

Ricci 曲率が下に有界な特異空間上の幾何解析

本多正平 (東北大学 理学研究科) *

1 導入

1.1 特異空間上の Ricci 曲率の下限

Cheeger-Colding は一連の仕事 [CC97, CC00] において Ricci 曲率が下に有界な Riemann 多様体の列の Gromov-Hausdorff 極限空間 (Ricci 極限空間と呼ぶ) の研究を大きく推し進めた. その研究の応用は広く, それまでのいくつかの未解決問題の解決を導いた. 特に最近ではそれらが Kähler 幾何へ応用され, 大きく注目を集めている [CDS15, T15].

一方で Cheeger-Colding は Ricci 極限空間を “synthetic” に扱うことはできるか, という問いを与え, その難しさについて言及している. 極限空間は測度 m を持った距離空間 (X, d) , すなわち今日では測度距離空間 (X, d, m) と呼ばれるものの典型例になっている.

この問いにまず答えを与えたのが Lott-Villani と Sturm である [LV09, St06]. 彼らの重要な貢献は Ricci 曲率と最適輸送理論に密接な関係があることを見抜き, そこから測度距離空間に対して Ricci 曲率の下限 (より正確には, および次元の上限) の定義を与えた.

しかしそれだけでは Cheeger-Colding の理論をカバーするほどにはなっていないこともわかり, 例えば Finsler 多様体のような接空間が非線形性を持つような対象を外す必要があった. すなわち Lott-Sturm-Villani の設定に加えられるべき適切な仮定を探す必要があった.

その後 Gigli-桑田-太田の仕事 [GKO13] をきっかけに, その仮定を見つけたのが Ambrosio-Gigli-Savaré [AGS14] および Gigli [G13] であり, それらを満たす測度距離空間を RCD 空間とよぶ. この RCD 空間の研究は多くの分野, 特にイタリアの伝統的な解析学派の手法, および確率論とも深い関わりを見せ, 近年爆発的なスピードで進展しており, 大きな注目を集めている. 実際, 高木レクチャーでも二度ほどこの話題が取り上げられており [B09, V16], 今年度の国際数学会議での基調講演の 1 つにこの話題が選ばれている [A18].

Cheeger-Colding の後に, Naber の出現により極限空間の幾何の研究が進んだ (例えば [CN12]). しかし今現在において, それらもほぼ全て (もっというと, さらに改良された形で) RCD 空間にまで拡張されている. 「断面曲率が下に有界である」ことの synthetic な概念は Alexandrov 空間であるが, 多くの人が探していたその Ricci 曲率版はこの RCD 空間であると断定できる時期となった.

本稿の目的は 2 つある. その 1 つはこの RCD 空間について今わかっているベストの情報を提供することである. 次章で RCD 空間の定義を, 最適輸送理論の立場からではなく, それと同値な Bakry-Émery 理論からの立場から与える (同値性の証明については [AMS15, EKS15] を見よ). これは定義のための準備が最小であることが理由の 1 つである.

私はこれまで Ricci 極限空間を, 測度付き Gromov-Hausdorff 収束において関数解析的な手法を持ち込むことで研究を行ってきた [H11, H14, H15, H17, H18a]. そして現在, この手法は RCD 空間の研究においても基本的な道具となってきた (例えば [AH17a, AH17b, AHPT18]). その手法を用いて得られる (Ricci 極限空間に対してでさえ新しい) 結果についての解説, これが本稿の 2 つ目の目的である. どの主張にも証明について書かれておらず, また, Riemann 多様体への応用については割愛したので, それらに興味を持たれた方は原論文を, そして導入としては, 日本語で書かれた当該分野に関する最近の本 [KKOST17] も参考にして欲しい.

* shonda@m.tohoku.ac.jp

1.2 RCD 空間

定義 1.1 (測度距離空間). 三つ組 $(X, d, \mathbf{m})$ が測度距離空間であるとは, (X, d) が可分な完備距離空間であり, $\mathbf{m}$ が X 上の Borel 測度で, そのサポートが X に一致するときをいう.

以下, 測度距離空間 $(X, d, \mathbf{m})$ を一つ固定して話を進める. ここで, $(X, d, \mathbf{m})$ が $\text{RCD}(K, N)$ 空間であるとは, 粗く言って

$$\text{“Ric}_{(X, d, \mathbf{m})} \geq K, \quad \dim_{(X, d, \mathbf{m})} \leq N\text{”}$$

が成り立つことを指す. 正確な主張を述べるためにいくつか準備をする.

定義 1.2 (Sobolev 空間). $\text{Ch} : L^2(X, \mathbf{m}) \rightarrow [0, \infty]$ を次で定義する :

$$\text{Ch}(f) := \inf \left\{ \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_X \text{Lip}^2(f_n) d\mathbf{m}; f_n \in \text{Lip}_b(X, d) \cap L^2(X, \mathbf{m}), \|f_n - f\|_{L^2} \rightarrow 0 \right\}, \quad (1.1)$$

ここに $\text{Lip}_b(X, d)$ で X 上定義された有界な Lipschitz 関数全体を, $\text{Lip}(f)$ で f の局所 Lipschitz 定数を表す (すなわち $\text{Lip}(f)(x) := \limsup_{y \rightarrow x} |f(y) - f(x)|/d(y, x)$). そこで, 線形空間

$$H^{1,2}(X, d, \mathbf{m}) := \left\{ f \in L^2(X, \mathbf{m}); \text{Ch}(f) < \infty \right\}$$

を Sobolev 空間といい, ノルム $\|f\|_{H^{1,2}}^2 := \|f\|_{L^2}^2 + 2\text{Ch}(f)$ に関して Banach 空間になる.

$H^{1,2}(X, d, \mathbf{m})$ は一般に Hilbert 空間でないことを注意しておく. 例えば $(\mathbb{R}^2, |x| + |y|, \mathcal{L}^2)$ は測度距離空間だが, この $H^{1,2}$ は Hilbert 空間でない.

Sobolev 関数 $f \in H^{1,2}(X, d, \mathbf{m})$ の基本的な性質の一つとして, (1.1) の右辺の $\inf$ を達成する元 $|\nabla f| \in L^2(X, \mathbf{m})$ が存在し, それは ($\mathbf{m}$ -a.e. の意味で) 一意であることが知られている. また, $(X, d, \mathbf{m})$ で二倍条件および Poincaré の不等式が成り立てば, 任意の Lipschitz かつ $H^{1,2}$ に入っている関数 f に対して, $|\nabla f|$ は f の局所 Lipschitz 定数と $\mathbf{m}$ -a.e. で等しくなることが知られている [C99]. なお, この仮定は, 我々の対象である $\text{RCD}(K, N)$ 空間 (ただし $N < \infty$) に対しては満たされることは注意しておきたい.

そこで次の定義を与える. これが先に述べた Finsler 多様体等を除外する仮定である.

定義 1.3 (無限小 Hilbert 的). $H^{1,2}(X, d, \mathbf{m})$ が Hilbert 空間となるとき, $(X, d, \mathbf{m})$ を無限小 Hilbert 的と呼ぶ.

以下では $(X, d, \mathbf{m})$ は無限小 Hilbert 的とする.

定義 1.4 (Γ 作用素). 任意の $f, h \in H^{1,2}(X, d, \mathbf{m})$ に対して

$$\Gamma(f, h) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{|\nabla(f + \epsilon h)|^2 - |\nabla f|^2}{2\epsilon} \quad (1.2)$$

と置く. これは $\mathbf{m}$ -a.e. で意味を持ち, $L^1(X, \mathbf{m})$ に属する.

この概念は $(X, d, \mathbf{m})$ の Riemann 計量にあたる概念である (Riemann 幾何学の習慣から, しばしば $\Gamma(f, h) = \langle \nabla f, \nabla h \rangle$ と書くこともある). 例えば, 完備 Riemann 多様体 (M^n, g) と, $f \in C^\infty(M^n)$ に対して, $(M^n, d_g, e^{-f} d\text{vol})$ を考えると (d_g は g から誘導される自然な距離), これは測度距離空間で, 無限小 Hilbert 的であり, $\Gamma(f, h) = g(\nabla f, \nabla g)$ が $\mathbf{m}$ -a.e. で成り立つ. すなわちこの場合 Γ は測度によらない概念である. ちなみにこのような三つ組 $(M^n, d_g, e^{-f} d\text{vol})$ を滑らかな測度距離空間と呼ぶ.

定義 1.5 (Laplacian). $\Delta : D(\Delta) (\subset H^{1,2}(X, d, \mathbf{m})) \rightarrow L^2(X, \mathbf{m})$ を次で定義する :

$$f \in D(\Delta) \iff \exists h := \Delta f \in L^2(X, \mathbf{m}) \text{ s.t. } \int_X h g d\mathbf{m} = - \int_X \Gamma(f, g) d\mathbf{m} \quad \forall g \in H^{1,2}(X, d, \mathbf{m}).$$

ここで次の考察をする： n 次元完備 Riemann 多様体 (M^n, g) に対して Bochner 公式

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = |\text{Hess}_f|^2 + g(\nabla\Delta f, \nabla f) + \text{Ric}_M(\nabla f, \nabla f) \quad \forall f \in C^\infty(M^n) \quad (1.3)$$

を思い出そう．ここに等号は各点の意味である．これから次がわかる：(通常の意味で) $\text{Ric}_{M^n}^g \geq K$ かつ $n = \dim M^n \leq N$ が成り立つための必要十分条件は

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 \geq \frac{(\Delta f)^2}{N} + g(\nabla\Delta f, \nabla f) + K|\nabla f|^2 \quad \forall f \in C^\infty(M^n) \quad (1.4)$$

が成り立つことである(右辺の第1項は、一般に n 次対称行列 A に対して、 $|A|^2 \geq \frac{(\text{tr}A)^2}{n}$ が成り立つことと $\text{tr}(\text{Hess}_f) = \Delta f$ であることからくる)．これは

$$\frac{1}{2} \int_{M^n} \Delta\varphi |\nabla f|^2 d\text{vol} \geq \int_{M^n} \varphi \left(\frac{(\Delta f)^2}{N} + g(\nabla\Delta f, \nabla f) + K|\nabla f|^2 \right) d\text{vol} \quad \forall f, \forall \varphi \quad (1.5)$$

という積分形とも同値である．ここに $f \in C^\infty(M^n)$, $\varphi \in C_c^\infty(M^n)$ ($\varphi \geq 0$) である．

ここで $\text{RCD}(K, N)$ 空間の定義を述べることができる：

定義 1.6 ($\text{RCD}(K, N)$ 空間)． $K \in \mathbb{R}, N \in [1, \infty]$ とする．

1. (X, d, m) が $\text{BE}(K, N)$ 空間であるとは、 $\Delta f \in H^{1,2}(X, d, m)$ を満たす任意の $f \in D(\Delta)$, m -a.e. で $\varphi \geq 0$ かつ $\Delta\varphi \in L^\infty(X, m)$ を満たす任意の $\varphi \in D(\Delta)$ に対して

$$\frac{1}{2} \int_X \Delta\varphi |\nabla f|^2 dm \geq \int_X \varphi \left(\frac{(\Delta f)^2}{N} + \Gamma(\Delta f, f) + K|\nabla f|^2 \right) dm \quad (1.6)$$

が成り立つときをいう．

2. (X, d, m) が $\text{RCD}(K, N)$ 空間であるとは $\text{BE}(K, N)$ 空間であって、さらに以下の2条件を満たすときをいう：

- (a) (体積増大度のコントロール) ある $x \in X$ と、ある $C_1 > 0, C_2 > 0$ が存在して、

$$m(B_r(x)) \leq C_1 e^{C_2 r^2} \quad (1.7)$$

が任意の $r > 0$ で成り立つ．

- (b) ($\Gamma(f) \leq L \Leftrightarrow f : L$ -Lipschitz 関数) $f \in H^{1,2}(X, d, m) \cap L^\infty(X, m)$ が $\Gamma(f) \leq 1$ m -a.e. を満たせば、 X 上の有界な 1-Lipschitz 関数 $\hat{f}$ が存在して $f = \hat{f}$ が m -a.e. で成り立つ．

$\text{BE}(K, N)$ と $\text{RCD}(K, N)$ は異なる概念である．例えば、(次元が異なってもよい、2次元以上の) 二つの閉 Riemann 多様体を持ってきてそれを一点でくっつけると、それは適当な K, N で、 $\text{BE}(K, N)$ 空間となるが、どんな $\hat{K}, \hat{N}$ に対しても $\text{RCD}(\hat{K}, \hat{N})$ 空間とはならない [H18b] (実際、その例では (b) が成り立たない)．なお、以上の定義は、より正確には RCD^* と書くべきものであるが、最近 “ $\text{RCD}^* = \text{RCD}$ ” が Cavalletti-Milman によって [CM16] で証明されたので、記号の簡略化のために RCD の記号で統一する．

例をあげてこの章を終えよう．

例 1.7 (非 Ahlfors 正則空間)． $([0, \pi], d_{\mathbb{R}}, \sin^{N-1} t dt)$ は $\text{RCD}(N-1, N)$ 空間になる．

例 1.8 (滑らかな測度距離空間)． $N \in [1, \infty]$ と $f \in C^\infty(M^n)$ に対して滑らかな測度距離空間 $(M^n, d_g, e^{-f} d\text{vol})$ が $\text{RCD}(K, N)$ 空間であるための必要十分条件は $n \leq N$ かつ

$$\text{Ric}_{M^n}^g + \text{Hess}_f^g - \frac{df \otimes df}{N-n} \geq Kg \quad (1.8)$$

が通常の意味で成り立つことである．特に Gaussian 空間 $(\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n}, e^{-\frac{K}{2}|x|^2} d\mathcal{L}^n)$ は $\text{RCD}(K, \infty)$ 空間である．

2 安定性

ここでは [AH17a] で得られたいくつかの安定性について紹介する．ここで説明されない話題としては Hessian, Ricci 曲率の安定性等があるが、それらに興味を持たれた方は原論文を見て欲しい．

2.1 測度付き Gromov-Hausdorff(mGH) 収束

ここで扱う安定性を定式化するには、「空間の収束」の概念が必要で、深谷によって [F87] で導入された次の「測度付き Gromov-Hausdorff(mGH) 収束」がその役割を担う．一方で、最近では、Gigli-Mondino-Savaréによって [GMS15] で導入された「(点付き) 測度付き Gromov 収束」という mGH 収束の一般化の概念も主流になりつつある(その理由は $\text{RCD}(K, \infty)$ 空間の収束を考えるにはそちらの方がより自然なためである)．実際、[AH17a] で得られた結果のほとんどはその設定でなされているが、時折、欲しい結論を得るためには追加の仮定が必要になる ($\text{RCD}(K, N)$ 空間 ($N < \infty$) に対してはそれらの仮定は満たされる)．以下では話を簡単にするために、常に N は有限、考える収束は mGH 収束のみ考えよう．

定義 2.1 (mGH 収束)．測度距離空間の列 (X_i, d_i, m_i) が測度距離空間 (X, d, m) に mGH 収束するとは、ある点列 $x_i \in X_i$ 、ある $x \in X$ 、ある正の実数列 $\epsilon_i \downarrow 0, R_i \uparrow \infty$ と、ある写像の列 $\varphi_i : B_{R_i}(x_i) \rightarrow B_{R_i}(x)$ が存在して、以下の 3 条件を満たすことをいう：

1. (φ_i は距離をほぼ保つ) 任意の i と任意の $x, y \in X_i$ に対して $|\mathbf{d}_i(x, y) - \mathbf{d}(\varphi_i(x), \varphi_i(y))| < \epsilon_i$ が成り立つ．
2. (φ_i はほぼ全射) 任意の i で $B_{R_i}(x) \subset B_{\epsilon_i}(\varphi_i(B_{R_i}(x_i)))$ が成り立つ．
3. (測度は弱収束する) 任意の $f \in C_c^0(X)$ に対して次が成り立つ：

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_X f d(\varphi_i)_* m_{\lfloor B_{R_i}(x_i)} = \int_X f dm$$

このとき $(X_i, d_i, m_i) \xrightarrow{mGH} (X, d, m)$ と書く (たまに基点 x_i, x を明示して書く)．

synthetic な概念を考える利点の 1 つが次のコンパクト性定理である：

定理 2.2 ($\text{RCD}^*(K, N)$ 空間のモジュライのコンパクト性)． $K \in \mathbb{R}, N \in [1, \infty), v, V \in (0, \infty)$ に対して (ただし $v \leq V$)、 $\mathcal{M}(K, N, V)$ で、ある $x \in X$ で $v \leq \mathbf{m}(B_1(x)) \leq V$ となる $\text{RCD}^*(K, N)$ 空間 (X, d, m) 全体とする．¹ ここに mGH 収束を考えたものは距離化可能な位相を定め、その位相に関してコンパクトになる．

証明は [AGS14, LV09, St06] を見て欲しい．この定理より特に、 $\text{Ric}_{M_i^{g_i}} \geq Kg_i$ を満たす n 次元完備 Riemann 多様体 (M_i^n, g_i) を用いて $(M_i^n, d_i^{g_i}, \frac{\text{vol}}{\text{vol } B_1(p_i)}, p_i) \xrightarrow{mGH} (X, d, m, x)$ と表される測度距離空間 (X, d, m) は $\text{RCD}(K, n)$ 空間となり、Ricci 極限空間と呼ばれる．

2.2 mGH 収束と L^p 収束

$\text{RCD}(K, N)$ 空間の mGH 収束列 $(X_i, d_i, m_i) \xrightarrow{mGH} (X, d, m)$ と $p \in [1, \infty)$ が与えられたとする．このとき、 $f_i \in L^p(X_i, m_i)$ が $f \in L^p(X, m)$ に L^p 強 (もしくは弱) 収束する、という概念に意味があり、最初 ($\text{RCD}(K, N)$ 空間というわけではないが) Ding [D02] および桑江-塩谷 [KS03] によって考察され、後により一般の枠組みでも考えられた．この概念は関数だけ

¹ より正確には等長で同一視する必要がある．ここに測度距離空間の間の等長写像とは、距離空間として等長写像であって、測度を保つものをいう．

でなくテンソル場でも意味を持ち、さらには p を固定されているものだけではなく、収束列 $p_i \rightarrow p$ に置き換えることもできる (それは $\{L^{p_i}\}_i$ 収束とでもよぶべき概念であり、以下に述べる定理 2.6 の証明で必要となる。例えば [AH17a, H15] を参照して欲しい)。

ここでは関数列の $\{L^{p_i}\}_i$ 収束の定義のみを与えよう：

定義 2.3 (関数の $\{L^{p_i}\}_i$ 収束). $p_i \rightarrow p \in (1, \infty)$ とする。² $f_i \in L^{p_i}(X_i, \mathbf{m}_i)$ が $f \in L^p(X, \mathbf{m})$ に $\{L^{p_i}\}_i$ 弱収束するとは、 $\sup_i \|f_i\|_{L^{p_i}} < \infty$ かつ

$$\int_{B_r(x_i)} f_i d\mathbf{m}_i \rightarrow \int_{B_r(x)} f d\mathbf{m}$$

が任意の $x_i \in X_i \rightarrow x \in X$, 任意の $r > 0$ で成り立つときをいう。そして $\{L^{p_i}\}_i$ 強収束は、 $\{L^{p_i}\}_i$ 弱収束かつ $\|f_i\|_{L^{p_i}} \rightarrow \|f\|_{L^p}$ が成り立つときをいう。

2.3 p -Laplacian と Cheeger 等周定数

任意の $p \in (1, \infty)$ に対して Sobolev 空間 $H^{1,p}(X, \mathbf{d}, \mathbf{m})$ が定義できることに注意する。粗く言って、 L^p 関数でその微分のノルムも L^p 有界であるようなものの全体が $H^{1,p}$ である。これは $\{f \in \text{Lip}_b(X, \mathbf{d}); f, |\nabla f| \in L^p(X, \mathbf{m})\}$ を稠密部分集合として持つことを注意しておく。この稠密性は L^p 空間が一様凸性と呼ばれる性質を持つことと深く関わる。

以下で等周定数を扱うため、まず BV 関数の定義を述べよう。一般に BV 関数は $H^{1,p}$ 関数のように $\text{Lip}_b(X, \mathbf{d})$ に属するような関数で近似することができない。この点が BV 関数を扱う難しさの一つである。

定義 2.4 (BV 関数). $\text{Ch}_1 : L^1(X, \mathbf{m}) \rightarrow [0, \infty]$ を次で定義する：

$$\text{Ch}_1(f) := \inf \left\{ \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X \text{Lip}(f_n) d\mathbf{m}; f_n \in \text{Lip}_b(X, \mathbf{d}) \cap L^1(X, \mathbf{m}), \|f_n - f\|_{L^1} \rightarrow 0 \right\}, \quad (2.1)$$

これを f の 1-Cheeger エネルギー、もしくは BV エネルギーと呼び、しばしば $|Df|(X)$ と表す。そして $|Df|(X) < \infty$ となる関数 f を BV 関数と呼ぶ。

BV 関数は mGH 収束に関して次の意味で安定である：

定理 2.5 (BV 関数の安定性). $\text{RCD}(K, N)$ 空間の mGH 収束列 $(X_i, \mathbf{d}_i, \mathbf{m}_i) \xrightarrow{mGH} (X, \mathbf{d}, \mathbf{m})$ と、 L^1 強収束列 $f_i \in L^1(X_i, \mathbf{m}_i) \rightarrow f \in L^1(X, \mathbf{m})$ を考える。このとき $\liminf_{i \rightarrow \infty} |Df_i|(X_i) \geq |Df|(X)$ が成り立つ。

この定理は空間列が動かないとき、すなわち $(X_i, \mathbf{d}_i, \mathbf{m}_i) \equiv (X, \mathbf{d}, \mathbf{m})$ のときは自明になる。この定理と (ここでは述べていない) Sobolev 関数の安定性を合わせると次が証明できる。 $\mathcal{M}_{\text{cpt}}(K, N, d)$ で直径が d 以下、全測度が 1 の $\text{RCD}(K, N)$ 空間 (これはコンパクトになる) 全体を表わすとする (このモジュライ空間も定理 2.2 よりコンパクトになる)。

定理 2.6 (Cheeger 等周定数と p -Laplacian と直径の関係). 関数 $F : \mathcal{M}_{\text{cpt}}(N, K, d) \times [1, \infty] \rightarrow (0, \infty]$ を次で定義する：

$$F((X, \mathbf{d}, \mathbf{m}), p) = \begin{cases} \frac{2}{\text{diam } X} & (p = \infty) \\ (\lambda_{1,p}(X, \mathbf{d}, \mathbf{m}))^{1/p} & (p \in (1, \infty)) \\ h(X, \mathbf{d}, \mathbf{m}) & (p = 1). \end{cases}$$

このとき F は連続である。さらに、 F が無限大の値をとるときは $(X, \mathbf{d}, \mathbf{m})$ が一点 (で p は任意) のとき、かつそのときに限る。

² $p = 1$ のときはもう少しデリケートに扱う必要がある。

ここで、 $\lambda_{1,p}(X, d, m)$ は (X, d, m) の p -Laplacian の正の第一固有値で、次のように定義される：

$$\lambda_{1,p}(X, d, m) := \inf_{f \in H^{1,p}} \frac{\int_X |\nabla f|^p dm}{\inf_{c \in \mathbb{R}} \int_X |f - c|^p dm}.$$

もちろんこれは閉 Riemann 多様体 (M^n, d_g, vol) のときには通常の意味での p -Laplace 方程式： $-\text{div}(|\nabla f|^{p-2} \nabla f) = \lambda |f|^{p-2} f$ の正の第一固有値と一致する。

また、 $h(X, d, m)$ は (X, d, m) の Cheeger 等周定数であり、次のように定義される：

$$h(X, d, m) := \inf_{A \subset X} \frac{|D\chi_A|(X)}{m(A)},$$

ここに右辺の下限は全ての Borel 可測部分集合 $A \subset X$ で $m(A) \leq \frac{m(X)}{2}$ を満たすもの全体に渡ってとる。もちろんこれも閉 Riemann 多様体 (M^n, d_g, vol) のときには通常の見義と一致する：

$$h(M^n, d_{M^n}, \text{vol}) = \inf_{\Omega \subset M^n} \frac{\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)}{\text{vol } \Omega},$$

ここに下限は滑らかな境界を持つ開部分集合 $\Omega \subset X$ で $\text{vol } \Omega \leq \frac{\text{vol } M}{2}$ を満たすもの全体に渡ってとる（すなわち Cheeger 自身による定義はまさにこの右辺そのものである）。

RCD 空間の研究における基本問題の 1 つは、 $\mathcal{M}_{\text{cpt}}(K, N, d)$ 上に非自明な連続関数をできるだけ多く構成することである。この定理はそのような連続関数を非線形偏微分方程式を使って提供している。

3 Weyl の漸近公式

閉 Riemann 多様体 (M^n, g) に対して次を Weyl の漸近公式というのだった：

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{N_{(M^n, g)}(\lambda)}{\lambda^{n/2}} = \frac{\omega_n}{(2\pi)^n} \text{vol } M^n$$

ここに $N_{(M^n, g)}(\lambda)$ は (重複度を込めて数えた) Laplacian の固有値 $\{\lambda_i(M^n, g)\}_i$ の数え上げ関数： $N_{(M^n, g)}(\lambda) = \#\{i \in \mathbb{N}; \lambda_i(M^n, g) \leq \lambda\}$ であり、 ω_n は $\mathbb{R}^n$ 内の単位球の体積である。

次にコンパクト RCD(K, N) 空間で Weyl の漸近公式が成り立つかどうかを考える。極限には $m(X)$ が現れそうと思われるかもしれないが、実はそうではない。答えを先に述べると、それは Hausdorff 測度と関係する。

主張を正確に述べるために、いくつかの論文 ([AHT18, BrS18, MN14]) を組み合わせて得られる、RCD(K, N) 空間の (修正可能性を除いた) 正則性を紹介する：

定理 3.1 (RCD(K, N) 空間の正則性). (X, d, m) を (一点でない) RCD(K, N) 空間とし、 $k \in \mathbb{N}$ とする。このとき k 次元正則集合 $\mathcal{R}_k$ とは

$$\left(X, r^{-1}d, \frac{m}{m(B_r(x))}, x \right) \xrightarrow{mGH} \left(\mathbb{R}^k, d_{\mathbb{R}^k}, \frac{1}{\omega_k} \mathcal{H}^k, 0_k \right) \quad (r \downarrow 0)$$

を満たす $x \in X$ 全体のこととし、

$$\mathcal{R}_k^* := \left\{ x \in \mathcal{R}_k : \exists \lim_{r \downarrow 0} \frac{m(B_r(x))}{\omega_k r^k} \in (0, \infty) \right\}. \quad (3.1)$$

とおく。このとき、一意的に定まる $k_0 \in \{1, 2, \dots, [N]\}$ が存在して ($[N]$ で N の整数部分を表している), $m(X \setminus \mathcal{R}_{k_0}^*) = 0$ かつ $\lim_{r \downarrow 0} \frac{m(B_r(x))}{\omega_k r^k} = \frac{dm \llcorner_{\mathcal{R}_{k_0}^*}}{d\mathcal{H}^{k_0}}(x)$, $m - a.e. x \in \mathcal{R}_{k_0}^*$ が成り立つ。この k_0 を $\dim(X, d)$ と書く。³

³実は k_0 は距離にのみ依存することが知られているためこのような表記をしている [K18].

次が [AHT18] で得られた Weyl の漸近公式の特徴付けであり、仮定 (3.2) は知られている全てのコンパクト $\text{RCD}(K, N)$ 空間で満たされていることは注意しておきたい：

定理 3.2 (Weyl の漸近公式の特徴付け). $(X, \mathbf{d}, \mathbf{m})$ をコンパクト $\text{RCD}(K, N)$ 空間とし、 $k = \dim(X, \mathbf{d})$ とおく. このとき、

$$\lim_{r \downarrow 0} \int_X \frac{r^k}{\mathbf{m}(B_r(x))} \mathbf{d}\mathbf{m}(x) = \int_X \lim_{r \downarrow 0} \frac{r^k}{\mathbf{m}(B_r(x))} \mathbf{d}\mathbf{m}(x) < +\infty \quad (3.2)$$

が成り立つことと、次が成り立つことは同値である：

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{N_{(X, \mathbf{d}, \mathbf{m})}(\lambda)}{\lambda^{k/2}} = \frac{\omega_k}{(2\pi)^k} \mathcal{H}^k(\mathcal{R}_k^*) < +\infty. \quad (3.3)$$

例えばこの定理を用いると例 (1.7) に対して Weyl の漸近公式を示すことができる：

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{N_{([0, \pi], \mathbf{d}_{\mathbb{R}}, \sin^{N-1} t dt)}(\lambda)}{\lambda^{1/2}} = \frac{\omega_1}{2\pi} \mathcal{H}^1((0, \pi)) = 1. \quad (3.4)$$

他にも Alexandrov 空間に対しても仮定 (3.2) をチェックすることができるので、Alexandrov 空間でも Weyl の漸近公式は正しく、それも新しい。

4 スペクトル収束

Laplacian のスペクトル収束とは、

$$\lambda_k(X_i, \mathbf{d}_i, \mathbf{m}_i) \rightarrow \lambda_k(X, \mathbf{d}, \mathbf{m}) \quad \forall k$$

という主張が (固有関数の収束までこめて) 成り立つことを指す. ここに $(X_i, \mathbf{d}_i, \mathbf{m}_i) \xrightarrow{mGH} (X, \mathbf{d}, \mathbf{m})$ で、 λ_k は (重複度をこめて数えたときの) k 番目の Laplacian の固有値である.

スペクトル収束は最初、深谷によって [F87] で mGH 収束の概念の導入とともに現れ、Cheeger-Colding の仕事の後、現在では RCD 空間の枠組みまで Gigli-Mondino-Savaré によって一般化されている [GMS15]. 同様のスペクトル収束は Laplacian に限らず、Schrödinger 作用素 [H18a] や重み付き $\bar{\partial}$ 作用素等 [FHS17] でも成り立ち、また、定理 2.6 も一種のスペクトル収束とみなせる. 空間もしくは、考えている微分作用素が非線形なときには高次の固有値をどのように捕まえるかということがそもそも難しく、たとえば Krasnoselskii 種数を使うとうまくいくことがある [AHP17].

ここでは Laplacian のスペクトル収束の局所版について議論する. 設定は点付き $\text{RCD}(K, N)$ 空間の mGH 収束列 $(X_i, \mathbf{d}_i, x_i, \mathbf{m}_i) \xrightarrow{mGH} (X, \mathbf{d}, x, \mathbf{m})$ に対して、局所スペクトル収束、すなわち Dirichlet 問題に関する固有値の収束

$$\lambda_k^D(B_R(x_i), \mathbf{d}_i, \mathbf{m}_i) \rightarrow \lambda_k^D(B_R(x), \mathbf{d}, \mathbf{m}) \quad \forall k, \forall R > 0 \quad (4.1)$$

および固有関数の収束が成り立つか、という問いを考える.

答えは「一般には成立しない」である. 例えば $(\mathbb{S}^1(r), \mathcal{H}^1) \xrightarrow{mGH} (\mathbb{S}^1(1), \mathcal{H}^1)(r \uparrow 1)$ を考えると、 $k = 1, R = \pi$ で反例が作れる.

では次に局所スペクトル収束がいつ成り立つのか、という問いを考えよう. 実は (4.1) の定式化はあまりよろしくなく、 R を収束列にするほうが適切になる. すなわち、 $(X_i, \mathbf{d}_i, x_i, \mathbf{m}_i)$ に関し、 $(x, R) \in X \times \mathbb{R}_{>0}$ で局所スペクトル収束するということを

$$\lambda_k^D(B_{R_i}(x_i), \mathbf{d}_i, \mathbf{m}_i) \rightarrow \lambda_k^D(B_R(x), \mathbf{d}, \mathbf{m}) \quad \forall k, \forall R_i \rightarrow R \quad (4.2)$$

および固有関数の L^2 収束が成り立つことで定義する. すなわち、より強い形で局所スペクトル収束を定式化する. 次が [AH17b] の主結果の 1 つで、ほとんどの場合で局所スペクトル収束が成り立つことを意味する：

定理 4.1 (局所スペクトル収束の必要十分条件). (X, d, m) を $RCD(K, N)$ 空間とし, 各 $(x, R) \in X \times \mathbb{R}_{>0}$ に対して, 次の 3 条件は同値:

1. ある収束する点付き $RCD(K, N)$ 空間列 $(X_i, d_i, x_i, m_i) \xrightarrow{mGH} (X, d, x, m)$ に関して, (x, R) で局所スペクトル収束が成り立つ.
2. 任意の収束する点付き $RCD(K, N)$ 空間列 $(X_i, d_i, x_i, m_i) \xrightarrow{mGH} (X, d, x, m)$ に関して, (x, R) で局所スペクトル収束が成り立つ.
3. $H_0^{1,2}(B_R(x), d, m) = \bigcap_{\epsilon > 0} H_0^{1,2}(B_{R+\epsilon}(x), d, m)$ が成り立つ. ここに $H_0^{1,2}(B_R(x), d, m)$ は $B_R(x)$ にコンパクトサポートを持つ *Lipschitz* 関数全体の $H^{1,2}(X, d, m)$ 内での閉包である.

そして各 $x \in X$ に対して $E_x := \{R > 0; \text{上の条件 (3) が成り立たない}\}$ とおくと, これは高々可算集合である.

このことを応用すると, Petrunin により [Pet03] で提起された mGH 収束に関する調和関数の振る舞いに関する問いに, 予想されていた結論よりもより強い形で答えを与えることができる. 興味を持たれた方は [AH17b] を見て欲しい.

5 埋め込み問題

任意の閉 Riemann 多様体 (M^n, g) は十分大きな次元の Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ に等長的に埋め込める, という Nash の埋め込み定理を思い出そう [N56]. ここでの「等長」とは, 埋め込み $\varphi: M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ の引き戻し計量 $\varphi^*g_{\mathbb{R}^N}$ が g に一致することを意味し, (当たり前ではあるが) 決して距離の意味の等長埋め込みではないことを注意しておく.

この Nash の埋め込み定理は調和写像の研究などの幾何解析において重要な役割を果たしているが, 一方で, この埋め込み写像は自然ではないという問題もある.

Bérard-Besson-Gallot は [BBG94] で, 「等長」という条件を「ほぼ等長」に, 「 $\mathbb{R}^N$ 」を「無限次元 Hilbert 空間」と緩める代わりに, 写像を自然なものにした. より正確には (M^n, g) の熱核 $p(x, y, t)$ を使って, (M^n, g) を $L^2 := L^2(M^n, \text{vol})$ に埋め込み;

$$\Phi_t: M^n \hookrightarrow L^2 \quad (\Phi_t(x) := p(x, \cdot, t)) \quad (5.1)$$

これが滑らかで, その引き戻し計量 $\Phi_t^*g_{L^2} \in C^\infty(T_2^0(M^n))$ が次の表示と ($t \rightarrow 0+$ に関する) 漸近展開を持つことを示した;

$$\Phi_t^*g_{L^2}(v, w) = \int_{M^n} g(\nabla_x p(x, y, t), v) g(\nabla_x p(x, y, t), w) d\text{vol}(y) \quad v, w \in T_x M^n, \quad (5.2)$$

$$c(n)t^{(n+2)/2}\Phi_t^*g_{L^2} = g - \frac{t}{3} \left(\text{Ric}_{M^n}^g g - \frac{1}{2} \text{Scal}_{M^n}^g g \right) + O(t^2). \quad (5.3)$$

ここに $c(n)$ は n にのみ依存する正の定数であり, $\text{Scal}_{M^n}^g$ は (M^n, g) のスカラー曲率である.

ここから, L^2 空間を固有関数を使って有限次元で切ること, 十分大きな次元の Euclid 空間に, “quantitative” に, ほぼ等長的に埋め込める (例えば [P16]). ただし, 有限次元で切際には空間の滑らかさは本質的で, 単射半径および調和半径のコントロールが鍵となる.

なお, Riemann 多様体の有限次元 Euclid 空間への自然な埋め込みの問題は機械学習とも深い関係があり, 応用上も非常に重要であることが知られている.

以上を $RCD(K, N)$ 空間 (X, d, m) で考える. 正確な主張を述べるために, 「 (X, d, m) 上の Riemann 計量」という概念は意味を持ち, さらに, 自然な Riemann 計量 $g = g_{(X, d, m)}$ が一意的に存在することに注意しておく (すなわち, $\Gamma(f, h) = g(\nabla f, \nabla h), \forall f, h \in H^{1,2}$ で特徴づけられる. 例えば [G18] を見よ).

ここで [AHPT18] の主結果を述べよう:

定理 5.1 (L^2 への自然なほぼ等長埋め込み). (X, d, m) をコンパクト $RCD(K, N)$ 空間とし, $k := \dim(X, d)$ とおく. このとき, $(L^\infty$ ベクトル場からなる空間上の) 双線形写像:

$$(V, W) \mapsto \int_X \int_X g(\nabla_x p(x, y, t), V) g(\nabla_x p(x, y, t), W) dm(x) dm(y) \quad (5.4)$$

は *Riemann* 計量 g_t を一意的に定め (すなわち $\int_X g_t(V, W) dm$ が (5.4) の右辺に等しい), $tm(B_{\sqrt{t}}(x))g_t \leq C(K, N)g$ かつ $tm(B_{\sqrt{t}}(x))g_t \rightarrow \frac{\omega_k}{4\sqrt{2\pi}^k} g$ ($t \downarrow 0$) が L^2 の意味で成り立つ. ここに $C(K, N)$ は K, N にのみ依存する正の定数である.

6 予想

最後に, 予想を二つ提出して本稿を終える. 最近では測度距離空間上の二階微分可能構造の研究が進み始められており ([G18, H14]), 下の予想はそれと関わる.

予想 6.1. (X, d, m) を $RCD(K, N)$ 空間とし, $k = \dim(X, d)$ とおく. このとき, 定理 3.1 で現れた関数 $u := \frac{dm \llcorner \mathcal{R}_k^*}{d\mathcal{H}^k}$ は次の意味で微分可能である; *Borel* 部分集合族 $A_i \subset \mathcal{R}_k^* (i \in \mathbb{N})$ が存在して, $m(X \setminus \bigcup_i A_i) = 0$ かつ, u の各 A_i への制限 $u|_{A_i}$ は *Lipschitz* である. さらに, 任意の $h \in D(\Delta)$ に対して $\Delta h = \text{tr}(\text{Hess}_h) + g(\nabla h, \nabla f)$ が成り立つ. ここに $f := \log u$.

予想 6.2. コンパクト $RCD(K, N)$ 空間の mGH 収束列 $(X_i, d_i, m_i) \xrightarrow{mGH} (X, d, m)$ が, 十分大きな任意の i に対して $\dim(X_i, d_i) = \dim(X, d)$ を満たしているとする. このとき, 1 微分形式に作用する *Hodge Laplacian*, および全ての型のテンソル場に作用する接続 *Laplacian* に関するスペクトル収束が成り立つ. さらに, 十分大きな任意の i に関して, (X_i, d_i, m_i) 上の調和 1 形式の空間の次元と, (X, d, m) 上のそれは等しい.

この予想 6.2 の前半部分は, 考えている列が Ricci 曲率が上下に有界な *Riemann* 多様体からなっている場合には [H17] で示されており, 後半はその設定ですら未解決である.

References

- [A18] L. AMBROSIO: *Calculus and curvature-dimension bounds in metric measure spaces*, to appear in the Proceedings of the ICM 2018.
- [AGS14] L. AMBROSIO, N. GIGLI, G. SAVARÉ: *Metric measure spaces with Riemannian Ricci curvature bounded from below*, *Duke Math. J.* **163** (2014), 1405–1490.
- [AH17a] L. AMBROSIO, S. HONDA: *New stability results for sequences of metric measure spaces with uniform Ricci bounds from below*, *Measure Theory in Non-Smooth Spaces*, De Gruyter Press, edited by Nicola Gigli, 1–51.
- [AH17b] L. AMBROSIO, S. HONDA: *Local spectral convergence in $RCD^*(K, N)$ -spaces*, to appear in *Nonlinear Anal.*
- [AHP17] L. AMBROSIO, S. HONDA, J. W. PORTEGIES: *Continuity of nonlinear eigenvalues in $CD(K, \infty)$ spaces with respect to measured Gromov-Hausdorff convergence*, to appear in *Calc. Var. PDEs*.
- [AHT18] L. AMBROSIO, S. HONDA, D. TEWODROSE: *Short-time behavior of the heat kernel and Weyl’s law on $RCD^*(K, N)$ -spaces*, *Ann. Global Anal. Geom.* **53** (2018), 97–119.

- [AHPT18] L. AMBROSIO, S. HONDA, J. W. PORTEGIES, D. TEWODROSE: *Embedding of $\mathrm{RCD}^*(K, N)$ -spaces in L^2 via eigenfunctions*, preprint.
- [AMS15] L. AMBROSIO, A. MONDINO, G. SAVARÉ: *Nonlinear diffusion equations and curvature conditions in metric measure spaces*. to appear in *Memiors of the AMS*.
- [BBG94] P. BÉRARD, G. BESSON, S. GALLOT: *Embedding Riemannian manifolds by their heat kernel*, *Geom. Funct. Anal.*, **4** (1994), 373–398.
- [B09] J.-P. BOURGUIGNON: *Ricci curvature and measures*, *Jpn. J. Math.* **4** (2009), 27–45.
- [BrS18] E. BRUÈ, D. SEMOLA, *Constancy of the dimension for $\mathrm{RCD}(K, N)$ spaces via regularity of Lagrangian flows*, Arxiv preprint 1804.07128.
- [CDS15] X. X. CHEN, S. K. DONALDSON, S. SUN, *Kähler-Einstein metric on Fano manifolds I, II, III*, *J. Amer. Math. Soc.* **28** (2015), 183–197, 199–234, 235–278.
- [CM16] F. CAVALLETTI, E. MILMAN: *The globalization theorem for the curvature dimension condition*, Arxiv preprint 1612.07623.
- [C99] J. CHEEGER: *Differentiability of Lipschitz functions on metric measure spaces*, *Geom. Funct. Anal.* **9** (1999), 428–517.
- [CC97, CC00] J. CHEEGER, T. H. COLDING: *On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below, I, II, III* *J. Differential Geom.* **46**, **54**, **54** (1997, 2000, 2000), 406–480, 13–35, 37–74.
- [CN12] T.H. COLDING, A. NABER: *Sharp Hölder continuity of tangent cones for spaces with a lower Ricci curvature bound and applications*. *Ann. of Math.*, **176** (2012), 1173–1229.
- [D02] Y. DING: *Heat kernels and Green’s functions on limit spaces*, *Comm. Anal. Geom.* **10** (2002) 475–514.
- [EKS15] M. ERBAR, K. KUWADA, K.-T. STURM: *On the equivalence of the entropic curvature-dimension condition and Bochner’s inequality on metric measure spaces*, *Invent. Math.*, **201** (2015), 993–1071.
- [F87] K. FUKAYA: *Collapsing of Riemannian manifolds and eigenvalues of the Laplace operator*, *Invent. Math.* **87** (1987), 517–547.
- [FHS17] A. FUTAKI, S. HONDA, S. SAITO: *Fano-Ricci limit spaces and spectral convergence*, *Asian J. Math.* **21** (2017), 1015–1062.
- [G13] N. GIGLI *The splitting theorem in non-smooth context*, Arxiv preprint 1302.5555.
- [G18] N. GIGLI *Nonsmooth differential geometry—an approach tailored for spaces with Ricci curvature bounded from below*, *Memoirs of the AMS*, **251** (2018), 1196.
- [GKO13] N. GIGLI, K. KUWADA, S. OHTA: *Heat flow on Alexandrov spaces*, *Comm. Pure Appl. Math.* **66** (2013), 307–331

- [GMS15] N. GIGLI, A. MONDINO, G. SAVARÉ, *Convergence of pointed non-compact metric measure spaces and stability of Ricci curvature bounds and heat flows*. Proc. of the London Math. Soc., **111** (2015), 1071–1129.
- [H11] S. HONDA: *Ricci curvature and convergence of Lipschitz functions*. Comm. Anal. Geom., **19** (2011), 79–158.
- [H14] S. HONDA: *A weakly second-order differential structure on rectifiable metric measure spaces*. Geom. Topol. **18** (2014), 633–668.
- [H15] S. HONDA: *Ricci curvature and L^p -convergence*. J. Reine Angew Math., **705** (2015), 85–154.
- [H17] S. HONDA, *Spectral convergence under bounded Ricci curvature*. J. Funct. Anal., **273** (2017), 1577–1662.
- [H18a] S. HONDA, *Elliptic PDEs on compact Ricci limit spaces and applications*, Memoirs of the AMS, **253** (2018), 1211.
- [H18b] S. HONDA, *Bakry-Émery conditions on almost smooth metric measure spaces*. Arxiv preprint, 1804.07043v2.
- [K18] Y. KITABEPPU, *A Sufficient Condition to a regular set being of positive measure on RCD spaces*, to appear in Potent. Anal.
- [KKOST17] 桑江一洋, 桑田和正, 太田慎一, 塩谷隆, 高津飛鳥, 最適輸送理論とリッチ曲率, 数学メモアール第8巻, 日本数学会, (2017).
- [KS03] K. KUWAE, T. SHIOYA, *Convergence of spectral structures: a functional analytic theory and its applications to spectral geometry*, Commun. Anal. Geom., **11** (2003), 599–673.
- [LV09] J. LOTT, C. VILLANI, *Ricci curvature for metric-measure spaces via optimal transport*, Ann. of Math., **169** (2009), 903–991.
- [MN14] A. MONDINO, A. NABER, *Structure theory of metric measure spaces with lower Ricci curvature bounds*, to appear in J. Eur. Math. Soc.
- [N56] J. NASH, *The imbedding problem for Riemannian manifolds*, Ann. of Math. **63** (1956), 20–63.
- [Pet03] A. PETRUNIN, *Harmonic functions on Alexandrov spaces and their applications*, Elect. Res. Announ. of the AMS, **9** (2003), 135–141.
- [P16] J. W. PORTEGIES, *Embedding of Riemannian manifolds with heat kernels and eigenfunctions*, Comm. Pure Appl. Math., **69** (2016), 478–518.
- [St06] K.-T. STURM, *On the geometry of metric measure spaces, I, II*. Acta Math. **196** (2006), 65–131 and 133–177.
- [T15] G. TIAN, *K-stability and Kähler-Einstein metrics*. Comm. Pure Appl. Math. **68** (2015), 1085–1156.
- [V16] C. VILLANI, *Synthetic theory of Ricci curvature bounds*, Jpn. J. Math., **11** (2016), 219–263.