

モジュラス付きモチーフと混合Hodge構造

Motives and mixed Hodge structures with modulus

山崎 隆雄 (東北大学)*

モジュラスの概念はすでに古典的な類体論にみられる。すなわち、代数体の不分岐アーベル拡大は通常のイデアル類群で分類されるが、分岐を許したアーベル拡大を考えると導手付きイデアル類群が必要となる。この導手にあたるものがモジュラスである。幾何的な設定での対応物として、曲線の一般ヤコビ多様体の理論 [14] がある。

近年、モチーフとその周辺分野において、さまざまな理論のモジュラスによる拡張が考察されている。本稿では一般ヤコビ多様体の理論からはじめて「1-モチーフ」と「混合Hodge構造」のモジュラス版に関する Florian Ivorra 氏と筆者の共同研究 [7, 8] を解説する。主結果は5節と7節で述べられる。このほかにもモジュラス拡張は高次元類体論 [11] や代数的サイクル [3, 13] などで研究されている。また、モチーフの理論としてもっとも成功したものの一つである Voevodsky によるモチーフの三角圏 **DM** についてもモジュラス拡張が考察されている [9] が、今回はこの話題は扱わない。

5節を除き、基礎体は $\mathbb{C}$ とする。

1. 可換代数群と一般ヤコビ多様体

基本的な例として複素数体 $\mathbb{C}$ 上の連結可換代数群 G を取り上げよう。これはアーベル多様体 A 、乗法群 $\mathbb{G}_m$ 、加法群 $\mathbb{G}_a$ を用いて次のような拡大として記述できる：

$$0 \rightarrow \mathbb{G}_m^s \times \mathbb{G}_a^t \rightarrow G \rightarrow A \rightarrow 0 \quad (s, t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}).$$

$s = t = 0$ のとき $G = A$ はアーベル多様体であるが、 $t = 0$ のとき G は半アーベル多様体と呼ばれる。アーベル多様体の圏を **AV**、半アーベル多様体の圏を **SA**、可換代数群の圏を **AG** と書くことにすると次の階層構造が定まる：

$$\mathbf{AV} \subset \mathbf{SA} \subset \mathbf{AG}. \quad (1)$$

可換代数群の重要な例が代数曲線の理論にあらわれる。 $\mathbb{C}$ 上の完備非特異代数曲線 X と、その上の有効因子 $Y = a_1 P_1 + \cdots + a_r P_r$ ($P_1, \dots, P_r \in X$ は相異なる閉点、 $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{Z}_{>0}$) に対し、組 (X, Y) の一般ヤコビ多様体 $J(X, Y) \in \mathbf{AG}$ が定まる [14]。これは X 上の次数0の直線束 L と自明化 $\sigma : L|_Y \cong \mathcal{O}_Y$ の組 (L, σ) の同型類を分類するものとして記述できる。(この事実は以下では用いない。) Y を $J(X, Y)$ のモジュラスという。 Y の被約部分を $Y_{\text{red}} := P_1 + \cdots + P_r$ と書く。 $J(X, Y)$ が (1) の階層構造でどの位置を占めるかということと、 Y の性質が次のように対応する：

- $Y = \emptyset$ のとき、 $J(X, \emptyset) = J(X)$ は古典的なヤコビ多様体で **AV** に属す。
- Y が被約 (すなわち $Y = Y_{\text{red}}$) のとき、 $J(X, Y)$ は **SA** に属す。
- Y が被約でないとき、 $J(X, Y)$ は **SA** に属さない **AG** の対象となる。

* 〒980-8578 仙台市青葉区荒巻字青葉6番3号 東北大学大学院理学研究科
e-mail: ytakao@math.tohoku.ac.jp

2. 1-モチーフと双対性

定義 1 Laumon 1-モチーフとは二項からなる複体 $M = [\mathbb{Z}^s \times \hat{\mathbb{G}}_a^t \rightarrow G]$ ($s, t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $G \in \mathbf{AG}$) である。 $t = 0$ かつ $G \in \mathbf{SA}$ のとき M を Deligne 1-モチーフという。Laumon 1-モチーフと Deligne 1-モチーフの圏をそれぞれ $\mathcal{M}_1^L$, $\mathcal{M}_1^D$ と書く。 $G \in \mathbf{AG}$ を Laumon 1-モチーフ $[0 \rightarrow G]$ と同一視し、 $\mathbf{AG}$ は $\mathcal{M}_1^L$ の部分圏、 $\mathbf{SA}$ は $\mathcal{M}_1^D$ の部分圏とみなす。

1-モチーフの大きな利点は双対性である。アーベル多様体 A にはその双対 $A^\vee$ が (ピカル多様体として) 定義され、 $A^\vee$ もまたアーベル多様体である。この双対性を代数群に拡張しようとする、 $\mathbf{AG}$ や $\mathbf{SA}$ という圏ではおさまらず、 $\mathcal{M}_1^L$ や $\mathcal{M}_1^D$ が必要となる。すなわち、アーベル多様体の双対関手 $\vee : \mathbf{AV} \rightarrow \mathbf{AV}$ は $\vee : \mathcal{M}_1^L \rightarrow \mathcal{M}_1^L$ に延長される。これは $\mathcal{M}_1^D$ を保つ。例えば $\mathbb{G}_m^\vee = [\mathbb{Z} \rightarrow 0]$, $\mathbb{G}_a^\vee = [\hat{\mathbb{G}}_a \rightarrow 0]$ である。

前節で述べた一般ヤコビ多様体は、次のように 1-モチーフへと拡張できる。完備非特異代数曲線 X とその上の有効因子 Y, Z で台が交わらないものに対し、Laumon 1-モチーフ $J(X, Y, Z) \in \mathcal{M}_1^L$ が構成されて、次の性質が成り立つ：

$$J(X, Y, \emptyset) = J(X, Y), \quad J(X, Y, Z)^\vee \cong J(X, Z, Y).$$

最後の双対性で $Y = Z = \emptyset$ とすれば $J(X)^\vee \cong J(X)$ 、すなわちヤコビ多様体の自己双対性となる。この拡張では 1-モチーフとふたつの因子を使うことが不可欠である。次のふたつの節で、Hodge 理論を用いた $J(X, Y, Z)$ の構成を説明する。ただし、これは幾何的に行うこともできて、基礎体は任意の標数 0 の体とすることもできる (5 節)。

3. 混合 Hodge 構造と Deligne 1-モチーフ

以下、混合 Hodge 構造 H に対して $H_{\mathbb{Z}}$ で台となる有限生成アーベル群、 $F^\bullet H_{\mathbb{C}}$ で Hodge フィルトレーション、 $W_\bullet H_{\mathbb{Q}}$ で重さフィルトレーションを表す。 $F^\bullet H_{\mathbb{C}}$ は $H_{\mathbb{C}} := H_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ の $\mathbb{C}$ -部分空間による減少フィルトレーション、 $W_\bullet H_{\mathbb{Q}}$ は $H_{\mathbb{Q}} := H_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ の $\mathbb{Q}$ -部分空間による増大フィルトレーションである。

定義 2 混合 Hodge 構造 H で次の条件を満たすものの全体のなす圏を $\mathbf{MHS}_1$ とする：(i) $H_{\mathbb{Z}}$ は自由 $\mathbb{Z}$ -加群。このとき、 $W_\bullet H_{\mathbb{Q}}$ が $H_{\mathbb{Z}}$ に誘導するフィルトレーション $W_\bullet H_{\mathbb{Q}} \cap H_{\mathbb{Z}}$ を $W_\bullet H_{\mathbb{Z}}$ と書く。(ii) $W_0 H_{\mathbb{Z}} = H_{\mathbb{Z}}$, $W_{-3} H_{\mathbb{Z}} = 0$; $F^1 H_{\mathbb{C}} = 0$, $F^{-1} H_{\mathbb{C}} = H_{\mathbb{C}}$ 。(iii) $W_{-1} H_{\mathbb{Z}} / W_{-2} H_{\mathbb{Z}}$ は (純) Hodge 構造として偏極可能。

定理 3 (Deligne) 圏同値 $R^D : \mathcal{M}_1^D \cong \mathbf{MHS}_1$ が存在する。

R^D の構成は [5] を参照していただくこととして、ここでは次の対応だけを述べておく。

$$[0 \rightarrow A] \mapsto H_1(A(\mathbb{C}), \mathbb{Z}), \quad [\mathbb{Z} \rightarrow 0] \mapsto \mathbb{Z}, \quad [0 \rightarrow \mathbb{G}_m] \mapsto \mathbb{Z}(1).$$

ここで A はアーベル多様体である。また、Deligne 1-モチーフの双対関手 $\vee : \mathcal{M}_1^D \rightarrow \mathcal{M}_1^D$ は、 $\mathbf{MHS}_1$ では簡明な双対 $\mathrm{Hom}(-, \mathbb{Z}(1))$ に対応する。

完備非特異代数曲線 X とその上のふたつの被約な有効因子 Y, Z で台が交わらないものに対し、相対ホモロジー $H_1((X \setminus Y)(\mathbb{C}), Z(\mathbb{C}); \mathbb{Z})$ には自然な混合 Hodge 構造が入り、 $\mathbf{MHS}_1$ の対象を定める。これに対応する Deligne 1-モチーフが $J(X, Y, Z) \in \mathcal{M}_1^D$ である。双対性 $J(X, Y, Z)^\vee = J(X, Z, Y)$ はポアンカレ双対性により説明できる。

4. 混合 Hodge 構造の拡張と Laumon 1-モチーフ

定理3を拡張し、Laumon 1-モチーフの圏 $\mathcal{M}_1^L$ に Hodge 理論的な記述を与えることは、すでに多くの方々によりなされていた。最もはやいのは Barbieri-Viale[2] である。のちに加藤-Russell[10] により別の定式化が得られている。以下では我々の（第三の）定式化を与える。すべて $\mathcal{M}_1^L$ と同値なのであるが、技術的にはそれぞれに利点がある。

定義 4 レベル ≤ 1 のモジュラス付き混合 Hodge 構造 $\mathcal{H} = (H, U, V, \mathcal{F})$ とは、

- $\mathbf{MHS}_1$ の対象 H （定義2）、
- ふたつの有限次元 $\mathbb{C}$ -線形空間 U と V 、
- $H_{\mathbb{C}} \oplus U \oplus V$ の $\mathbb{C}$ -部分空間 $\mathcal{F}$

からなる四つ組 $\mathcal{H} = (H, U, V, \mathcal{F})$ で、ある条件を満たすものである。この条件はあとで一般の（レベルに制限を設けない）モジュラス付き混合 Hodge 構造を定義する際に述べるので、ここでは省略する（定義9を参照）。レベル ≤ 1 のモジュラス付き混合 Hodge 構造のなす圏を $\mathbf{MHSM}_1$ とする。

定理 5 圏同値 $R^L : \mathcal{M}_1^L \cong \mathbf{MHSM}_1$ が存在する。

R^L の構成は [8] を参照していただくこととして、ここでは次の対応だけを述べておく。

$$M \mapsto (H, 0, 0, F^0 H_{\mathbb{C}}), \quad [\hat{\mathbb{G}}_a \rightarrow 0] \mapsto (0, 0, \mathbb{C}, \mathbb{C}), \quad [0 \rightarrow \mathbb{G}_a] \mapsto (0, \mathbb{C}, 0, 0).$$

ここで $M \in \mathcal{M}_1^D$, $H = R^D(M) \in \mathbf{MHS}_1$ である（定理3）。また、Laumon 1-モチーフの双対 $\vee : \mathcal{M}_1^L \rightarrow \mathcal{M}_1^L$ は、 $\mathbf{MHSM}_1$ では簡明な双対 $\mathrm{Hom}(-, \mathbb{Z}(1))$ に対応する。

X を完備非特異代数曲線、 Y, Z をその上の被約とは限らない有効因子で $Y \cap Z = \emptyset$ を満たすものとする。このとき、 $J(X, Y, Z)$ は次で定まる $\mathcal{H} = (H, U, V, \mathcal{F}) \in \mathbf{MHSM}_1$ に対応する Laumon 1-モチーフである。

- $H = H_1((X \setminus Y)(\mathbb{C}), Z(\mathbb{C}); \mathbb{Z}) \in \mathbf{MHS}_1$.
- $U = H^0(X, \mathcal{O}_X(-Y_{\mathrm{red}})/\mathcal{O}_X(-Y))$, $V = H^0(X, \mathcal{O}_X(Z - Z_{\mathrm{red}})/\mathcal{O}_X)$.
- $\mathcal{F} := \mathrm{Im}(i : H^0(X, \Omega_X^1(Z)) \rightarrow \mathbb{H}^1(X, [\mathcal{O}_X(-Y) \rightarrow \Omega_X^1(Z)]) \cong H_{\mathbb{C}} \oplus U \oplus V)$.

最後の同型は [7, Proposition 3.7] を参照。写像 i は単射となる。 H は Y, Z の被約部分 $Y_{\mathrm{red}}, Z_{\mathrm{red}}$ だけに依存する。 Y, Z が被約ならば $U = V = 0$ で $J(X, Y, Z) \in \mathcal{M}_1^D$ となる。双対性 $J(X, Y, Z)^{\vee} = J(X, Z, Y)$ はポアンカレ双対性とセール双対性で説明できる。

5. 1-モチーフの普遍性

この節では k を $\mathbb{C}$ の部分体とする。 k 上の完備非特異代数曲線 X と、その上の二つの台が交わらない有効因子 Y, Z の組 (X, Y, Z) のなす圏を $\mathbf{MCrv}_k$ 、そのうち Y, Z が被約なもの全体のなす充満部分圏を $\mathbf{Crv}_k$ とする。これまで 1-モチーフは $\mathbb{C}$ 上のものだけを考えていたが、 k 上の Deligne/Laumon 1-モチーフの圏 $\mathcal{M}_{1,k}^D$, $\mathcal{M}_{1,k}^L$ も同様に定義できる。

技術的な理由により、この節では $\mathcal{M}_{1,k}^D$, $\mathcal{M}_{1,k}^L$ を $\mathbb{Q}$ -線形化された圏とする¹。これらは $\mathbb{Q}$ -線形アーベル圏である。上で述べた $J(X, Y, Z)$ の構成は次の関手に拡張できる：

$$J : \text{Crv}_k \rightarrow \mathcal{M}_{1,k}^D, \quad J : \text{MCrv}_k \rightarrow \mathcal{M}_{1,k}^L.$$

まず Crv_k と $\mathcal{M}_{1,k}^D$ を考えよう。 $\text{Vec}_{\mathbb{Q}}$ を有限次元 $\mathbb{Q}$ -線形空間の圏とする。関手 $H_1 : \text{Crv}_k \rightarrow \text{Vec}_{\mathbb{Q}}$ と $r_k^D : \mathcal{M}_{1,k}^D \rightarrow \text{Vec}_{\mathbb{Q}}$ を $(X, Y, Z) \mapsto H_1((X \setminus Y)(\mathbb{C}), Z(\mathbb{C}); \mathbb{Q})$, $M \mapsto R^D(M_{\mathbb{C}})_{\mathbb{Q}}$ により定義する。 ($M_{\mathbb{C}} \in \mathcal{M}_1^D = \mathcal{M}_{1,\mathbb{C}}^D$ は $M \in \mathcal{M}_{1,k}^D$ の底変換、 R^D は定理3の圏同値、 $(-)_{\mathbb{Q}}$ は $\mathbf{MHS}_1 \rightarrow \text{Vec}_{\mathbb{Q}}$, $H \mapsto H_{\mathbb{Q}}$ を意味する。) r_k^D は $\mathbb{Q}$ -線形・完全・忠実で、次の図式の中央の三角形は可換となる：

$$\begin{array}{ccc} \text{Crv}_k & \xrightarrow{H_1} & \text{Vec}_{\mathbb{Q}} \\ & \searrow J \quad \nearrow r_k^D & \\ & \mathcal{M}_{1,k}^D & \\ & \searrow \phi \quad \nearrow r & \\ & \mathcal{A} & \end{array}$$

(Note: The diagram shows a central triangle with $\mathcal{M}_{1,k}^D$ at the top, $\mathcal{A}$ at the bottom, and arrows J , r_k^D , and ϕ connecting them. The outer triangles are also connected by arrows H_1 , r , and j .)

定理 6 (Ayoub & Barbieri-Viale, [1]) $\mathcal{M}_{1,k}^D$ は次の普遍性を持つ: 任意の $\mathbb{Q}$ -線形アーベル圏 $\mathcal{A}$ 、関手 $j : \text{Crv}_k \rightarrow \mathcal{A}$, $\mathbb{Q}$ -線形・完全・忠実な関手 $r : \mathcal{A} \rightarrow \text{Vec}_{\mathbb{Q}}$ で $H_1 = r \circ j$ を満たすものに対し、 $j = \phi \circ J$, $r_k^D = r \circ \phi$ となる $\phi : \mathcal{M}_{1,k}^D \rightarrow \mathcal{A}$ が唯一存在する。

$\mathcal{M}_{1,k}^D$ は極めて具体的に構成された圏であるが、この定理によって「 $\mathcal{M}_{1,k}^D$ は幾何的な圏 Crv_k のアーベル圏による最良の近似である」という明瞭な意味づけが与えられる。なお、普遍的なアーベル圏というアイデアは Nori [6] により導入された。

次に MCrv_k と $\mathcal{M}_{1,k}^L$ を考える。 $\mathcal{M}_{1,k}^L$ では $\text{End}(\mathbb{G}_m) \cong \mathbb{Q}$, $\text{End}(\mathbb{G}_a) \cong k$ となることに見られるように、ここには $\mathbb{Q}$ -線形なものとは k -線形なものが混じっている。このため、 $\mathbb{Q}$ -線形・忠実・完全な関手 $r_k^L : \mathcal{M}_{1,k}^L \rightarrow \text{Vec}(\mathbb{Q})$ が存在するのは k が $\mathbb{Q}$ の有限次拡大の場合に限られる。このとき、関手 $H_1^{\text{dR}} : \text{MCrv}_k \rightarrow \text{Vec}_{\mathbb{Q}}$ を $(X, Y, Z) \mapsto \mathbb{H}^1(X, [\mathcal{O}_X(-Y) \rightarrow \Omega_X^1(Z)])$ と定める。 (H_1^{dR} は k -線形空間の構造を持つが、その構造を忘れて $\text{Vec}_{\mathbb{Q}}$ の対象とみる。) Y, Z が被約ならば標準同型 $H_1^{\text{dR}}(X, Y, Z) \otimes_k \mathbb{C} \cong H_1(X, Y, Z) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ が存在する。また、次の図式は可換となり、定理6と同様の普遍性が考えられる：

$$\begin{array}{ccc} \text{MCrv}_k & \xrightarrow{H_1^{\text{dR}}} & \text{Vec}_{\mathbb{Q}} \\ & \searrow J \quad \nearrow r_k^L & \\ & \mathcal{M}_{1,k}^L & \end{array}$$

定理 7 (Ivorra-Y., [7]) k が $\mathbb{Q}$ の有限次拡大のとき、 $\mathcal{M}_{1,k}^L$ は上記の普遍性を持つ。

6. 混合 Hodge 構造

この節では基礎体を $\mathbb{C}$ に戻し、(レベルを制限しない) 混合 Hodge 構造 $\mathbf{MHS}$ を考える。これはアーベル圏で、 $\mathbf{MHS}_1$ はその充満部分圏である。以下、 n は非負整数とす

¹ 「ねじれ部分を含む 1-モチーフ」の概念を用いると整構造込みの議論ができる。[1] ではその設定で定理6が証明されている。定理7では H_1^{dR} を使うため $\mathbb{Q}$ -線形化が必要である。

る。連結非特異固有多様体 X とその上の被約な有効因子 Y, Z で台が交わらないものに対し、 $H_{\mathbb{Z}} = H^n((X \setminus Z)(\mathbb{C}), Y(\mathbb{C}); \mathbb{Z})$ となる $H = H^n(X, Y, Z) \in \mathbf{MHS}$ が定まる²。双対関手 $\vee = \text{Hom}(-, \mathbb{Z}) : \mathbf{MHS} \rightarrow \mathbf{MHS}$ を用いて記述されるポアンカレ双対性

$$H^n(X, Y, Z)^\vee \cong H^{2d-n}(X, Z, Y)(d)/\text{Tor} \quad (d = \dim X)$$

が成り立つ。 $H^{2d-1}(X, Y, Z)(d)/\text{Tor}$ は $\mathbf{MHS}_1$ に属す。対応する Deligne 1-モチーフ (定理 3) を $\text{Alb}(X, Y, Z) \in \mathcal{M}_1^D$ と書く。 $d = 1$ ならば $\text{Alb}(X, Y, Z) = J(X, Y, Z)$ である。

注意 8 Deligne[5] は (非特異とも固有とも限らない) 任意の代数多様体 S に対し $H^n(S) \in \mathbf{MHS}$ を構成した。ここで S の特異点集合 S_{sing} が固有であると仮定する。 S の特異点解消 $U \rightarrow S$ で S_{sing} の逆像が正規交差因子 $Y \subset U$ となるものと、 U の完備化 X で $Z := X \setminus U$ が正規交差因子 $Z \subset X$ となるものを取る。 $(S_{\text{sing}}$ が固有という仮定により $Y \cap Z = \emptyset$ となる。) $d = 1$ であれば $H^1(X, Y, Z) \cong H^1(S)$ が成り立つ。一般次元の場合はこのような明確な対応関係はないが、組 (X, Y, Z) は S のある種の「モデル」になりうると想定している。なお、以下では Y, Z として被約とは限らない因子を考えるが、上の構成では (特に Z に対して) 重複度を決める適切な方法が見当たらない。

7. モジュラス付き混合 Hodge 構造

定義 9 モジュラス付き混合 Hodge 構造 $\mathcal{H} = (H, U^\bullet, V^\bullet, \{\mathcal{F}^p\}_{p \in \mathbb{Z}})$ とは、

- 混合 Hodge 構造 $H \in \mathbf{MHS}$ 、
- 有限次元 $\mathbb{C}$ -線形空間と $\mathbb{C}$ -線形写像から成るふたつの鎖 (複体でなくてよい)

$$U^\bullet = (\cdots \rightarrow U^p \xrightarrow{u^p} U^{p-1} \xrightarrow{u^{p-1}} \cdots), \quad V^\bullet = (\cdots \rightarrow V^p \xrightarrow{v^p} V^{p-1} \xrightarrow{v^{p-1}} \cdots)$$

で、有限個の $p \in \mathbb{Z}$ を除き $U^p = V^p = 0$ となるもの、

- 各 $p \in \mathbb{Z}$ に対する $\mathbb{C}$ -部分空間 $\mathcal{F}^p \subset H_{\mathbb{C}} \oplus U^p \oplus V^p$

の組で、すべての $p \in \mathbb{Z}$ について次の条件を満たすものである：

- ($\text{id}_{H_{\mathbb{C}}} \oplus u^p \oplus v^p$)($\mathcal{F}^p$) $\subset \mathcal{F}^{p-1}$.
- $x \in H_{\mathbb{C}}$ に対し、「 $x + u \in \mathcal{F}^p$ となる $u \in U^p$ が存在する」と「 $x \in F^p H_{\mathbb{C}}$ 」は同値。
- $\mathcal{F}^p \hookrightarrow H_{\mathbb{C}} \oplus U^p \oplus V^p \twoheadrightarrow V^p$ の合成は全射。
- $U^p \hookrightarrow H_{\mathbb{C}} \oplus U^p \oplus V^p \twoheadrightarrow H_{\mathbb{C}} \oplus U^p \oplus V^p / \mathcal{F}^p$ の合成は単射。

モジュラス付き混合 Hodge 構造の圏 $\mathbf{MHSM}$ を用いて前節の結果を次のように拡張したのが [8] の主結果である。 $\mathbf{MHSM}$ は $\mathbf{MHS}$ を充満部分圏として含むアーベル圏である。 $\mathbf{MHSM}_1$ も $\mathbf{MHSM}$ の充満部分圏とみなせる。 $(U, V$ を次数 $p = 0$ のみに台を持つ鎖とみなし、 $\mathcal{F}^0 = \mathcal{F}$, $\mathcal{F}^p = F^p H_{\mathbb{C}}$ ($p \neq 0$) とする。) 以下、 n は非負整数とする。連結非特異固有多様体 X とその上の被約とは限らない有効因子 Y, Z で、台は交わらない正規交叉因子であるものに対して、 $H = H^n(X, Y, Z)$ となる $\mathcal{H}^n(X, Y, Z) = (H, U^\bullet, V^\bullet, \{\mathcal{F}^p\}) \in$

² $H_1(X, Y, Z)$ はホモロジー、 H^n はコホモロジーのため 2 節と Y, Z の順が異なる。

MHSM が定まる。簡単に記述できる双対関手 $\vee : \mathbf{MHSM} \rightarrow \mathbf{MHSM}$ があり³、次のポアンカレ双対性が成り立つ：

$$\mathcal{H}^n(X, Y, Z)^\vee \cong \mathcal{H}^{2d-n}(X, Z, Y)(d)/\text{Tor} \quad (d = \dim X).$$

$\mathcal{H}^{2d-1}(X, Y, Z)(d)/\text{Tor}$ は $\mathbf{MHSM}_1$ に属す。対応する Laumon 1-モチーフ（定理 5）を $\text{Alb}(X, Y, Z) \in \mathcal{M}_1^L$ と書く。 $d = 1$ ならば $\text{Alb}(X, Y, Z) = J(X, Y, Z)$ である。

注意 10 加藤-Russell [10] は連結非特異固有多様体 X とその上の被約とは限らない有効因子 Y に対してモジュラス付きアルバネーゼ多様体 $\text{Alb}(X, Y) \in \mathbf{AG}$ を構成した。 Y_{red} が正規交叉のとき、これは我々の $\text{Alb}(X, Y, \emptyset)$ に一致する。この意味で、我々の構成は加藤-Russell の部分的な一般化になっている。

注意 11 Bloch-Srinivas [4] は **enriched Hodge** 構造の圏 **EHS** を定義し、固有（だが特異点は許す）多様体 S に対し $H^n(S) \in \mathbf{EHS}$ を構成した。これは Barbieri-Viale [2] と Mazzari [12] により形式 **Hodge** 構造に拡張された。これらは（微妙な違いはあるが）おおむね我々の圏 **MHSM** で $V^\bullet = 0$ となるもの全体のなす部分圏と同値である。これらは双対性を持たないことが問題となっていたが、その理由は脚注 3 で説明できる。

参考文献

- [1] J. Ayoub and L. Barbieri-Viale, *Nori 1-motives*, Math. Ann. **361** (2015), 367–402.
- [2] L. Barbieri-Viale, *Formal Hodge theory*, Math. Res. Lett. **14** (2007), no. 3, 385–394.
- [3] F. Binda and S. Saito, *Relative cycles with moduli and regulator maps*, To appear in J. Inst. Math. Jussieu.
- [4] S. Bloch and V. Srinivas, *Enriched Hodge structures*, Algebra, arithmetic and geometry, Part I, II (Mumbai, 2000), Tata Inst. Fund. Res. Stud. Math., vol. 16, Tata Inst. Fund. Res., Bombay, 2002, pp. 171–184.
- [5] P. Deligne, *Théorie de Hodge. III*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1974), no. 44, 5–77.
- [6] N. Fakhruddin, *Notes of Nori’s Lectures on Mixed Motives*, TIFR, Mumbai, 2000.
- [7] F. Ivorra and T. Yamazaki, *Nori motives of curves with modulus and Laumon 1-motives*, Canad. J. Math., **70**(2018), 868–897.
- [8] F. Ivorra and T. Yamazaki, *Mixed Hodge structures with modulus*, preprint (2017), <https://arxiv.org/abs/1712.07423>.
- [9] B. Kahn, S. Saito and T. Yamazaki, *Motives with modulus*, preprint (2015), <https://arxiv.org/abs/1511.07124>.
- [10] K. Kato and H. Russell, *Albanese varieties with modulus and Hodge theory*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **62** (2012), no. 2, 783–806.
- [11] M. Kerz, S. Saito *Chow group of 0-cycles with modulus and higher dimensional class field theory*, Duke Math. J. **165** (2016), no. 15, 2811–2897.
- [12] N. Mazzari, *Extensions of formal Hodge structures*, Comm. Algebra **39** (2011), no. 4, 1372–1393.
- [13] K. Rülling and T. Yamazaki, *Suslin homology of relative curves with modulus*, J. Lond. Math. Soc. (2) **93** (2016), no. 3, 567–589.
- [14] J.-P. Serre, *Algebraic groups and class fields*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 117, Springer-Verlag, New York, 1988, Translated from the French.

³ 例えば $(0, U^\bullet, 0, 0)^\vee = (0, 0, V^\bullet, V^\bullet)$, $V^p = \text{Hom}(U^p, \mathbb{C})$ である。**MHS** への制限は $\vee$ に一致する。