超平面配置の対数的ベクトル場とその自由性

阿部拓郎 *

平成 30 年 7 月 11 日

1 超平面配置とその自由性

超平面配置とは, ベクトル空間中の超平面の有限族のことである. 例えば座標平面をすべて集めたものが一例であるし, あるいは実平面中であれば平面中に適当に直線を有限個ばらまいたものも一例である. また, 有限鏡映群 (例えば Weyl 群) が与えられれば, それに属する鏡映の鏡映面全体の集合も一例である. これについては, 対応する超平面配置と元の群, 不変式環や超平面配置を除いた補空間などの間に汲めど尽きせぬ多くの面白い数学が現れることを多くの方はご存知であろう. 超平面配置研究の一つの源流は間違いなくこの有限鏡映群やルート系に関連した数学の一般化である. 本講演では, その代数的側面に特に重きを置く. 換言すれば, 任意の超平面配置に対し, その補空間の位相幾何や超平面配置自体の情報を多く持った代数的対象を定式化し, それがいつ, ワイル群における不変式環のような良い性質を持つかといったことについて, 論じてゆきたい.

そのために, まず超平面配置と関連する代数のための定義を行う. $\mathbb{K}$ を任意の体とし, $V=\mathbb{K}^\ell$, $S=\mathrm{Sym}^*(V^*)\simeq\mathbb{K}[x_1,\ldots,x_\ell]$ をその座標環とする. V 中の超平面配置 $\mathcal{A}$ とは, V 中の原点を通る超平面の有限族のことである. 一般には原点を通らないものも考えるが, 本講演においては線型なもののみを扱うこととする. $H\in\mathcal{A}$ に対して, $\ker\alpha_H=H$ となる線型形式 $\alpha_H\in V^*$ を一つ選び固定しておく. 超平面配置 $\mathcal{A}$ の定義多項式を $Q(\mathcal{A}):=\prod_{H\in\mathcal{A}}\alpha_H$ とかく. ここで, $\mathbb{K}$ 線型な次数付 S 導分加

*九州大学マス・フォア・インダストリ研究所. email:abe@imi.kyushu-u.ac.jp

群 $\mathrm{Der}\, S := \oplus_{i=1}^{\ell} S\partial_{x_i}$ の部分加群として, $\mathcal{A}$ の代数たる対数的ベクトル場 $D(\mathcal{A})$ が以下のように定義される:

定義 1.1

$$D(\mathcal{A}) := \{\theta \in \mathrm{Der}\, S \mid \theta(\alpha_H) \in S\alpha_H\ (\forall H \in \mathcal{A})\}$$

を超平面配置 $\mathcal{A}$ の**対数的ベクトル場**と呼ぶ.

$D(\mathcal{A})$ は階数が ℓ の次数付 S 加群である. また $D(\mathcal{A})$ は反射加群, すなわち自分自身からその二重双対への自然な写像 $D(\mathcal{A}) \to (D(\mathcal{A})^*)^* := \mathrm{Hom}_S(\mathrm{Hom}_S(D(\mathcal{A}), S), S)$ が同型になっている. これはこれで十分良い性質なのであるが, 一般に（というか generic に）$D(\mathcal{A})$ は S 自由加群にはならない. よって自由加群となる場合に以下のように名前を付ける.

定義 1.2
$\mathcal{A}$ が**自由（配置）**で**指数**が $\exp(\mathcal{A}) = (d_1, \ldots, d_\ell)$ であるとは, ある斉次な $\theta_1, \ldots, \theta_\ell \in D(\mathcal{A})$ が存在して, $D(\mathcal{A}) = \oplus_{i=1}^{\ell} S\theta_i$ となっているときにいう. ここで $\theta = \sum_{i=1}^{\ell} f_i \partial_{x_i} \in \mathrm{Der}\, S$ が斉次で次数 d とは, $f_i = 0$ もしくは f_i が d 次の斉次式という条件が任意の i で成り立っているきにいう.

例 1.3
(1) $\prod_{i=1}^{\ell} x_i = 0$ で定義される $\mathbb{K}^\ell$ 中の配置を $\mathcal{A}$ とする. まず容易に $\theta_i := x_i\partial_{x_i} \in D(\mathcal{A})$ が確認できる. なんとなれば $x_i\partial_{x_i}(x_j) = x_i\delta_{ij} \in Sx_j$ となるからである. 更にこれも容易に, $\theta_1, \ldots, \theta_\ell$ が $D(\mathcal{A})$ の自由基底をなすこともわかる（例えば後に出てくる定理 *3.1* 等を用いればよい）. このとき $\exp(\mathcal{A}) = (1, \ldots, 1)$ となることを, 上の次数の定義は示している.

(2) $x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3) = 0$ で定義される $\mathbb{C}^3$ 中の配置を $\mathcal{B}$ とすると, これは自由配置ではない. より具体的に,

$$\widetilde{D(\mathcal{A})} \simeq \mathcal{O}(-1) \oplus T_{\mathbb{P}^2}(-3)$$

となることがわかる. あるいは $D(\mathcal{A})$ が極小自由分解

$$0 \to S[-3] \to S[-1] \oplus S[-2]^{\oplus 3} \to D(\mathcal{A}) \to 0$$

を持つ, と書いてもよい.

もちろん加群の中でその構造が最も簡単できれいなものは自由加群であり, その意味で自由配置の定義は自然である. しかしいきなり対数的ベ

クトル場を定義されて, 自由配置の定義をされても, なにがうれしいのかよくわからないままであろうと思う．そこで自由配置におけるもっとも重要な定理を以下に述べよう．

定理 1.4 ([13], 寺尾の分解定理)
$\mathcal{A}$ が $V = \mathbb{C}^\ell$ 中の自由配置で $\exp(\mathcal{A}) = (d_1, \ldots, d_\ell)$ であるとする．このとき

$$Poin(V \setminus \cup_{H\in\mathcal{A}} H; t) = \prod_{i=1}^{\ell}(1 + d_i t).$$

すなわち, 位相幾何的に意味のある指数を, 代数を用いて定義できる配置が自由配置である, ということができる．実は複素ベクトル空間中の超平面配置の補空間のベッチ数は, 配置がどのように交わっているかという情報のみから（自由配置でなくとも）計算できる．よって定理 1.4 は基礎体によらず超平面配置の代数とトポロジー, あるいは組み合わせ論を結びつける定理である．自由性は, 対数的ベクトル場の層化が直線束の直和に分裂していることと同値なので, 代数幾何とトポロジー・組み合わせ論を結び付ける結果ともいえる．この寺尾宏明氏による結果が決定打となり, 自由配置研究は超平面配置研究の中でも極めて重要なトピックの一つとなった．

自由配置は以来, 様々な方向から研究をされてきた．最も有用なのはやはり分解定理を用いて様々な配置のポアンカレ多項式を決定するという流れであり, 吉永正彦氏による Edelman-Reiner 予想の解決 ([16]) などは, その白眉といえる．他方, どのような配置が自由配置か, という問題は一般には極めて難しい．実際, 以下の問題が未解決のまま今も残されている．

予想 1.5 (寺尾予想)
$\mathcal{A}$ が自由配置か否かは, その組み合わせ論的情報にのみ依存してきまる．

組み合わせ論的情報とは, 以下で定義されるものである：

$$L(\mathcal{A}) := \{\bigcap_{H\in\mathcal{B}} \mid \mathcal{B} \subset \mathcal{A}\}.$$

つまり超平面配置たちの元がどのように交わっているかのみの情報から自由性が決まるか, という問題である．$D(\mathcal{A})$ は反射的なので Auslander-Buchsbaum の定理を用いることで, 二次元の場合はすべて自由となる．よって $\ell \geq 3$ で初めて寺尾予想は意味を持つが, $\ell = 3$ の場合であっても解決のめどは全く立っていないし, 正しいか反例があるかの見通しも立っ

ていない. 本講演では, 寺尾予想に対して考えられる基本的なアプローチといえる, 自由性の判定法や十分条件を通して, 自由配置研究の最新の状況を概説したい.

2　超平面配置の基礎事項

まず超平面配置講演で必ず出てくるいくつかの記号をまとめておく. 自由配置の研究のみならず, 超平面配置の研究では組み合わせ論との関係を抑えておくことが重要である. 前の章でも定義したが, 超平面配置の組み合わせ論的情報といえば, 以下の交差格子のことを指す：

定義 2.1

$$L(\mathcal{A}) := \{\bigcap_{H \in \mathcal{B}} H \mid \mathcal{B} \subset \mathcal{A}\}$$

を A の**交差格子**と呼ぶ.

$L(\mathcal{A})$ は $\mathcal{A}$ に属する超平面たちがどのように交わっているかを知っているが,　逆に言えばそれしか知らない. 幾何学的な情報は全て忘れ去られている. この離散的な情報（これは実際, 超平面配置に対応する実現可能なマトロイドと全く同じ情報しかもっていない）から, 超平面配置のどのような性質が決定されるかを考察することが, 超平面配置研究の要諦の一つである. しかし実際, $L(\mathcal{A})$ の情報は使いづらい. よって交差格子から数値的な情報を取り出すことでわかりやすくすることが行われる. まず $\mathcal{B} = \emptyset$ に対応する交差格子の元として全空間 V が対応することに注意しよう. よってこれを起点として, 以下のようにメビウス関数が定義できる.

定義 2.2
$\mu : L(\mathcal{A}) \to \mathbb{Z}$ を, $\mu(V) = 1$ 及び $V \neq X \in L(\mathcal{A})$ に対して, 余次元が低い順に

$$\mu(X) = -\sum_{Y \in L(\mathcal{A}),\ X \subsetneq Y \subset V} \mu(Y)$$

と定義する. これを**メビウス関数**と呼ぶ. これを用いて, $\mathcal{A}$ の**ポアンカレ多項式** $\pi(\mathcal{A};t)$ を

$$\pi(\mathcal{A};t) := \sum_{X \in L(\mathcal{A})} \mu(X)(-t)^{\operatorname{codim} X}$$

で, また $\mathcal{A}$ の**特性多項式** $\chi(\mathcal{A};t)$ を

$$\chi(\mathcal{A};t) := \sum_{X \in L(\mathcal{A})} \mu(X) t^{\dim X}$$

でそれぞれ定義する.

これらがまず最も基本的な超平面配置の組み合わせ論である. なおポアンカレ多項式という名前の由来は想像できると思うが, $M(\mathcal{A}) := V \setminus \cup_{H \in \mathcal{A}} H$ とおいたとき, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ならば

$$\pi(\mathcal{A};t) = \mathrm{Poin}(M(\mathcal{A});t)$$

となるという Orlik-Solomon の結果による ([9]). 実は彼らはさらに強く, $H^*(M(\mathcal{A});\mathbb{Z})$ の環構造までもが $L(\mathcal{A})$ にのみ依存して決まるという結果を証明している. これが組み合わせ論のみで超平面配置のある不変量が決定された最も大きな結果であり, これ以降どのような性質が組み合わせ論的かを問う問題が多く登場することになり, 寺尾予想もその延長線上にあるといえる.

注意 2.3
定理 *1.4* は任意の基礎体の上で実は成立する. つまり $\mathcal{A}$ が自由で $\exp(\mathcal{A}) = (d_1, \ldots, d_\ell)$ ならば,

$$\pi(\mathcal{A};t) = \prod_{i=1}^{\ell} (1 + d_i t)$$

と書ける. これは代数と組み合わせ論・トポロジーをつなぐ定理である. 同時にこの定理の逆は不成立である. すなわちポアンカレ多項式が一次式の積に分解していても, 自由でない配置は存在する.

さて, あとで用いるので, 以下の定義をしておこう：

定義 2.4

$$\pi(\mathcal{A};t) = \sum_{i=0}^{\ell} b_i(\mathcal{A}) t^i$$

とかいて, $b_i(\mathcal{A})$ を $\mathcal{A}$ の i 番目のベッチ数と呼ぶ. 定義からは非自明であるが, $b_i(\mathcal{A})$ は必ず非負整数となる. また $b_0(\mathcal{A}) = 1,\ b_1(\mathcal{A}) = |\mathcal{A}|$ は定義から直ちに従う.

続いて超平面配置を考える際の最も基本的な操作である, 局所化と制限について述べる.

定義 2.5
$X \in L(\mathcal{A})$ に対して, $\mathcal{A}$ の X での**局所化** $\mathcal{A}_X$ を,

$$\mathcal{A}_X := \{H \in \mathcal{A} \mid X \subset H\}$$

で, また $\mathcal{A}$ の X への**制限** $\mathcal{A}^X$ を,

$$\mathcal{A}^X := \{X \cap H \mid H \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_X\}$$

でそれぞれ定める. $\mathcal{A}_X$ は V 中の, $\mathcal{A}^X$ は $X \simeq \mathbb{K}^{\dim X}$ 中の超平面配置である.

代数幾何あるいは可換環論的に言えば, $\mathcal{A}_X$ は X の周囲の状況のみに注目するので, $D(\mathcal{A}_X)$ は反射層 $\widetilde{D(\mathcal{A})}$ の X での stalk を取る, あるいは X に対応する素イデアルでの $D(\mathcal{A})$ の局所化と対応している. 他方 $\mathcal{A}^X$ は若干難しい. 単純には加群の制限なのでテンソルを見るべきなのであるが, そこにずれがあるところが難しいところであり面白いところである. つまり X の座標環を S^X とかいたとき, $D(\mathcal{A}^X) \not\simeq D(\mathcal{A}) \otimes_{\mathbb{K}} S^X$ となる. これはある意味当然で, 前者は制限の重複度を考慮していないためであり, 当然後者の方が代数幾何的には理解しやすい. ところが代数幾何的にした結果, いわゆる『generic な点』という問題が発生し, 寺尾予想で重要な組合せ論との関連が薄れてしまうという問題がおきる. このどちらもを上手に行き来することが今, 研究上重要になっている.

3 自由性判定法

もし寺尾予想にアプローチをするならば, 自由配置を判定する方法が極めて重要となる. そのための最も基本となるのは, 対数的ベクトル場の生みの親ともいえる齋藤恭司氏による齋藤の判定法である.

定理 3.1 (齋藤の判定法, [11])
$\theta_1, \ldots, \theta_\ell \in D(\mathcal{A})$ が基底となるための必要十分条件は,

$$\det(\theta_i(x_j)) = cQ(\mathcal{A}) \quad (\exists c \in \mathbb{K}^\times)$$

となることである.　またこれは, $\theta_1, \ldots, \theta_\ell$ が斉次かつ S 上独立で, $\sum_{i=1}^{\ell} \deg \theta_i = |\mathcal{A}|$ となることとも同値である.

例 3.2
(1) $\mathcal{A}$ を $\mathbb{K}^2$ 中の配置とすると, これは常に自由なことが, 斎藤の判定法からも直ちに分かる. 空集合配置の場合は自明なので, 座標を適当に取り替えて $\{x_1 = 0\} \in \mathcal{A}$ としてよい. すると

$$\theta_E := x_1 \partial_{x_1} + x_2 \partial_{x_2},\ \frac{Q(\mathcal{A})}{x_1} \partial_{x_2}$$

は明らかに $D(\mathcal{A})$ の元であり, 斎藤の判定法から基底となることもわかる. 特に二次元配置の指数は $(1, |\mathcal{A}| - 1)$ となる.

(2) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ とし $Q(\mathcal{A}_\ell) := \prod_{1 \le i < j \le \ell+1} (x_i - x_j)$ たる定義多項式を持つ $\mathbb{R}^{\ell+1}$ 中の配置 $\mathcal{A}_\ell$ を考える. これは無論 A_ℓ 型のワイル群（つまり $\ell + 1$ 次対称群）の鏡映に対応する鏡映面全体であり, A_ℓ 型のワイル配置と呼ばれる.

$$\theta_i := \sum_{j=1}^{\ell+1} x_j^i \partial_{x_j}\ (i = 0, \ldots, \ell)$$

とおくと, $\theta_i \in D(\mathcal{A}_\ell)$ は自明で, かつヴァンデルモンド行列式と斎藤の判定法を合わせることで $\mathcal{A}_\ell$ は自由で指数が $(0, 1, \ldots, \ell)$ となることがわかる. この指数はワイル群としての対称群のそれと一致しているが, これはすべてのコクセター配置に成立する結果であり, 斎藤恭司氏により示された. このように自由配置は指数の観点からのワイル群の一般化といえる.

齋藤の判定法は例 3.2 のような実例への応用のみならず, 理論的な重要性も大きい. すなわち自由性がある行列式, あるいは独立性と次数の情報だけから決まるという事実を用いて, 様々な定理が導かれるからである.

次に吉永の判定法を述べる. これも齋藤の判定法を用いているが, 更に代数幾何的な視点を導入しているところに大きな特徴がある. 吉永の判定法を述べるために多重配置の概念を導入する：

定義 3.3 ([18])
関数 $m : \mathcal{A} \to \mathbb{Z}_{>0}$ を $\mathcal{A}$ 上の**重複度**といい, $(\mathcal{A}, m)$ を**多重配置**と呼ぶ. また

$$D(\mathcal{A}, m) := \{\theta \in \operatorname{Der} S \mid \theta(\alpha_H) \in S\alpha_H^{m(H)}\ (\forall H \in \mathcal{A})\}$$

を $(\mathcal{A}, m)$ の**対数的ベクトル場**と呼ぶ. 重複度がない場合と同様, これは次数付反射的 S 加群であり, 一般には自由ではない. よって**自由性**や**指数**が同様に定義される. また $\ell = 2$ ならばやはり $(\mathcal{A}, m)$ も常に自由である.

唐突に多重配置が出てきたが, これは実は代数幾何的には極めて自然な対象である. それを説明するために少し言葉を用意しよう. $\theta_E := \sum_{i=1}^{\ell} x_i \partial_{x_i}$ をオイラー微分という. 明らかにこれは全ての $\mathcal{A}$ に対して $\theta_E \in D(\mathcal{A})$ である. $\mathcal{A} \neq \emptyset$ ならば

$$D_H(\mathcal{A}) := \{\theta \in D(\mathcal{A}) \mid \theta(\alpha_H) = 0\}$$

としたとき,

$$D(\mathcal{A}) = S\theta_E \oplus D_H(\mathcal{A})$$

となることが容易にわかる. よって $D_H(\mathcal{A}) \simeq D(\mathcal{A})/S\theta_E$ なので, この加群の構造は $H \in \mathcal{A}$ の取り方によらない. またこの直和分解から $\mathcal{A}$ の自由性は $D_H(\mathcal{A})$ の自由性と同値である. ここまで準備して, 以下の定義を行う.

定義 3.4 ([18])
$H \in \mathcal{A}$ に対して ***Ziegler* 重複度** $m^H : \mathcal{A}^H \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を, $m^H(X) := |\{L \in \mathcal{A} \mid H \cap L = X\}|$ $(X \in \mathcal{A}^H)$ で定義する. $(\mathcal{A}^H, m^H)$ を $\mathcal{A}$ の H への ***Ziegler* 制限**という. また ***Ziegler* 制限射** $\pi = \pi_H : D_H(\mathcal{A}) \to D(\mathcal{A}^H, m^H)$ が, $\theta \in D_H(\mathcal{A})$ を *modulo* α_H することで得られる.

単純な制限ではなく, 制限として現れる超平面を重複度こみで, つまり被約ではない構造を考えましょうという代数幾何的には当たり前の概念であるが, これは [18] によるので割と最近の概念である. Ziegler 制限射をベクトル束関係者が見れば, この層化版はきっと

$$\widetilde{D_H(\mathcal{A})} \to \widetilde{D_H(\mathcal{A})}|_H$$

といういつもの制限射であろうと思われるであろうが, 実は一般にはそうはならないところが悩ましい. つまり一般には

$$\widetilde{D_H(\mathcal{A})}|_H \not\simeq D(\widetilde{\mathcal{A}^H, m^H})$$

なのである. このギャップを埋める条件を正確に見つけたのが吉永正彦氏の論文 [16], [17] である. 個人的にこの 2 つの論文は, その登場以前と以後とで, 自由配置研究を明確に変えた, パラダイムシフト的な論文であると考えている. 実際これ以降多重配置それ自体の研究が急速に進んだ ([6], [7], [14], [15] など). そのような重要な意義を持つ, いわゆる吉永の判定法を, 現在流に整理統合した形で以下に述べる.

定理 3.5 (吉永の判定法, [16], [17], [8])
$\ell \geq 3$ とし, $H \in \mathcal{A}$ を取る. このとき $\mathcal{A}$ が自由であるための必要十分条件は, *(1)* $(\mathcal{A}^H, m^H)$ が自由, かつ *(2)* 任意の $X \in L(\mathcal{A}^H)$, $\operatorname{codim}_V X = 3$ に対して $\mathcal{A}_X$ が自由であることである. *(2)* は *(3)* $b_2(\mathcal{A}) - |\mathcal{A}| + 1 = c_2(D(\widetilde{\mathcal{A}^H, m^H}))$ と置き換えることができる.

注意 3.6
ちなみに $b_2(\mathcal{A}) - |\mathcal{A}| + 1 = c_2(\widetilde{D_H(\mathcal{A})})$ が常に成立しているので, 上の等式は代数幾何的なものと見ても良い.

(2) もしくは (3) は $\widetilde{D_H(\mathcal{A})}|_H \simeq D(\widetilde{\mathcal{A}^H, m^H})$ を成立させるための条件であり, これが余次元 3 の情報だけでよい, あるいは第二ベッチ数とチャーンクラスの情報だけで良いところがポイントである. そうなってしまうとあとは Horrocks の判定法に持ち込めるわけで, ここに着目したのが吉永氏の彗眼である. 吉永の判定法は, 次元の帰納法が極めて有効に機能することを示した点で極めて意義深い. 特に $\ell = 3$ ならばその Ziegler 制限は常に自由なので条件 (1) は常に満たされる. よって (3) $b_2(\mathcal{A}) - |\mathcal{A}| + 1 = c_2(D(\widetilde{\mathcal{A}^H, m^H}))$ の成立が問題であるが, 左辺は明らかに組み合わせ論から決まるので, 右辺が問題である. 第二チャーン類は簡単ではないが可換環論的な計算方法があり, 特に二次元多重配置の場合, それが自由なので指数の積として求まる. すなわち $\exp(\mathcal{A}^H, m^H) = (d_1, d_2)$ ならば $c_2(D(\widetilde{\mathcal{A}^H, m^H})) = d_1 d_2$ となる. よって二次元多重配置の指数が組合せ論的であれば, $\ell = 3$ の場合の寺尾予想は解決するのだが, ここで以下の例が立ちはだかる.

例 3.7

$$x^3 y^3 (x - y)(x + \alpha y) = 0$$

で定義される多重配置を $(\mathcal{A}_\alpha, m)$ とおく. $\alpha \neq 1$ が *generic* に動く場合には $\exp(\mathcal{A}_\alpha, m) = (4, 4)$ となるが, 例えば $\alpha = 1$ の場合には $\exp(\mathcal{A}_1, m) = (3, 5)$ となってしまい, 二次元多重配置の指数は組合せ論のみからは決まらないことがわかる. これは代数幾何的には $\mathbf{P}^2$ 中の階数 2 のベクトル束の *splitting type* が自由もしくは接束でないかぎり必ず *jumping line* を持つことと関係している. $\alpha = 1$ は *jumping line* に対応し, それ以外は *generic splitting type* を与えているわけである. どこが *jumping line* かは極めて決定しづらいため, これが前述した『*generic* な点』という現象による寺尾予想の困難さに当たる.

4 自由性に関する十分条件

この章では前の章の判定法より弱い, 十分条件を考察する. 明らかにそちらのほうが弱いのであるが, しかし十分条件には良さもある. つまり, 寺尾予想自体の解決は難しいにしても, 十分条件のほうが制約が強いぶん, どこの構造が自由性の決定にきいているかがかなり明確に見えるという点である. これは自由性の理解にも極めて重要な視点である.

さて, その十分条件の中でもっともよく使われている寺尾の加除定理をまずあげよう.

定理 4.1 ([12], 寺尾の加除定理)
$\mathcal{A}$ を空でない超平面配置とし, $H \in \mathcal{A}$ を固定する. $\mathcal{A}' := \mathcal{A} \setminus \{H\}$ とおく. この時以下の三条件のうち, 二つが成立すれば残りの一つも成立する：

(1) $\mathcal{A}$ は自由配置で $\exp(\mathcal{A}) = (d_1, \ldots, d_{\ell-1}, d_\ell)$.

(2) $\mathcal{A}'$ は自由配置で $\exp(\mathcal{A}') = (d_1, \ldots, d_{\ell-1}, d_\ell - 1)$.

(3) $\mathcal{A}^H$ は自由配置で $\exp(\mathcal{A}^H) = (d_1, \ldots, d_{\ell-1})$.

特に $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ がともに自由なら（指数の包含関係とは無関係に）, 上の三つはすべて成立.

加除定理はすなわち, 与えられた配置の自由性を, 一本少ない配置及び一次元少ない空間中の配置の自由性を用いて判定するものであり, 本数と次元の帰納法を走らせることができる. 1980 年と超平面配置創成期に示された定理ながら, いまだに自由配置判定におけるもっとも重要な定理である. この定理は, ある配置の自由性とその周りにある配置の自由性に関係があることを示唆している. 加除定理の適用例を見てみよう.

例 4.2
加除定理が最も効果を発揮するのは三次元配置の場合である. なんとなれば例 *3.2 (1)* より二次元配置は常に自由でその指数もわかっているためである. 例えば $\mathcal{A}' : x_1x_2x_3 = 0$ は自由で $(1, 1, 1)$ を指数として持つことを例 *1.3 (1)* で見た. これに $H : x - y = 0$ を付け加えてみよう. すると $\mathcal{A} := \mathcal{A}' \cup \{H\}$ であり, $\mathcal{A}^H$ は二本の直線からなる二次元空間の配置である. よって例 *3.2 (1)* から $\exp(\mathcal{A}^H) = (1, 1)$ なので加除定理から $\mathcal{A}$ も自由で $\exp(\mathcal{A}) = (1, 1, 2)$.

この加除定理を本質的に改良したのが, 以下の剰余定理である.

定理 4.3 (自由性に関する剰余定理, [1])
$H \in \mathcal{A}$ とする. もし $\mathcal{A}^H$ が自由で, かつ $\pi(\mathcal{A}^H; t)$ が $\pi(\mathcal{A}; t)$ を割り切っていれば, $\mathcal{A}$ も自由. このポアンカレ多項式間の剰余の条件は, 等式

$$b_2(\mathcal{A}) = b_2(\mathcal{A}^H) + |\mathcal{A}^H|(|\mathcal{A}| - |\mathcal{A}^H|)$$

に置き換えることができる.

剰余定理は, 加除定理で要求していた除去配置 $\mathcal{A}'$ の情報は実は不要で, 制限 $\mathcal{A}^H$ の情報さえあれば自由性をチェックできることを示している. また剰余定理と吉永の判定法は, どちらも制限の自由性＋第二ベッチ数の言葉を使っているという共通性に気付かれた方も多いだろう. 前者は重複度なし, 後者は重複度ありを考えている. 後者はそのため判定法と強い主張になっているが, 代数幾何的な難しさのため組み合わせ論からは少し離れてしまっているように思う. 他方, 剰余定理に出てくる言葉は全て組み合わせ論と相性が良い. その代わり判定法とはなっていない. 実は剰余定理は主張そのものは組み合わせ論的に書かれているが, 証明はフルに代数幾何的である. 寺尾の加除定理と吉永の判定法のいいとこどりをしたような証明になっている.

そのため剰余定理は, その主張からも明らかなように, 次元に関する帰納法と極めて相性が良い. つまり, 二次元配置の自由性に依拠して, 以下のような自由配置のカテゴリを考えることができる.

定義 4.4 ([1])
$\{X_i\}_{i=0}^{\ell-2}$ が超平面配置 $\mathcal{A}$ の**旗**であるとは, $X_i \in L(\mathcal{A})$, $\operatorname{codim}_V X_i = i$ $(i = 0, \ldots, \ell-2)$ かつ $V = X_0 \supset X_1 \supset \cdots \supset X_{\ell-2}$ である時に言う. $\{X_i\}$ が**剰余旗**であるとは, $\pi(\mathcal{A}^{X_i}; t)$ が $\pi(\mathcal{A}^{X_{i-1}}; t)$ を任意の $i = 1, 2, \ldots, \ell-2$ について割り切っている時に言う. この剰余の条件は以下の一つの等式

$$b_2(\mathcal{A}) = \sum_{i=1}^{\ell-2} |\mathcal{A}^{X_i}|(|\mathcal{A}^{X_{i-1}}| - |\mathcal{A}^{X_i}|)$$

の成立に置き換えることができる. 剰余旗を持つ配置を**剰余的自由配置**と呼ぶ.

剰余旗の定義, 剰余定理及び二次元配置の自由性から, 以下は明らかである.

系 4.5
剰余的自由配置は自由配置である. また剰余旗を持つかどうかは組合せ論的に決まる.

知られている多くの自由配置は剰余的自由配置であり, 現在知られている自由配置のクラスの中で剰余的自由配置は最も大きなものである. しかもその主張を読み解けば, 剰余的自由配置については数値的な組み合わせ情報のみが自由性を決定している. これはかなり弱い情報であるが, それでも自由性を決定しうるという主張である.

注意 4.6
無論予想できると思うが, 剰余的自由配置でない自由配置も存在する.（存在しなかったら寺尾予想はとけてしまう！） 実際, どの超平面を除去しても, またどの超平面を加えても自由とならないような自由配置は存在する. いわゆる完全に孤立して存在する自由配置であるが, こういったものはその性格上加除定理や剰余定理では扱えない. 斎藤の判定法や吉永の判定法を使わないと扱えない対象である.

講演ではここまでを詳しく述べた上で, さらなる自由配置の一般論の進展 ([2]), ルート系に関連した自由性と指数・ルートの高さとの関係 ([3]), 正則冪零 Hessenberg 多様体のコホモロジー環との関係 ([4]), 及び Artin 環, 完全交差環との関係 ([5]) ついて時間の許す限りより詳しく述べることとしたい.

参考文献

[1] T. Abe, Divisionally free arrangements of hyperplanes. *Invent. Math.* **204** (2016), no. 1, 317–346.

[2] T. Abe, Deletion theorem and combinatorics of hyperplane arrangements. *Math. Ann.*, https://doi.org/10.1007/s00208-018-1713-9 (online).

[3] T. Abe, M. Barakat, M. Cuntz, T. Hoge and H. Terao, The freeness of ideal subarrangements of Weyl arrangements. *J. Eur. Math. Soc.*, **18** (2016). no. 6, 1339–1348.

[4] T. Abe, T. Horiguchi, M. Masuda, S. Murai and T. Sato, Hessenberg varieties and hyperplane arrangements. arXiv:1611.00269.

[5] T. Abe, T. Maeno, S. Murai and Y. Numata, The theory of Solomon-Terao algebras. arXiv:1802.04056 (2018).

[6] T. Abe, H. Terao and M. Wakefield, The characteristic polynomial of a multiarrangement. *Adv. in Math.*, **215** (2007), 825–838.

[7] T. Abe, H. Terao and M. Wakefield, The Euler multiplicity and addition-deletion theorems for multiarrangements. *J. London Math. Soc.*, **77** (2008), no. 2, 335–348.

[8] T. Abe and M. Yoshinaga, Free arrangements and coefficients of characteristic polynomials. *Math. Z.*, **275** (2013), Issue 3, 911-919.

[9] P. Orlik and L. Solomon, Combinatorics and topology of complements of hyperplane arrangements. *Invent. Math.* **56** (1980), 167–189.

[10] P. Orlik and H. Terao, *Arrangements of hyperplanes.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **300**. Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[11] K. Saito, Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo* **27** (1980), 265–291.

[12] H. Terao, Arrangements of hyperplanes and their freeness I, II. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo* **27** (1980), 293–320.

[13] H. Terao, Generalized exponents of a free arrangement of hyperplanes and Shephard-Todd-Brieskorn formula. *Invent. Math.* **63** (1981), 159–179.

[14] A. Wakamiko, On the exponents of 2-multiarrangements. *Tokyo J. Math.* **30** (2007), no. 1, 99116.

[15] M. Wakefield and S. Yuzvinsky, Derivations of an effective divisor on the complex projective line. *Trans. Amer. Math. Soc.* **359** (2007), 4389–4403.

[16] M. Yoshinaga, Characterization of a free arrangement and conjecture of Edelman and Reiner. *Invent. Math.* **157** (2004), no. 2, 449–454.

[17] M. Yoshinaga, On the freeness of 3-arrangements. *Bull. London Math. Soc.* **37** (2005), no. 1, 126–134.

[18] G. M. Ziegler, Multiarrangements of hyperplanes and their freeness. Singularities (Iowa City, IA, 1986), 345–359, Contemp. Math., **90**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989.