

非 Riemann 等質空間のコンパクト商のコホモロジー

森田 陽介 (京都大学)*

概要

Lie 群 G の離散部分群 Γ が等質空間 G/H に固有かつ自由に作用するとき、商空間 $\Gamma \backslash G/H$ は G/H を局所的なモデルとする多様体になる。このとき $\Gamma \backslash G/H$ を Clifford–Klein 形、 Γ を G/H の不連続群と呼ぶ。非 Riemann 等質空間の Clifford–Klein 形の大域幾何学は 1980 年代後半の小林俊行による仕事に端を発し、現在まで様々な手法によって研究されてきた。この講演では、Lie 環の相対コホモロジーと Clifford–Klein 形の de Rham コホモロジーを比較することで得られる、コンパクト Clifford–Klein 形の存在に対する障害を紹介する。また、その障害が Sullivan 代数を通じて不変式の言葉で言い換えられることを説明する。

1. イントロダクション

G を Lie 群、 H を G の閉部分群とする。この節では簡単のため、 G は等質空間 G/H に効果的に作用するものと常に仮定する。 G の離散部分群 Γ で G/H を左から割った空間 $\Gamma \backslash G/H$ が多様体になるとき、 Γ を不連続群、 $\Gamma \backslash G/H$ を Clifford–Klein 形という。このとき、 $\Gamma \backslash G/H$ は G/H を局所的なモデルとする多様体、すなわち、 G/H の開集合を G の元による左移動で貼り合わせて得られる空間になっていることを注意しておく。 G/H 上の G -不変な幾何構造は $\Gamma \backslash G/H$ 上に自然に遺伝する。

例 1. $G = \mathrm{PO}(n, 1)$, $H = \mathrm{O}(n)$ のとき、 G/H は n 次元双曲空間、 G はその上の等長同型群である。このとき G/H の Clifford–Klein 形とは、(完備な) n 次元双曲多様体のことに他ならない。同様に、

$$G = \begin{cases} \mathrm{O}(p, q+1) & (q \geq 2), \\ \widetilde{\mathrm{O}}(p, 2) & (q = 1), \end{cases} \quad H = \mathrm{O}(p, q)$$

のとき、 G/H の Clifford–Klein 形とは、符号 (p, q) で断面曲率が恒等的に -1 に等しい完備な擬 Riemann 多様体のことに他ならないことが知られている。例えば $q = 1$ のときが反 de Sitter 多様体、 $p = 1$ のときが de Sitter 多様体である。

一般に、商 $\Gamma \backslash G/H$ が多様体になるためには、 Γ の G/H への作用が固有 (固有不連続ともいう) かつ自由なことが必要かつ十分であることがよく知られている。また、 Γ -作用が自由ではないが固有なときには、商空間は orbifold (V-多様体) になる。一方 Γ -作用が固有でない場合、たとえ作用が自由だったとしても、商は非 Hausdorff な、幾何学的に素性の悪い空間になる。

H が G のコンパクト部分群の場合、あるいは同値なことだが G/H が G -不変な Riemann 計量を持つ場合、任意の G の離散部分群 Γ が G/H に固有に作用する。従ってこの場合、Clifford–Klein 形を研究することと G の離散部分群を研究することは、ある意味ではほぼ同値である (もちろん正確に言えば、 Γ の作用がいつ自由になるかは問

本研究は科研費 (課題番号:17H06784) の助成を受けたものである。

* 〒606-8502 京都市左京区北白川追分町 京都大学 大学院理学研究科 数学教室
e-mail: yosuke.m@math.kyoto-u.ac.jp

題であるが、多くの場合、 Γ を指数有限の部分群と取り替えることでこの問題は簡単に回避できる). 一方 H が非コンパクトな部分群の場合には、 Γ の G/H への作用は固有であるとは限らず、Clifford–Klein 形の研究はより難しくなる. 1980 年代後半の小林俊行による研究 ([9]) 以降、 H が非コンパクトな状況での Clifford–Klein 形の大域幾何学が本格的に研究され始めた. 特に以下の問題は小林の研究以来、非 Riemann 等質空間の Clifford–Klein 形の研究において中心的な問いの一つである:

問題 2. コンパクトな Clifford–Klein 形を持つような等質空間を全て決定せよ.

なお、コンパクトな Clifford–Klein 形はしばしば単にコンパクト商と呼ばれる.

例 1 より、次は問題 2 の特別な場合である:

問題 3. コンパクトで断面曲率が恒等的に -1 に等しい符号 (p, q) の完備な擬 Riemann 多様体が存在するような $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ を全て決定せよ.

問題 2 に対するアプローチとして、Benoist–小林の固有性判定法 ([1], [12]) に基づく Lie 群論的手法や、コサイクル超剛性定理を利用する手法、行列要素の漸近挙動の解析に基づく手法、Lie 環のコホモロジーと Clifford–Klein 形の de Rham コホモロジーを比較するコホモロジー的手法などがある (詳しくは [13], [14], [15], [17], [19] などの概説を参照されたい). しかし、問題 2 はもちろん問題 3 も未だ完全な解答は得られていない. 例えば (p, q) が $(4, 2)$ や $(6, 2)$ のとき、問題 3 は未解決である.

本講演では、コホモロジー的手法によるコンパクト商の存在問題の研究について紹介する. この手法による研究は、小林–小野 [16] に端を発する. その後、彼らのアイディアをさらに発展させることで、コンパクト商の存在に対する障害が幾つか発見されている (Benoist–Labourie [2], M. [20], [22], [23], Tholozan [30]).

2. Lie 環の相対コホモロジーと de Rham コホモロジー

記述を簡単にするため、以降では常に G, H は線型な連結 Lie 群であると仮定する.

定義 4. 外積代数 $\Lambda \mathfrak{g}^*$ 上の微分 d を

$$(d\alpha)(X_1, \dots, X_{p+1}) = \sum_{1 \leq i < j \leq p+1} \alpha([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X_i}, \dots, \widehat{X_j}, \dots, X_{p+1})$$

$$(\alpha \in \Lambda^p \mathfrak{g}^*, X_1, \dots, X_{p+1} \in \mathfrak{g})$$

で定義すると、部分代数 $(\Lambda(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*)^{\mathfrak{h}}$ は d について閉じている. $((\Lambda(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*)^{\mathfrak{h}}, d)$ のコホモロジーを $H^*(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}; \mathbb{R})$ と書き、 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の相対コホモロジーと呼ぶ.¹

G/H 上の微分形式全体のなす空間を $\Omega^\bullet(G/H)$ 、その G -不変部分を $\Omega^\bullet(G/H)^G$ と書くことにすると、

$$\Omega(G/H)^G \xrightarrow{\sim} (\Lambda(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*)^{\mathfrak{h}}, \quad \alpha \mapsto \alpha_{eH}$$

という同型が成り立ち、この同型のもとで微分形式の外微分は上述の d に対応する. したがって Lie 環の相対コホモロジーとは、 G/H 上の G -不変な微分形式から定まるコホモロジーのことに他ならない.

等質空間 G/H の Clifford–Klein 形 $\Gamma \backslash G/H$ が与えられたとき、

$$\eta : (\Lambda(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*)^{\mathfrak{h}} \simeq \Omega(G/H)^G \hookrightarrow \Omega(G/H)^\Gamma \simeq \Omega(\Gamma \backslash G/H)$$

¹ 本講演では、自明表現 $\mathbb{R}$ を係数とするコホモロジーしか扱わない.

という包含写像が自然に定まる. η はコホモロジーの間の準同型

$$\eta : H^\bullet(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}; \mathbb{R}) \rightarrow H^\bullet(\Gamma \backslash G/H; \mathbb{R})$$

を誘導する.

補題 5 (Bott–Haefliger [4], 小林–小野 [16]). Clifford–Klein 形 $\Gamma \backslash G/H$ がコンパクトならば,

$$\eta : H^N(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}; \mathbb{R}) \rightarrow H^N(\Gamma \backslash G/H) \quad N = \dim(G/H)$$

は単射.

証明. $H^N(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}; \mathbb{R})$ の 0 でない元 $[\alpha]$ を任意に取る. 同型 $(\Lambda(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*)^{\mathfrak{h}} \simeq \Omega(G/H)^G$ によって α は G/H 上の G -不変な体積形式に対応する. したがって η の定め方より $\eta(\alpha)$ は $\Gamma \backslash G/H$ 上の体積形式. コンパクト多様体上の体積形式のコホモロジー類は 0 になり得ないので, $[\eta(\alpha)] \neq 0$. $\square$

補題 5 は初等的で易しい結果だが, コンパクト Clifford–Klein 形のコホモロジー的な手法による研究は, 筆者の知る限り全てこの補題に深く依存している.²

3. コンパクト商の存在に対するコホモロジー的障害

定理 6 (M. [20], [22]). H の極大コンパクト部分群を K_H , その Lie 環を $\mathfrak{k}_H$ とする. 射影 $\pi : G/K_H \rightarrow G/H$ が誘導する準同型

$$\pi^* : H^N(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}; \mathbb{R}) \rightarrow H^N(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}_H; \mathbb{R}) \quad (N = \dim(G/H))$$

が単射でないならば, 等質空間 G/H はコンパクトな Clifford–Klein 形を持たない.

証明. G/H がコンパクトな Clifford–Klein 形 $\Gamma \backslash G/H$ を持ったとする. 次の可換図式を考える:

$$\begin{array}{ccc} H^N(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}; \mathbb{R}) & \xrightarrow{\pi^*} & H^N(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}_H; \mathbb{R}) \\ \eta \downarrow & & \downarrow \eta \\ H^N(\Gamma \backslash G/H; \mathbb{R}) & \xrightarrow{\pi^*} & H^N(\Gamma \backslash G/K_H; \mathbb{R}). \end{array}$$

補題 5 より $\eta : H^N(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}; \mathbb{R}) \rightarrow H^N(\Gamma \backslash G/H; \mathbb{R})$ は単射である. また射影 $\pi : \Gamma \backslash G/K_H \rightarrow \Gamma \backslash G/H$ は可縮な空間 H/K_H をファイバーとするファイバー束であるから, de Rham コホモロジーに誘導される準同型 $\pi^* : H^N(\Gamma \backslash G/H; \mathbb{R}) \rightarrow H^N(\Gamma \backslash G/K_H; \mathbb{R})$ は同型である. よって図式の可換性より $\pi^* : H^N(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}; \mathbb{R}) \rightarrow H^N(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}_H; \mathbb{R})$ は単射になる. $\square$

補足 7. (1) 定理 6 は小林–小野 [16] および Benoist–Labourie [2] による結果の拡張になっている. 大雑把に言えば, 小林–小野の結果は G/H の接束の Euler 類が G -不変な体積形式になっている場合, Benoist–Labourie の結果は G/H の体積形式が G -不変なシンプレクティック形式から来る場合に相当する.

(2) 適切に議論を修正することで, 定理 6 の仮定のもと, より一般に G/H を局所的なモデルとするコンパクトな多様体が存在しないことも証明できる. ただし, これが意

² $\mathbb{R}$ -係数でなく, $\mathbb{Z}$ -係数や $\mathbb{Z}_2$ -係数のコホモロジーに対して本講演の結果を拡張することは (少なくとも今のところ) 不可能であるが, その主な理由は, 補題 5 の証明が本質的に de Rham コホモロジーを利用しており, 特異コホモロジーなどの場合に同じ議論をすることができないことである.

味のある一般化になっているかは不明である. 例えば G/H が簡約型等質空間のとき, G/H を局所的なモデルとするコンパクト多様体は常に Clifford–Klein 形であろうと予想されている.

その後, 定理 6 は以下のように一般化できることがわかった:

定理 8 (M. [23]). $H^N(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}; \mathbb{R}) \neq 0$ ($N = \dim(G/H)$) を仮定する. K_H を H の極大コンパクト部分群, T_H を K_H の極大トーラスとし, $\mathfrak{t}_H$ を T_H の Lie 環とする.

$$\bigoplus_{C, p} \text{im}(\pi^* : H^p(\mathfrak{g}, \mathfrak{c}; \mathbb{R}) \rightarrow H^p(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}_H; \mathbb{R}))$$

で生成される $H^\bullet(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}_H; \mathbb{R})$ のイデアルを $I^\bullet = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} I^n$ とする (ただし, 直和は T_H を含む G の連結コンパクト部分群 C と $p > N + \dim K_H - \dim C$ を走るものとする).

$$\text{im}(\pi^* : H^N(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}; \mathbb{R}) \rightarrow H^N(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}_H; \mathbb{R})) \subset I^N$$

ならば, G/H はコンパクトな Clifford–Klein 形を持たない.

証明の概略. コンパクトな Clifford–Klein 形 $\Gamma \backslash G/H$ が存在したとする. Γ は torsion-free であると仮定して一般性を失わない (Selberg の補題 [28]). このとき任意のコンパクト部分群 C に対して $\Gamma \backslash G/C$ は Clifford–Klein 形である. 不連続群のコホモロジー次元の上界評価 ([9, §5], [23, Lem. 2.2]) より

$$H^p(\Gamma \backslash G/C; \mathbb{R}) = 0 \quad (p > N + \dim K_H - \dim C)$$

が分かる. したがって可換図式

$$\begin{array}{ccc} H^p(\mathfrak{g}, \mathfrak{c}; \mathbb{R}) & \xrightarrow{\pi^*} & H^p(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}_H; \mathbb{R}) \\ \eta \downarrow & & \downarrow \eta \\ H^p(\Gamma \backslash G/C; \mathbb{R}) & \xrightarrow{\pi^*} & H^p(\Gamma \backslash G/T_H; \mathbb{R}) \end{array}$$

より,

$$I^\bullet \subset \ker(\eta : H^\bullet(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}_H; \mathbb{R}) \rightarrow H^\bullet(\Gamma \backslash G/T_H; \mathbb{R})) \quad (*)$$

である. 一方, 可換図式

$$\begin{array}{ccccc} H^N(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}; \mathbb{R}) & \xrightarrow{\pi^*} & & & H^N(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}_H; \mathbb{R}) \\ \eta \downarrow & & & & \downarrow \eta \\ H^N(\Gamma \backslash G/H; \mathbb{R}) & \xrightarrow{\pi^*} & H^N(\Gamma \backslash G/K_H; \mathbb{R}) & \xrightarrow{\pi^*} & H^N(\Gamma \backslash G/T_H; \mathbb{R}) \end{array}$$

を考えると, 定理 6 で見たとおり

$$\pi^* \circ \eta : H^N(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}; \mathbb{R}) \rightarrow H^N(\Gamma \backslash G/H) \rightarrow H^N(\Gamma \backslash G/K_H)$$

は単射. さらに分裂原理 ([8, Th. 6.8.3]) より

$$\pi^* : H^N(\Gamma \backslash G/K_H; \mathbb{R}) \rightarrow H^N(\Gamma \backslash G/T_H; \mathbb{R})$$

も単射. よって

$$\eta \circ \pi^* : H^N(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}; \mathbb{R}) \rightarrow H^N(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}_H; \mathbb{R}) \rightarrow H^N(\Gamma \backslash G / T_H; \mathbb{R})$$

は単射でなくてはならないと分かる. これは $\text{im}(\pi^* : H^N(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}; \mathbb{R}) \rightarrow H^N(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}_H; \mathbb{R})) \subset I^N$ と $(*)$ に反する. $\square$

補足 9. (1) 定理 8 は定理 6 の一般化になっている. 実際もし定理 6 の仮定が満たされるならば, $\text{im}(\pi_{H, T_H}^* : H^N(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}; \mathbb{R}) \rightarrow H^N(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}_H; \mathbb{R})) = \{0\}$ であり, これは当然 I^N に含まれる.

(2) 定理 8 を G/H を局所的なモデルとするコンパクト多様体の場合に一般化できるか否かは, 今のところ分かっていない.

筆者が定理 8 を得たのと同時期に, N. Tholozan は以下の定理を証明した.

定理 10 (Tholozan [30]).

$$G/H \xleftarrow{\pi} G/K_H \xrightarrow{\varpi} G/K$$

(ただし K, K_H はそれぞれ G, H の極大コンパクト部分群で, $K_H \subset K$ を満たす) という 2 つの射影を考える. 写像

$$\begin{aligned} \varpi_! \circ \pi^* : H^N(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}; \mathbb{R}) &\rightarrow H^N(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}_H; \mathbb{R}) \rightarrow H^{N-n}(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}; \mathbb{R}) \\ (N = \dim(G/H), \quad n = \dim(K/K_H)) \end{aligned}$$

が単射でないならば, 等質空間 G/H はコンパクトな Clifford–Klein 形を持たない. ただし $\varpi_!$ はファイバー方向の積分が Lie 環のコホモロジーに誘導する写像のこととする.

この定理の証明にも, Lie 環の相対コホモロジーと de Rham コホモロジーを比較する写像 η を用いる.

補足 11. (1) 定理 10 も定理 6 の一般化になっている. 実際, π^* が単射でないとき $\varpi_! \circ \pi^*$ は単射になり得ない.

(2) 定理 10 を G/H を局所的なモデルとするコンパクト多様体の場合に一般化できるか否かは, 今のところ分かっていない.

定理 8 と定理 10 は見かけ上少し異なっているが, 様々な具体例で調べてみると, 2 つの定理はちょうど同じ種類の G/H に対して適用できるようである. 2 つの障害が (何らかの意味で) 同値なのか否かは, 今のところ不明である.

4. 不変式による言い換え

等質空間 G/H が具体的に与えられたときに, 前節で述べた定理 6, 8, 10 の仮定が成り立つか否かを直接計算で確かめることは (不可能ではないものの) 相当面倒である. この節では, 簡約型等質空間の場合に, Cartan–Chevalley–Koszul–Weil の理論 ([6]; 詳細は [7], [26] を見よ) を用いることで, 仮定が成り立つか否かのチェックが, 不変式の計算に帰着できることを説明する.

等質空間 G/H が簡約型であるとは, G が $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ の閉部分群で,

$$g \in G \iff {}^t g \in G, \quad h \in H \iff {}^t h \in H$$

が成り立つこととする. このとき **Cartan** 対合 $\theta : G \rightarrow G$ を $\theta(g) = {}^t g^{-1}$ で定義する. $\theta(H) = H$ に注意する. 等質空間 G/H が簡約型するとき, 特に $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ は簡約 Lie 環である. この節では常に等質空間 G/H が簡約型であることを仮定する.

Cartan–Chevalley–Koszul–Weil は, $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ の不変式を用いて $H^\bullet(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}; \mathbb{R})$ を簡単に計算する方法を与えた. 彼らの結果を説明するため, まずは幾つかの言葉を準備しよう.

$(\Lambda \mathfrak{g}^*)^\mathfrak{g}$ の原始的部分空間 $P_{\mathfrak{g}^*} = \bigoplus_{k \geq 1} P_{\mathfrak{g}^*}^{2k-1}$ を

$$P_{\mathfrak{g}^*} = \{\alpha \in (\Lambda \mathfrak{g}^*)^\mathfrak{g} : \forall x, y \in (\Lambda^+ \mathfrak{g})^\mathfrak{g}, \langle \alpha, x \wedge y \rangle = 0\}$$

で定め, その元を原始的元と呼ぶ. このとき包含 $P_{\mathfrak{g}^*} \hookrightarrow (\Lambda \mathfrak{g}^*)^\mathfrak{g}$ は $\Lambda P_{\mathfrak{g}^*} \simeq (\Lambda \mathfrak{g}^*)^\mathfrak{g}$ を誘導する.

Lie 環 $\mathfrak{g}$ に対し, **Cartan** 写像と呼ばれる自然な写像

$$\rho_{\mathfrak{g}} : (S^k \mathfrak{g}^*)^\mathfrak{g} \rightarrow (\Lambda^{2k-1} \mathfrak{g})^\mathfrak{g} \quad (k \geq 1)$$

が定まる (定義は [7, Ch. VI, §2] を参照). $\mathfrak{g}$ が簡約なとき, $\rho_{\mathfrak{g}}$ は同型

$$\overline{\rho}_{\mathfrak{g}} : (S^+ \mathfrak{g}^*)^\mathfrak{g} / ((S^+ \mathfrak{g}^*)^\mathfrak{g} \cdot (S^+ \mathfrak{g}^*)^\mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim} P_{\mathfrak{g}^*}$$

を誘導することが知られている ([7, Ch. VI, §4]).

次数付き代数 $(\Lambda \mathfrak{g}^*)^\mathfrak{g} \otimes (S \mathfrak{h}^*)^\mathfrak{h}$ 上の微分 δ を

$$\delta(\alpha \otimes 1) = 1 \otimes \tau_{\mathfrak{g}}(\alpha)|_{\mathfrak{h}}, \quad \delta(1 \otimes Q) = 0 \quad (\alpha \in P_{\mathfrak{g}^*}, Q \in (S \mathfrak{h}^*)^\mathfrak{h})$$

で定める. ただし, $(\Lambda \mathfrak{g}^*)^\mathfrak{g} \otimes (S \mathfrak{h}^*)^\mathfrak{h}$ には

$$\deg(\alpha \otimes Q) = \deg \alpha + 2 \deg Q \quad (\alpha \in (\Lambda \mathfrak{g}^*)^\mathfrak{g}, Q \in (S \mathfrak{h}^*)^\mathfrak{h})$$

で次数が入っているものとし, $\tau_{\mathfrak{g}} : P_{\mathfrak{g}^*}^{2k-1} \rightarrow (S^k \mathfrak{g}^*)^\mathfrak{g}$ ($k \geq 1$) は $\rho_{\mathfrak{g}} \circ \tau_{\mathfrak{g}} = 1$ を満たす任意の線型写像とする (そのような $\tau_{\mathfrak{g}}$ を転入という). Cartan–Chevalley–Koszul–Weil は, 次数付き微分代数 $((\Lambda \mathfrak{g}^*)^\mathfrak{g} \otimes (S \mathfrak{h}^*)^\mathfrak{h}, -\delta)$ のコホモロジーが $H^\bullet(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}; \mathbb{R})$ と自然に同型であることを証明した. $((\Lambda \mathfrak{g}^*)^\mathfrak{g} \otimes (S \mathfrak{h}^*)^\mathfrak{h}, -\delta)$ は元の次数付き微分代数 $((\Lambda(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*)^\mathfrak{h}, d)$ よりも理論的に扱いやすく, 具体的な計算も容易である.

補足 12. その後に発展した Sullivan の有理ホモトピー論 ([29]) の立場からすると, Cartan–Chevalley–Koszul–Weil の結果は「次数付き微分代数 $((\Lambda(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*)^\mathfrak{h}, d)$ の Sullivan モデルを具体的に構成した」と見ることができる.

次数付き微分代数 $((\Lambda \mathfrak{g}^*)^\mathfrak{g} \otimes (S \mathfrak{h}^*)^\mathfrak{h}, -\delta)$ の計算により, 定理 6 の条件を不変式の言葉で書き直すことができた:

定理 13 (M. [24]). G/H が簡約型等質空間のとき, $\pi^* : H^N(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}; \mathbb{R}) \rightarrow H^N(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}_H; \mathbb{R})$ ($N = \dim(G/H)$) が単射であるためには, $\text{rest} : (\Lambda \mathfrak{g}^*)^\mathfrak{g} \rightarrow (\Lambda \mathfrak{h}^*)^\mathfrak{h}$ の誘導する線型写像

$$\text{rest} : (P_{\mathfrak{g}^*})^{-\theta} \rightarrow (P_{\mathfrak{h}^*})^{-\theta}$$

が全射であることが必要かつ十分である. ただし G の Cartan 対合 θ が誘導する $P_{\mathfrak{g}^*}$ の対合を同じ記号 θ で書き, θ の (-1) -固有空間を $(P_{\mathfrak{g}^*})^{-\theta}$ とした.

補足 14. Cartan 写像の誘導する同型

$$\overline{\rho}_{\mathfrak{g}}: (S^+ \mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}} / ((S^+ \mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}} \cdot (S^+ \mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}) \xrightarrow{\sim} P_{\mathfrak{g}^*}$$

より, $\text{rest}: (P_{\mathfrak{g}^*})^{-\theta} \rightarrow (P_{\mathfrak{h}^*})^{-\theta}$ の全射性は

$$\overline{\text{rest}}: ((S^+ \mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}} / ((S^+ \mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}} \cdot (S^+ \mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}))^{-\theta} \rightarrow ((S^+ \mathfrak{h}^*)^{\mathfrak{h}} / ((S^+ \mathfrak{h}^*)^{\mathfrak{h}} \cdot (S^+ \mathfrak{h}^*)^{\mathfrak{h}}))^{-\theta}$$

の全射性と同値である.

$(P_{\mathfrak{g}^*})^{-\theta}$ の構造はよく解明されており, 定理 13 の制限写像が全射か否かを確かめることは大抵の場合非常に易しい. 例えば, 次が分かっている:

事実 15. (1) 線型簡約 Lie 群 G に対し, $\dim(P_{\mathfrak{g}^*})^{-\theta} = \text{rank } G - \text{rank } K$ が成り立つ. ここで $\text{rank } G$ とは G の Cartan 部分群の次元のことをいう (例えば $\text{rank } \text{SU}(p, q) = p + q - 1$).

(2) G が単純 Lie 群のとき, $(P_{\mathfrak{g}^*})^{-\theta}$ の基底の次数 (重複度込み) は次の通りである:

$\mathfrak{g}$	次数
$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$	$5, 9, 13, \dots, 4 \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - 3$
$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{H})$	$5, 9, 13, \dots, 4n - 3$
$\mathfrak{so}(p, q)$ (p, q : 奇数)	$p + q - 1$
$\mathfrak{e}_{6(6)}$	$9, 17$
$\mathfrak{e}_{6(-26)}$	$9, 17$
$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$	$3, 5, 7, \dots, 2n - 1$
$\mathfrak{so}(2n + 1, \mathbb{C})$	$3, 7, 11, \dots, 4n - 1$
$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$	$3, 7, 11, \dots, 4n - 1$
$\mathfrak{so}(2n, \mathbb{C})$	$3, 7, 11, \dots, 4n - 5, 2n - 1$
$\mathfrak{e}_{6, \mathbb{C}}$	$3, 9, 11, 15, 17, 23$
$\mathfrak{e}_{7, \mathbb{C}}$	$3, 11, 15, 19, 23, 27, 35$
$\mathfrak{e}_{8, \mathbb{C}}$	$3, 15, 23, 27, 35, 39, 47, 59$
$\mathfrak{f}_{4, \mathbb{C}}$	$3, 11, 15, 23$
$\mathfrak{g}_{2, \mathbb{C}}$	$3, 11$
それ以外	—

表 1: $(P_{\mathfrak{g}^*})^{-\theta}$ の基底の次数

Cartan–Chevalley–Koszul–Weil の結果を用いれば, 定理 8 の仮定を満たす簡約型等質空間の例を探すことも比較的容易である. 例えば次が分かる:

命題 16 (M. [23]). 以下のような G の連結コンパクト部分群 C と次数付き代数の準同型 $\phi: (S\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*)^{\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}} \rightarrow (S\mathfrak{c}_{\mathbb{C}}^*)^{\mathfrak{c}_{\mathbb{C}}}$ が存在するならば, 簡約型等質空間 G/H は定理 8 の仮定を満たし, 従ってコンパクトな Clifford–Klein 形を持たない.

(i) $\dim C > \dim K_H$.

(ii) $C \supset T_H$.

(iii) 次の図式は可換:

$$\begin{array}{ccccc}
 (S\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^*)^{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}} & \xrightarrow{\text{rest}} & (S\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*)^{\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}} & \xrightarrow{\text{rest}} & S(\mathfrak{t}_H)_{\mathbb{C}}^* \\
 & \searrow \text{rest} & \downarrow \phi & \nearrow \text{rest} & \\
 & & (S\mathfrak{c}_{\mathbb{C}}^*)^{\mathfrak{c}_{\mathbb{C}}} & &
 \end{array}$$

[23] では, 大島–関口による半単純対称空間の ε -family の理論 ([27]) と命題 16 を組み合わせて, コンパクトな Clifford–Klein 形を持たない G/H の例を系統的に構成した. しかし今のところ, 定理 8 の仮定を不変式の言葉で完全に言い換えることはできていない.

Tholozan [30, Ver. 2, §4] によれば, G/H が簡約型等質空間のときには, 定理 10 の条件を不変式の言葉で言い換えられるようである. 証明の詳細は, 続編の論文で与える予定とのことである.

5. 例

定理 6 と定理 13 の系として, 以下の小林による予想 [10, 予想 6.4] を肯定的に解決できた:

系 17 (M. [24]). 簡約型等質空間 G/H がコンパクトな Clifford–Klein 形を持つのは, $\text{rank } G - \text{rank } K \geq \text{rank } H - \text{rank } K_H$ が成り立つときに限る.

証明. 定理 6 と定理 13 より, G/H がコンパクトな Clifford–Klein 形を持つためには $\text{rest} : (P_{\mathfrak{g}}^*)^{-\theta} \rightarrow (P_{\mathfrak{h}}^*)^{-\theta}$ が全射でなければならない. そのためには特に $\dim(P_{\mathfrak{g}}^*)^{-\theta} \geq \dim(P_{\mathfrak{h}}^*)^{-\theta}$ でなくてはならない. 事実 15 (1) より, これは $\text{rank } G - \text{rank } K \geq \text{rank } H - \text{rank } K_H$ ということである. $\square$

なお Tholozan [30, Ver. 2] も同時期に, 定理 10 の不変式による言い換えを用いて, 小林の予想を証明している.

さらに, 定理 6 が適用できる半単純対称空間の分類を得た:

定理 18 (M. [21] でアナウンス, 本論文は準備中). 半単純対称空間 G/H に対し, 準同型 π^* が単射であるためには, 対応する半単純対称対 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ が以下の既約対称対 (i)–(viii) の直和として書けることが必要かつ十分である:

- (i) $(\mathfrak{l}, \mathfrak{l})$ ($\mathfrak{l}$: 単純 Lie 環).
- (ii) $(\mathfrak{l} \oplus \mathfrak{l}, \Delta \mathfrak{l})$ ($\mathfrak{l}$: 単純 Lie 環).
- (iii) $(\mathfrak{l}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{l})$ ($\mathfrak{l}_{\mathbb{C}}$: 複素単純 Lie 環, $\mathfrak{l}$: $\mathfrak{l}_{\mathbb{C}}$ の実形).
- (iv) $\text{rank } \mathfrak{h}' = \text{rank } \mathfrak{k}_{H'}$ を満たす既約対称対 $(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}')$.
- (v) $(\mathfrak{sl}(2n+1, \mathbb{C}), \mathfrak{so}(2n+1, \mathbb{C}))$ ($n \geq 1$).
- (vi) $(\mathfrak{sl}(2n, \mathbb{C}), \mathfrak{sp}(n, \mathbb{C}))$ ($n \geq 2$).
- (vii) $(\mathfrak{so}(2n, \mathbb{C}), \mathfrak{so}(2n-1, \mathbb{C}))$ ($n \geq 4$).
- (viii) $(\mathfrak{e}_{6, \mathbb{C}}, \mathfrak{f}_{4, \mathbb{C}})$.

よって特に, 半単純対称空間 G/H がコンパクト Clifford–Klein 形を持つためには, $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ が (i)–(viii) の直和として書けなければならない.

補足 19. 定理 18 の証明には, 定理 13 と Berger による半単純対称対の分類 [3] を用いる. 今のところ, なぜ「例外」である (v)–(viii) が全て複素対称対であるかは不明である.

また, 定理 8 と命題 16 の応用として, 以下のような例を得た (これらの例は定理 10 を用いても得られる):

例 20 (M. [23], Tholozan [30]). $p, q \geq 1$ で p が奇数のとき, $\mathrm{SO}_0(p, q+1)/\mathrm{SO}_0(p, q)$ はコンパクトな Clifford–Klein 形を持たない (換言すれば, 完備で断面曲率が恒等的に -1 に等しい符号 (p, q) の擬 Riemann 多様体は全て非コンパクトである).

補足 21. p, q がともに奇数のとき, および $(p, q) = (2n+1, 2n)$ のときには, 例 20 は既知である (Kulkarni [18], Benoist [1]). また, $q \geq p \geq 1$ のときにもコンパクトな Clifford–Klein 形が存在しないことが知られているが (Calabi–Markus [5], Wolf [31], 小林 [9]), 今のところこの結果はコホモロジー的な手法では証明できない. なお, $(p, q) = (2n, 1), (4n, 3), (8, 7)$ のときにはコンパクトな Clifford–Klein 形が存在する (Kulkarni [18], 小林 [13]).

例 22 (M. [23], Tholozan [30]). $p, q \geq 1$ のとき, $\mathrm{SL}(p+q, \mathbb{R})/\mathrm{SO}_0(p, q)$, $\mathrm{SL}(p+q, \mathbb{C})/\mathrm{SU}(p, q)$, $\mathrm{SL}(p+q, \mathbb{H})/\mathrm{Sp}(p, q)$ はいずれもコンパクトな Clifford–Klein 形を持たない.

補足 23. $p = q$ または $p = q+1$ のとき, 例 22 は既知である (小林 [11], Benoist [1]).

参考文献

- [1] Y. Benoist, Actions propres sur les espaces homogènes réductifs. *Ann. of Math. (2)* **144** (1996), 315–347.
- [2] Y. Benoist and F. Labourie, Sur les espaces homogènes modèles de variétés compactes. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **76** (1992), 99–109.
- [3] M. Berger, Les espaces symétriques noncompacts. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)* **74** (1957), 85–177.
- [4] R. Bott and A. Haeffliger, On characteristic classes of Γ -foliations. *Bull. Amer. Math. Soc.* **78** (1972), 1039–1044.
- [5] E. Calabi and L. Markus, Relativistic space forms. *Ann. of Math. (2)* **75** (1962), 63–76.
- [6] H. Cartan, La transgression dans un groupe de Lie et dans un espace fibré principal. *Colloque de topologie (espaces fibrés), Bruxelles, 1950.* pp. 57–71. Georges Thone, Liège; Masson et Cie., Paris, 1951.
- [7] W. Greub, S. Halperin and R. Vanstone, *Connections, curvature, and cohomology. Volume III: Cohomology of principal bundles and homogeneous spaces.* Pure and Applied Mathematics, Vol. 47-III. Academic Press, New York–London, 1976.
- [8] V. W. Guillemin and S. Sternberg, *Supersymmetry and equivariant de Rham theory. With an appendix containing two reprints by Henri Cartan.* Mathematics Past and Present. Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [9] T. Kobayashi, Proper action on a homogeneous space of reductive type. *Math. Ann.* **285** (1989), 249–263.
- [10] ———, 不定値計量を持つ等質空間と不連続群. 第36回幾何学シンポジウム, pp. 104–116, 1989, <http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~toshi/texpdf/tk12-kika-sympo89.pdf>

- [11] ———, A necessary condition for the existence of compact Clifford–Klein forms of homogeneous spaces of reductive type. *Duke Math. J.* **67** (1992), 653–664.
- [12] ———, Criterion for proper actions on homogeneous spaces of reductive groups. *J. Lie Theory* **6** (1996), 147–163,
- [13] ———, Discontinuous groups and Clifford-Klein forms of pseudo-Riemannian homogeneous manifolds. *Algebraic and analytic methods in representation theory (Sønderborg, 1994)*, Perspectives in Mathematics, vol. 17, Academic Press, San Diego, CA, 1997, 99–165.
- [14] ———, 非リーマン等質空間の不連続群論. 数学の最先端 21 世紀への挑戦, vol. 1, シュプリンガー・フェアラーク東京, pp. 18–73, 2002; revised and enlarged from the English version in *Mathematics unlimited–2001 and beyond*, Springer, Berlin, 2001, pp. 723–747.
- [15] ———, 非リーマン等質空間の不連続群について. 数学 **57** (2005), 267–281.
- [16] T. Kobayashi and K. Ono, Note on Hirzebruch’s proportionality principle. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.* **37** (1990), 71–87.
- [17] T. Kobayashi and T. Yoshino, Compact Clifford–Klein forms of symmetric spaces — revisited. *Pure Appl. Math. Q.* **1** (2005), 591–663.
- [18] R. S. Kulkarni, Proper actions and pseudo-Riemannian space forms. *Adv. in Math.* **40** (1981), 10–51.
- [19] F. Labourie, Quelques résultats récents sur les espaces localement homogènes compacts. *Manifolds and geometry (Pisa, 1993)*, *Sympos. Math.*, XXXVI, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996, 267–283.
- [20] Y. Morita, A topological necessary condition for the existence of compact Clifford–Klein forms. *J. Differential Geom.* **100** (2015), 533–545.
- [21] ———, Semisimple symmetric spaces without compact manifolds locally modelled thereon. *Proc. Japan. Acad. Ser. A Math. Sci.* **90** (2015), 29–33.
- [22] ———, Homogeneous spaces of nonreductive type that do not model any compact manifold. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **53** (2017), 287–298.
- [23] ———, A cohomological obstruction to the existence of compact Clifford-Klein forms. *Selecta Math. (N.S.)* **23** (2017), 1931–1953.
- [24] ———, Proof of Kobayashi’s rank conjecture on Clifford-Klein forms. arXiv:1705.06544, preprint.
- [25] T. Okuda, Classification of semisimple symmetric spaces with proper $SL(2, \mathbb{R})$ -actions. *J. Differential Geom.* **94** (2013), 301–342.
- [26] A. L. Onishchik, *Topology of transitive transformation groups*. Johann Ambrosius Barth Verlag GmbH, Leipzig, 1994.
- [27] T. Oshima and J. Sekiguchi, The restricted root system of a semisimple symmetric pair. *Group representations and systems of differential equations (Tokyo, 1982)*, pp. 433–497, Adv. Stud. Pure Math., 4, North-Holland, Amsterdam, 1984.
- [28] A. Selberg, On discontinuous groups in higher-dimensional symmetric spaces. *Contributions to function theory (internat. Colloq. Function Theory, Bombay, 1960)*, pp. 147–164, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1960.
- [29] D. Sullivan, Infinitesimal computations in topology. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **47** (1977), 269–331.
- [30] N. Tholozan, Volume and non-existence of compact Clifford–Klein forms. arXiv:1511.09448v2, preprint.
- [31] J. A. Wolf, The Clifford–Klein space forms of indefinite metric. *Ann. of Math. (2)* **75** (1962), 77–80.