 とする.

(2) 任意の $1 \leq i \leq p'$ に対して $\text{Re}(s_{\lambda'_i, i}) > 1$ を仮定する. このとき,

$$\zeta(\mathbf{s}) = \det \left[\zeta(s_{-\mu'_j + j - 1}, s_{-\mu'_j + j - 2}, \dots, s_{-\mu'_j + j - (\lambda'_i - \mu'_j - i + j)}) \right]_{1 \leq i, j \leq p'}.$$

ここで $\zeta(\dots)$ は $\lambda'_i - \mu'_j - i + j = 0$ のとき 1, $\lambda'_i - \mu'_j - i + j < 0$ のとき 0 とする.

$\zeta(\mathbf{s})$ に関するこれら 2 つの行列式表示をつなぐことで, 等号なし多重ゼータ関数, 等号付き多重ゼータ関数の間の (線形ではない) 代数関係式が得られる.

例 3.2. $\lambda/\mu = (3, 2)/(1)$ のとき, Schur 関数に対する Jacobi-Trudi 公式は

$$s_{(3,2)/(1)} = \begin{vmatrix} h_2 & h_4 \\ 1 & h_2 \end{vmatrix}, \quad s_{(3,2)/(1)} = \begin{vmatrix} e_1 & e_3 & e_4 \\ 1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 1 & e_1 \end{vmatrix}.$$

一方で, Schur 多重ゼータ関数に対する Jacobi-Trudi 公式は

$$\zeta \left(\begin{array}{|c|c|} \hline s_1 & s_2 \\ \hline s_{-1} & s_0 \\ \hline \end{array} \right) = \begin{vmatrix} \zeta^*(s_1, s_2) & \zeta^*(s_{-1}, s_0, s_1, s_2) \\ 1 & \zeta^*(s_{-1}, s_0) \end{vmatrix},$$

$$\zeta \left(\begin{array}{|c|c|} \hline s_1 & s_2 \\ \hline s_{-1} & s_0 \\ \hline \end{array} \right) = \begin{vmatrix} \zeta(s_{-1}) & \zeta(s_1, s_0, s_{-1}) & \zeta(s_2, s_1, s_0, s_{-1}) \\ 1 & \zeta(s_1, s_0) & \zeta(s_2, s_1, s_0) \\ 0 & 1 & \zeta(s_2) \end{vmatrix}.$$

[9] では定理 3.1 の証明が 2 通り与えられている. 1 つ目は, いわゆる Lindström-Gessel-Viennot の補題の証明の類似として証明する: $s \in W_{\lambda/\mu}^{\text{diag}}$ のとき, $\zeta(s)$ は格子点上のある種の道の重み付きの和とみなすことができる. このような重みの和が行列式で書ける, というのが Lindström-Gessel-Viennot の補題の主張であり, その証明をまねる (ただし [9] では $\mu = \emptyset$ の場合にしか考察されていないが, μ が一般の場合に議論を拡張することは可能である). 2 つ目は, $\zeta(s)$ を Nakagawa-Noumi-Shirakawa-Yamada [8] によって研究された Macdonald による Schur 関数の第 9 変奏の特殊化と見なす方法である ($s \in W_{\lambda/\mu}^{\text{diag}}$ のとき, それが可能である). この第 9 変奏は Jacobi-Trudi 公式を満たすことが知られているので, その系として主張が得られる.

注意 3.3. $s \notin W_{\lambda/\mu}^{\text{diag}}$ の場合, $\zeta(s)$ に対する Jacobi-Trudi 公式は得られていないが, (特定の型の場合に) それらしいものを得ることは可能である. 例えば $\lambda = (2, 2)$ のとき,

$$\begin{aligned} \zeta \left(\begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline c & d \\ \hline \end{array} \right) &= \begin{vmatrix} \zeta^*(a, b) & \zeta^*(c, d, b) \\ \zeta^*(a) & \zeta^*(c, d) \end{vmatrix} \\ &\quad + \zeta^*(c, d, b, a) - \zeta^*(c, a, b, d) + \zeta^*(c, a, b + d) - \zeta^*(c, d, b + a), \\ \zeta \left(\begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline c & d \\ \hline \end{array} \right) &= \begin{vmatrix} \zeta(a, c) & \zeta(b, d, c) \\ \zeta(a) & \zeta(b, d) \end{vmatrix} \\ &\quad + \zeta(b, d, c, a) - \zeta(b, a, c, d) + \zeta(b, d, c + a) - \zeta(b, a, c + d). \end{aligned}$$

このように, 一般の $s \in W_{\lambda/\mu}$ の場合は $s \in W_{\lambda/\mu}^{\text{diag}}$ のときに消えるおつりの項が現れる.

3.2. 多重ゼータ関数の一般化として

ここでは等号なし多重ゼータ関数, 等号付き多重ゼータ関数共通の話題である 1-3 公式および反復積分表示について, Schur 多重ゼータ関数の場合に対応する公式を紹介する.

3.2.1. 1-3 公式

まずは 1-3 公式について紹介する. 1-3 公式とは 1 と 3 が交互に並んだインデックスに対する多重ゼータ値の公式を意味するものとする. 例えば等号なし多重ゼータ関数の場合, 以下の公式が知られている.

$$\zeta(\{1, 3\}^n) = \frac{2\pi^{4n}}{(4n+2)!} = \frac{1}{4^n} \zeta(\{4\}^n), \quad (3.1)$$

$$\zeta(3, \{1, 3\}^n) = \sum_{k=0}^n \left(-\frac{1}{4}\right)^k \zeta(4k+3) \zeta(\{1, 3\}^{n-k}). \quad (3.2)$$

ここで $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N}$ に対して $\{k_1, \dots, k_r\}^n$ は $k_1, \dots, k_r$ の n 回反復を表すものとする. (3.1) は [4] において, (3.2) は [3] においてそれぞれ導かれた. また, これらの公式の等号付き多重ゼータ関数版については [7] を参照せよ.

Schur 多重ゼータ関数の場合, インデックス (Young 盤) は 2 次元的なので, 1-3 公式といった 1 と 3 が縦にも横にも交互に並んだチェス盤のような Young 盤に対する Schur 多重ゼータ値の公式を意味するものとする. ただし, 収束のため, このような Young 盤の角における成分は常に 3 である必要がある.

1-3 公式を導くにあたって, まずは Schur 多重ゼータ関数に対する調和積公式が必要となる. 調和積公式とは, 多重ゼータ関数の積を多重ゼータ関数の和で書く, という公

式である. 例えば,

$$\zeta(a)\zeta(b) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^b} = \sum_{m \leq n} \frac{1}{m^a n^b} + \sum_{n < m} \frac{1}{n^b m^a} = \zeta^*(a, b) + \zeta(b, a)$$

より,

$$\zeta\left(\begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline \end{array}\right) \zeta\left(\begin{array}{|c|} \hline b \\ \hline \end{array}\right) = \zeta\left(\begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline \end{array}\right) + \zeta\left(\begin{array}{|c|} \hline b \\ \hline a \\ \hline \end{array}\right)$$

が成り立つ. これを一般の場合に書いたのが次の公式である.

補題 3.4 ([2, Lemma 2.2]). $\mathbf{s}_1 \in W_{\lambda^1/\mu^1}$, $\mathbf{s}_2 \in W_{\lambda^2/\mu^2}$ に対して,

$$\zeta(\mathbf{s}_1)\zeta(\mathbf{s}_2) = \zeta(\mathbf{s}_1 \oplus_{\mathbf{h}} \mathbf{s}_2) + \zeta(\mathbf{s}_1 \oplus_{\mathbf{v}} \mathbf{s}_2). \quad (3.3)$$

ここで $\mathbf{s}_1 \oplus_{\mathbf{h}} \mathbf{s}_2$ ($\mathbf{s}_1 \oplus_{\mathbf{v}} \mathbf{s}_2$) は $\mathbf{s}_1$ の最右上の成分の右隣 (上) に $\mathbf{s}_2$ の最左下の成分を配置して得られる Young 盤である.

例 3.5.

$$\zeta\left(\begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline c & \\ \hline \end{array}\right) \zeta\left(\begin{array}{|c|c|} \hline x & y \\ \hline z & w \\ \hline \end{array}\right) = \zeta\left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & x & y \\ \hline a & b & z & w \\ \hline c & & & \\ \hline \end{array}\right) + \zeta\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline & x & y \\ \hline & z & w \\ \hline a & b & \\ \hline c & & \\ \hline \end{array}\right).$$

分割の組 λ/μ は, 連結でかつ 2×2 ブロックを含まないときリボンと呼ばれる. まずリボン型 Schur 多重ゼータ関数に対する 1-3 公式を紹介する. 以下, $\delta_0 = \delta_{-1} = \emptyset$ とし, 自然数 m に対して $\delta_m = (m, m-1, \dots, 2, 1)$ と定義する. また, 見やすくするために Young 盤の 1 と 3 を異なる色で色付けした.

定理 3.6 ([2, Theorem 3.4]). $n \in \mathbb{N}$ に対して, $\sigma_n = (n, n, n-1, \dots, 2, 1)/\delta_{n-1}$, $\sigma'_n = (n+1, n, \dots, 3, 2)/\delta_{n-1}$ とする. このとき,

$$\zeta_{\sigma_n} \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & 1 \\ \hline & \cdot & 3 \\ \hline 1 & \cdot & \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array} \right) = \frac{1}{4^n} \zeta^*(\{4\}^n), \quad \zeta_{\sigma'_n} \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline & 1 & 3 \\ \hline & \cdot & \cdot \\ \hline 1 & 3 & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \right) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{4^k} \zeta^*(\{4\}^k) \zeta(\{4\}^{n-k}).$$

特に, (命題 2.1 の後半より) これらは $\mathbb{Q}\pi^{4n}$ に値を持つ.

定理 3.7 ([2, Theorem 3.5]). $n \in \mathbb{N}$ に対して, $\alpha_n = (n+1, n+1, n, n-1, \dots, 3, 2)/\delta_n$, $\beta_n = \delta_{n+1}/\delta_{n-1}$ とする. このとき,

$$\zeta_{\alpha_n} \left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & 1 & \\ \hline & & \cdot & 3 \\ \hline & 1 & \cdot & \\ \hline 1 & 3 & & \\ \hline \end{array} \right) = \frac{2}{4^n} \zeta(4n+1), \quad \zeta_{\beta_n} \left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & 1 & 3 & \\ \hline & \cdot & \cdot & \\ \hline 1 & \cdot & & \\ \hline 3 & & & \\ \hline \end{array} \right) = \frac{1}{4^n} \zeta(4n+3).$$

これらの公式は, (多重ゼータ関数の場合同様) 対応する母関数が Gauss の超幾何関数を用いて明示的に書けるので, それから係数比較を行うことで導かれる. ちなみに (どれも同じように見えるが) この中で一番難しいと思われるのは定理 3.7 の 1 つ目の等式である. また定理 3.7 の 2 つ目の等式は, (3.1), (3.2) および前節で述べた Jacobi-Trudi 公式を用いて証明することもできる.

補題 3.4 (調和積公式) および定理 3.6, 3.7 を組み合わせることで次が得られる.

定理 3.8 ([2, Theorem 3.1]). 任意のリボン型 1-3 Schur 多重ゼータ値は π^4 , $\zeta(2k+1)$ ($k \geq 1$) の有理数係数の多項式で書ける.

例 3.9.

$$\begin{aligned}
\zeta \left(\begin{array}{ccc} & & 3 \\ & & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{array} \right) &= \zeta \left(\begin{array}{ccc} & & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{array} \right) \zeta \left(\begin{array}{c} 3 \end{array} \right) - \zeta \left(\begin{array}{ccc} & & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & \end{array} \right) \\
&= \left[\zeta \left(\begin{array}{c} 3 \end{array} \right) \zeta \left(\begin{array}{cc} & 1 \\ 1 & 3 \end{array} \right) - \zeta \left(\begin{array}{cc} & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{array} \right) \right] \zeta \left(\begin{array}{c} 3 \end{array} \right) \\
&\quad - \left[\zeta \left(\begin{array}{c} 3 \end{array} \right) \zeta \left(\begin{array}{ccc} & & 1 & 3 \\ 1 & 3 & & \end{array} \right) - \zeta \left(\begin{array}{ccc} & & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & \end{array} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \zeta(3)^2 \zeta(5) - \frac{7\pi^8}{129600} \zeta(3) + \frac{1}{16} \zeta(11).
\end{aligned}$$

また, 別のタイプの 1-3 Schur 多重ゼータ値として, 階段型, すなわち型が $\delta_m = (m, m-1, \dots, 2, 1)$ の場合の公式も得られている. 階段型 1-3 Schur 多重ゼータ値は, 以下のように Riemann ゼータ関数の奇数点における特殊値の Hankel 行列式で書けることが示される. これも (3.1), (3.2) および Jacobi-Trudi 公式を用いて示される.

定理 3.10 ([2, Corollary 4.6]). (1) 奇数 $N \geq 1$ に対して,

$$\zeta_{\delta_N} \left(\begin{array}{ccccc} 3 & 1 & \cdots & 1 & 3 \\ 1 & \ddots & & 1 & 3 \\ \vdots & 1 & 3 & & \\ 1 & 3 & & & \\ 3 & & & & \end{array} \right) = 4^{-\frac{1}{4}(N+1)(N-1)} \det \left[\zeta(4(i+j)-5) \right]_{1 \leq i, j \leq \frac{N+1}{2}}.$$

(2) 偶数 $N \geq 2$ に対して,

$$\zeta_{\delta_N} \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 3 & \cdots & \cdots & 1 & 3 \\ 3 & \ddots & \ddots & & 1 & 3 \\ \vdots & \ddots & 1 & 3 & & \\ \vdots & 1 & 3 & & & \\ 1 & 3 & & & & \\ 3 & & & & & \end{array} \right) = 4^{-\frac{1}{4}N^2} \det \left[\zeta(4(i+j)-1) \right]_{1 \leq i, j \leq \frac{N}{2}}.$$

例 3.11.

$$\begin{aligned}
\zeta \left(\begin{array}{c} 3 \end{array} \right) &= |\zeta(3)|, & \zeta \left(\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 3 & \end{array} \right) &= \frac{1}{4} |\zeta(7)|, \\
\zeta \left(\begin{array}{ccc} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & \\ 3 & & \end{array} \right) &= \frac{1}{4^2} \begin{vmatrix} \zeta(3) & \zeta(7) \\ \zeta(7) & \zeta(11) \end{vmatrix}, & \zeta \left(\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & \\ 1 & 3 & & \\ 3 & & & \end{array} \right) &= \frac{1}{4^4} \begin{vmatrix} \zeta(7) & \zeta(11) \\ \zeta(11) & \zeta(15) \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

3.2.2. 反復積分表示

以下, $\mathbf{k} \in T(\lambda/\mu, \mathbb{N})$ が $W_{\lambda/\mu}$ に属する (すなわち $\zeta(\mathbf{k})$ が収束する) とき, $\mathbf{k}$ を収束インデックスと呼ぶことにする.

等号なし多重ゼータ値は次の反復積分表示を持つ (例えば [14] を参照).

$$\zeta(\beta_1, \dots, \beta_q) = \zeta \left(\begin{array}{c} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_q \end{array} \right) = \int_{0 < y_1 < \dots < y_q < 1} \prod_{l=1}^q \left(\frac{dy_{\beta_1 + \dots + \beta_{l-1} + 1}}{1 - y_{\beta_1 + \dots + \beta_{l-1} + 1}} \prod_{j=\beta_1 + \dots + \beta_{l-1} + 2}^{\beta_1 + \dots + \beta_{l-1} + \beta_l} \frac{dy_j}{y_j} \right).$$

ただし, $\beta = (\beta_i) \in T((1^n), \mathbb{N})$ は収束インデックスとする. 一方で等号付き多重ゼータ値に対する反復積分表示は Yamamoto [11] によって初めて与えられた ([11] では, 2 色半順序集合に対してある積分が定義された. 等号付き多重ゼータ値の積分表示はその特別な場合である.)

$(p, 1^q)$ の形をしたリボンを hook (鉤) という. また, hook を π 回転させたものを anti-hook という. Kaneko-Yamamoto [5] は, 上記の積分表示の一般化として, anti-hook 型 Schur 多重ゼータ値¹に対する反復積分表示を導いた. この積分表示は, 次に述べるように一般のリボン型 Schur 多重ゼータ値に拡張される.

定理 3.12 ([9, Theorem 6.2]). $p_i, q_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ($1 \leq i \leq r$) とする. $\alpha_j^{(i)} \in \mathbb{N}$ ($1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq p_i$), $\beta_j^{(i)} \in \mathbb{N}$ ($1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq q_i$) に対して

$$\alpha_i = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \alpha_1^{(i)} & \cdots & \alpha_{p_i}^{(i)} \\ \hline \end{array}, \quad \beta_i = \begin{array}{|c|} \hline \beta_1^{(i)} \\ \vdots \\ \beta_{q_i}^{(i)} \\ \hline \end{array}, \quad \gamma_i = \beta_i \oplus_v \alpha_i = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \alpha_1^{(i)} & \cdots & \alpha_{p_i}^{(i)} \\ \hline \beta_1^{(i)} & & \\ \vdots & & \\ \beta_{q_i}^{(i)} & & \\ \hline \end{array}$$

とし, さらに $\gamma = \gamma_r \oplus_v \dots \oplus_v \gamma_1$ とする. γ が収束インデックスのとき,

$$\begin{aligned} \zeta(\gamma) = \int_{\Delta(\gamma)} \prod_{i=1}^r \left[\prod_{k=1}^{p_i} \left(\frac{dx_{\alpha_{p_i}^{(i)} + \dots + \alpha_{p_i+2-k}^{(i)} + 1}^{(i)}}{1 - x_{\alpha_{p_i}^{(i)} + \dots + \alpha_{p_i+2-k}^{(i)} + 1}^{(i)}} \prod_{j=\alpha_{p_i}^{(i)} + \dots + \alpha_{p_i+2-k}^{(i)} + 2}^{\alpha_{p_i}^{(i)} + \dots + \alpha_{p_i+2-k}^{(i)} + \alpha_{p_i+1-k}^{(i)}} \frac{dx_j^{(i)}}{x_j^{(i)}} \right) \right. \\ \left. \times \prod_{l=1}^{q_i} \left(\frac{dy_{\beta_1^{(i)} + \dots + \beta_{l-1}^{(i)} + 1}^{(i)}}{1 - y_{\beta_1^{(i)} + \dots + \beta_{l-1}^{(i)} + 1}^{(i)}} \prod_{j=\beta_1^{(i)} + \dots + \beta_{l-1}^{(i)} + 2}^{\beta_1^{(i)} + \dots + \beta_{l-1}^{(i)} + \beta_l^{(i)}} \frac{dy_j^{(i)}}{y_j^{(i)}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

ここで $|\alpha_i| = \sum_{j=1}^{p_i} \alpha_j^{(i)}$, $|\beta_i| = \sum_{j=1}^{q_i} \beta_j^{(i)}$ ($1 \leq i \leq r$) とし, $\mathbf{x}_i = (x_1^{(i)}, \dots, x_{|\alpha_i|}^{(i)})$, $\mathbf{y}_i = (y_1^{(i)}, \dots, y_{|\beta_i|}^{(i)})$ ($1 \leq i \leq r$) と書くとき,

$$\Delta(\gamma) = \left\{ (\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{x}_r, \mathbf{y}_r) \in [0, 1]^{\sum_{i=1}^r (|\alpha_i| + |\beta_i|)} \left| \begin{array}{l} P_{\alpha_i}(\mathbf{x}_i), Q_{\beta_i}(\mathbf{y}_i) \quad (1 \leq i \leq r), \\ x_{|\alpha_i|}^{(i)} < \begin{cases} y_1^{(i)} & q_i \neq 0 \\ x_1^{(i+1)} & q_i = 0 \end{cases} \quad (1 \leq i \leq r), \\ y_{|\beta_i|}^{(i)} < x_1^{(i+1)} \quad (1 \leq i \leq r-1) \end{array} \right. \right\}$$

¹ [5] では anti-hook 型 Schur 多重ゼータ値は $\zeta(\mathbf{k} \otimes \mathbf{l}^*)$ と書かれている

であり, 条件 $P_{\alpha_i}(\mathbf{x}_i)$, $Q_{\beta_i}(\mathbf{y}_i)$ は以下の通りである.

$$P_{\alpha_i}(\mathbf{x}_i) : \begin{cases} x_j^{(i)} < x_{j+1}^{(i)} & (j \notin \{\alpha_p^{(i)}, \alpha_p^{(i)} + \alpha_{p-1}^{(i)}, \dots, \alpha_p^{(i)} + \dots + \alpha_2^{(i)}\} \text{ のとき}), \\ x_j^{(i)} > x_{j+1}^{(i)} & (j \in \{\alpha_p^{(i)}, \alpha_p^{(i)} + \alpha_{p-1}^{(i)}, \dots, \alpha_p^{(i)} + \dots + \alpha_2^{(i)}\} \text{ のとき}), \end{cases}$$

$$Q_{\beta_i}(\mathbf{y}_i) : y_1^{(i)} < \dots < y_{|\beta_i|}^{(i)}.$$

例えば,

$$\zeta \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & 1 \\ \hline & 1 & 2 \\ \hline 2 & 2 & \\ \hline \end{array} \right) = \int_{\substack{t_1 < t_2 < t_3 > t_4 < t_5 < t_6 > t_7 < t_8 \\ 0 < t_1, \dots, t_8 < 1}} \frac{dt_1}{1-t_1} \frac{dt_2}{1-t_2} \frac{dt_3}{t_3} \frac{dt_4}{1-t_4} \frac{dt_5}{1-t_5} \frac{dt_6}{t_6} \frac{dt_7}{1-t_7} \frac{dt_8}{t_8}.$$

また, この積分において変数変換 $s_i = 1 - t_{9-i}$ ($1 \leq i \leq 8$) を実行すると, 右辺は

$$\int_{\substack{s_1 < s_2 > s_3 < s_4 < s_5 > s_6 < s_7 < s_8 \\ 0 < s_1, \dots, s_8 < 1}} \frac{ds_1}{1-s_1} \frac{ds_2}{s_2} \frac{ds_3}{1-s_3} \frac{ds_4}{s_4} \frac{ds_5}{s_5} \frac{ds_6}{1-s_6} \frac{ds_7}{s_7} \frac{ds_8}{s_8} = \zeta \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 3 & 2 \\ \hline \end{array} \right) = \zeta^*(3, 3, 2)$$

と変形でき, 最終的に

$$\zeta \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & 1 \\ \hline & 1 & 2 \\ \hline 2 & 2 & \\ \hline \end{array} \right) = \zeta^*(3, 3, 2)$$

という等号付き多重ゼータ値に関する ”双対関係式” を得ることができる. 等号付き多重ゼータ値の双対が何か, という問いは昔からあったが, まだはっきりとした結論はでていないと思われる. しかし, 反復積分表示における上記の変数変換を ”双対” というのであれば, 等号付き多重ゼータ値の双対は, (特別な場合に) リボン型 Schur 多重ゼータ値として実現することができる.

リボン型 Schur 多重ゼータ値に対しても, (上の意味での) 双対関係式を確認できる場合がある (一般にはリボン型 Schur 多重ゼータ値は双対に関して閉じていないので注意が必要である).

系 3.13. $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}$ とする. 収束インデックス $\mathbf{k}_i \in T((1^{n_i}), \mathbb{N})$ に対して, その双対インデックスを $\mathbf{k}'_i$ と書く ($1 \leq i \leq r$). このとき,

$$\zeta(\mathbf{k}_1 \oplus_{\text{h}} \dots \oplus_{\text{h}} \mathbf{k}_r) = \zeta(\mathbf{k}'_r \oplus_{\text{h}} \dots \oplus_{\text{h}} \mathbf{k}'_1).$$

例 3.14.

$$\zeta \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & 2 \\ \hline & 1 & 2 \\ \hline 2 & 2 & \\ \hline \end{array} \right) = \zeta \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 2 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array} \right), \quad \zeta \left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & 3 & 2 \\ \hline & & 1 & \\ \hline & 1 & 2 & 2 \\ \hline 1 & 2 & & \\ \hline 2 & & & \\ \hline \end{array} \right) = \zeta \left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & 3 & 2 & 3 & 3 \\ \hline & 1 & & & \\ \hline 2 & 2 & & & \\ \hline \end{array} \right).$$

注意 3.15. リボン型以外の Schur 多重ゼータ値に対する反復積分表示があるかどうかはまだわかっていない. まずはそのようなもので一番簡単な

$$\zeta \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \right) = \sum_{\substack{k \leq l \\ m \leq n}} \frac{1}{klmn^2}$$

の場合を考えてみたが, 少なくとも (3.4) の形の積分表示は期待できそうではない.

$k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して, 重さが k の多重ゼータ値が張る $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間を $\mathcal{Z}_k$ と表す. いわゆる Zagier の次元予想とは, 数列 $\{d_k\}_{k \geq 0}$ を $d_0 = 1, d_1 = 0, d_2 = 1, d_k = d_{k-2} + d_{k-3} (k \geq 3)$ と定義すると,

$$\dim \mathcal{Z}_k = d_k$$

であろうというものである. この予想を解決するためには, 当然多重ゼータ値の間の $\mathbb{Q}$ 上の線形関係式を "すべて" 見つける必要がある. これに対して, 正規化複シャッフル関係式など, 関係式をすべて含むであろう関係式族が現在も研究されている.

2.1 節で述べたように, Schur 多重ゼータ値は, 定義 (級数表示) において走る $m_{i,j}$ が満たす不等式をほぐすことで, 多重ゼータ値の級数表示の一次結合として書くことができる. 特に, リボン型 Schur 多重ゼータ値は, 積分表示 (3.4) において動く $x_j^{(i)}, y_j^{(i)}$ が満たす不等式もほぐすことで, 多重ゼータ値の積分表示の一次結合としても書くことができる. これより, リボン型 Schur 多重ゼータ値の級数表示, 積分表示という 2 通りの表示をつなぐことで, 多重ゼータ値の非自明な線形関係式を得ることができる.

Kaneko-Yamamoto は [5] において, 次を予想した.

予想 3.16 ([5, Conjecture 4.3]). 多重ゼータ値のすべての線形関係式は anti-hooki 型の Schur 多重ゼータ値に関する「級数表示 = 積分表示」から導かれるであろう.

これもあって, Schur 多重ゼータ関数は多重ゼータ関数の単なる一般化以上のものになっていると期待している. 例えば上の予想のように, 型を固定したときに対応する Schur 多重ゼータ値が多重ゼータ値の (線形) 関係式をどれくらい知っているのか, という問題は興味深い問題ではないかと思われる. 一方で, Jacobi-Trudi 公式のように, Schur 関数が満たす関係式の類似物を探すことも面白い.

まだまだやるべきことはたくさんありそうである.

参考文献

- [1] H. Bachmann, Interpolated Schur multiple zeta values, *J. Aust. Math. Soc.*, **104** (2018), 289–307.
- [2] H. Bachmann and Y. Yamasaki, Checkerboard style Schur multiple zeta values and odd single zeta values, to appear in *Math. Z.*, 2018.
- [3] D. Bowman and D. Bradley, Resolution of some open problems concerning multiple zeta evaluations of arbitrary depth, *Compositio Math.*, **139** (2003), no. 1, 85–100.
- [4] J. Borwein, D. Bradley and D. Broadhurst, Combinatorial aspects of multiple zeta value, *Electron. J. Combin.*, **5** (1998).
- [5] M. Kaneko and S. Yamamoto, A new integral-series identity of multiple zeta values and regularizations, *Selecta Math.*, (N.S.) **24** (2018), no. 3, 2499–2521.
- [6] I. G. Macdonald, Schur functions: theme and variations, *Séminaire Lotharingien de Combinatoire* (Saint-Nabor, 1992), pp. 5–39, Publ. Inst. Rech. Math. Av., 498, Univ. Louis Pasteur, Strasbourg, 1992.
- [7] S. Muneta, On some explicit evaluations of multiple zeta-star values, *J. Number Theory*, **128** (2008), no. 9, 2538–2548.
- [8] J. Nakagawa, M. Noumi, M. Shirakawa and Y. Yamada, Tableau representation for Macdonald's ninth variation of Schur functions, (*English summary*) *Physics and combinatorics* (Nagoya, 2000), pp. 180–195, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2001.

- [9] M. Nakasuji, O. Phuksuwan and Y. Yamasaki, On Schur multiple zeta functions: A combinatoric generalization of multiple zeta functions, *Adv. Math.*, **333** (2018), 570 – 619.
- [10] R. Stanley, Two remarks on skew tableaux, *Electron. J. Combin.*, **18** (2011), no. 2, Paper 16, 8 pp.
- [11] S. Yamamoto, Multiple zeta-star values and multiple integrals, to appear in *RIMS Kôkyûroku Bessatsu*, arXiv:1405.6499.
- [12] S. Yamamoto, Interpolation of multiple zeta and zeta-star values. *J. Algebra*, **385** (2013), 102–114.
- [13] Y. Yamasaki, Evaluations of multiple Dirichlet L -values via symmetric functions, *J. Number Theory*, **129** (2009), no. 10, 2369–2386.
- [14] D. Zagier, Values of zeta functions and their applications. First European Congress of Mathematics, Vol. II (Paris, 1992), 497–512, *Progr. Math.*, **120**, Birkhauser, Basel, 1994.