

シンプレクティック多様体上のディラック型作用素 の指数とその局所化について

藤田 玄 (日本女子大学)*

1. 概要

本講演における研究目的は、幾何学的量子化の文脈で現れるある種の局所化現象を Dirac 型作用素の摂動による指数理論を通じて幾何学的に理解する、ということにある。なお、この局所化現象は、群作用に関する固定点公式などとは本質的に異なるものである。本稿の構成は以下のものである。まず、2 節にて幾何学的量子化に関して非常に大雑把な説明をし、動機を説明する。3 節および 4 節では、古田幹雄(東大数理) および吉田尚彦(明治理工) との共同研究で構築した、指数の局所化現象を幾何学的に理解するための、ファイバー束(の族)とそのファイバーに沿った摂動による指数理論の概要、およびその応用について述べる。5 節では、重要な性質として指数の同境不変性およびその応用を述べ、最後に 6 節で残された問題および近年盛んに研究されている無限次元版について今後の展望について述べる。

2. 動機 - 幾何学的量子化, Lagrange ファイバー束と指数の局所化 -

シンプレクティック構造およびその幾何学は、解析力学を幾何学的に展開する舞台として発展してきた。その発展の中で、解析力学から量子力学に移行する手続きの幾何学化も様々な形で発展してきた。その一つが幾何学的量子化である。非常に大雑把な枠組みだけを述べると、幾何学的量子化とは

与えられたシンプレクティック多様体から“よいベクトル空間”を構成する処方箋

$$(M, \omega) : \text{シンプレクティック多様体} \rightsquigarrow \mathcal{H} = \mathcal{H}(M, \omega) : \text{ベクトル空間}$$

である。何をもって“よいベクトル空間”とみなすかは様々な観点があるが、大きな目標の一つに「Poisson 代数の表現としての構成」がある。すなわち、古典系を量子化するという手続きを (M, ω) 上の関数から $\mathcal{H}$ 上の作用素を構成する方法、と考えたとき、関数環 $C^\infty(M)$ 上に定まる Poisson 代数の構造に関して $\mathcal{H}$ がその表現になるように構成する、という目標である。これは正準量子化の幾何学化という意味で極めて重要な問題意識であるが、その方向はいわゆる変形量子化の範疇のものであるので、ここでは触れない(というか講演者は全く素人なので触れることはできない)。 $\mathcal{H}$ を構成する基本原理は以下のように付加構造を用いて関数空間から適当な部分空間を取り出すことである：

1. (M, ω) 上に前量子化束 (L, ∇) , すなわち M 上の Hermite 直線束 L とその Hermite 接続 ∇ の組であって ∇ の曲率形式が $-\sqrt{-1}\omega$ に一致するもの、をとる。
2. M 上に偏極 $\mathcal{P}$, すなわち M の接束の複素化の可積分な Lagrange 接分布、をとる

本研究は科研費(課題番号:26800045)の助成を受けたものである。

2010 Mathematics Subject Classification: 53D50, 19K56

キーワード: シンプレクティック多様体, 幾何学的量子化, Dirac 型作用素, 指数の局所化

* 〒112-8681 東京都文京区目白台 2-8-1 日本女子大学 理学部

e-mail: fujitah@fc.jwu.ac.jp

3. (L, ∇) の切断であって $\mathcal{P}$ 方向に平行なものの全体を $\mathcal{H}$ とする.

ただし, この処方箋は任意のシンプレクティック多様体に対して機能するわけではなく, 様々な(重要な)例をこの枠組みで捉えることができる, という類のものである. 例えば, 1. の前量子化束の存在については, ω の定める de-Rham コホモロジー類が整係数類に持ち上がる, という位相的な障害がある. この処方箋が機能する典型的な例は, (前量子化束をもつ) Kähler 多様体である. Kähler 多様体の複素構造は **Kähler 偏極** という偏極を定め, $\mathcal{H}$ として L の正則切断の空間が得られる. 特に本研究に関わりの深い例として

前量子化束をもつトーリック多様体とその正則切断の空間

が挙げられる. この Kähler 偏極による量子化で得られる

$$\mathcal{H} = \text{『正則切断の空間』} = \text{『0 次 Dolbeault コホモロジー』}$$

は, Dirac 作用素の解析的指数として現れる. 実際, $\bar{\partial}_L$ および $\bar{\partial}_L^*$ を L に値を持つ M 上の反正則微分形式の空間に作用する Dolbeault 作用素およびその $(L^2\text{-内積に関する})$ 共役とすると, $D_L := \bar{\partial}_L + \bar{\partial}_L^*$ は Dolbeault-Dirac 作用素とよばれ, その解析的指数は Dolbeault の定理より K 群の要素として

$$\text{ind} D_L := \ker(D_L) - \text{coker}(D_L) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i H^i(M, L)$$

となる. とくに, 高次コホモロジーが消滅している場合,

$$\text{ind}(D_L) = H^0(M, L) = \mathcal{H},$$

つまり, **幾何学的量子化が Dirac 作用素の指数とみなせる**. なお, この (spin^c) Dirac 作用素自体は概複素構造があれば定義できるため, 不変量 $\text{ind}(D_L)$ は任意の前量子化束をもつシンプレクティック多様体に対して定義可能であり, 通常これは Riemann-Roch 数とよばれ $RR(M, L)$ などとかかれる. この観点を推し進めて spin^c 量子化という方向の研究も進展している.

Kähler 構造とは異なる偏極に Lagrange ファイバー束の構造から定まる **実偏極** がある. 実偏極による量子化に関して, 次の **Bohr-Sommnerfelt ファイバー/軌道** が重要である. シンプレクティック多様体上の Lagrange ファイバー束構造 $\pi : (M, \omega) \rightarrow B$ について, $b \in B$ 上のファイバー $F (= \pi^{-1}(b))$ が Bohr-Sommnerfelt (BS) ファイバーであるとは, (L, ∇) の F への制限 $(L, \nabla)|_F$ が自明な平坦直線束となること, である. このとき, $b \in B$ を Bohr-Sommnerfelt (BS) 点という. BS 点は B 内のある種の格子点上に離散的に現れることが知られている. 実偏極による量子化において BS 点が重要となることが次の定理から示唆される.

定理 2.1 ([13]). Lagrange ファイバー束 $\pi : (M, \omega) \rightarrow B$ に関して, M がコンパクトなとき実偏極 $\mathcal{P}$ の方向に平行な切断のなす層 $\mathcal{S}_{\mathcal{P}}$ のコホモロジーは

$$H^*(M, \mathcal{S}_{\mathcal{P}}) = \begin{cases} 0 & (* \neq \frac{1}{2} \dim M) \\ \bigoplus_{b \in \text{BS}} \Gamma_{\text{par}}(\pi^{-1}(b), L|_{\pi^{-1}(b)}) & (* = \frac{1}{2} \dim M). \end{cases}$$

となる. ただし, BS は B 内の BS 点全体の集合, $b \in \text{BS}$ に対して $\Gamma_{\text{par}}(\pi^{-1}(b), L|_{\pi^{-1}(b)})$ は $(L, \nabla)|_{\pi^{-1}(b)}$ の大域的平行切断全体のなす (1 次元) ベクトル空間である. とくに, $\dim H^*(M, \mathcal{S}_{\mathcal{P}}) = \# \text{BS}$ となる.

幾何学的量子化の処方箋を鑑みると $\mathcal{H} = H^*(M, \mathcal{S}_P)$ と考えられるので、定理 2.1 は実偏極による量子化が離散的に現れる BS ファイバーたちに局所化する、ということを示唆する。

前述のトーリック多様体は以下に説明するように、Kähler 偏極と実偏極を同時に許容する重要な例である。トーリック多様体は、付随する運動量写像により特異ファイバーを許容する Lagrange ファイバー束の構造をもつことがよく知られている。特異ファイバーは運動量写像の像として現れる凸多面体¹の境界上の点の逆像として現れる。このトーリック多様体上の特異ファイバーを許容する状況で、

- BS 点の集合は付随する凸多面体内の格子点の集合²に一致する。
- 正則切断の空間の次元は格子点の個数に一致する。

となることが知られている。とくに、2つめの事実は代数幾何学において古典的な Danilov の定理 ([2]) として知られている。実際には、より精密に、正則切断の空間を多様体に作用するトーラスの表現空間とみたとき、その表現は多面体内の格子点の定める 1 次元表現の直和と同型になる。これらの事実は以下の 2 つのことを示唆する。

1. Kähler 偏極による量子化と実偏極による量子化のそれらの対称性もこめた一致
2. Dirac 作用素の指数 (=Kähler 偏極による量子化) の格子点の逆像 (=BS ファイバー) への局所化

1. は量子化が偏極に依存するか? という問題に対するひとつの回答であり、Kähler 偏極による量子化を Dirac 作用素の指数 (=Riemann-Roch 数)、実偏極による量子化を BS 点で生成されるベクトル空間とみなしてシンボリックに『RR=BS』などと表される。この現象は、(Kähler 構造をもつ) 非特異 Lagrange ファイバー束の場合に知られていたものであり、同様の『RR=BS』的な現象が

- Riemann 面上の平坦接続のモジュライ空間 (Goldman 系) [10]
- 旗多様体 (Gelfand-Cetlin 系) [9]

に対しても成立することが知られている。

本研究の目的は、この『RR=BS』的な現象を、**Dirac 作用素の指数のある種の局所化のメカニズムを通じて幾何学的/直接的に理解する**、ということにある。次節で、その理解に向けて古田幹雄氏 (東大数理) と吉田尚彦氏 (明治理工) との共同研究により構築した、開 Riemann 多様体上の指数理論の一般的な枠組みを説明する。

¹ この多面体は Delzant 多面体という特殊な多面体として特徴づけられる。

² 境界上の点の上のファイバーは特異ファイバーであるが、次元の低いイソトローピックトーラスとなるので、BS ファイバーの条件がそのまま適用できる。

3. ファイバーに沿った Dirac 作用素の摂動と指数の局所化

3.1. プロトタイプ

天下りの的ではあるが以下のようなデータ (M, W, V, U, π, D_π) を考える.

1. コンパクトとは限らない Riemann 多様体 M .
2. M 上の $\mathbb{Z}/2$ -次数付き Clifford 加群束 W .
3. M の開集合 V であって補集合 $M \setminus V$ がコンパクトとなるもの.
4. V は閉多様体をファイバーとするファイバー束の構造 $\pi: V \rightarrow U$ をもつ. ただし, U も Riemann 多様体であって π は Riemannian 沈めこみである.
5. V 上のファイバーに沿った $\mathbb{Z}/2$ -次数付き Dirac 型作用素 D_π であって, 底空間方向の Clifford 積と反可換なもの. すなわち, D_π は $W|_V$ の切断の空間に作用する微分作用素 D_π で次をみたすもの.
 - (a) D_π は π のファイバー方向の微分のみ含む. すなわち, U 上の関数の π による引き戻しによる掛け算作用と D_π は可換である.
 - (b) D_π の π のファイバー $\pi^{-1}(b)$ への制限は $W|_{\pi^{-1}(b)}$ に作用する $\mathbb{Z}/2$ -次数付き Dirac 型作用素である. すなわち, $D_\pi|_{\pi^{-1}(b)}$ は 1 階の形式的自己共役作用素であってその主表象は Clifford 作用である.
 - (c) D_π は U 方向の Clifford 積と反可換である. すなわち, U の任意の接ベクトル v に対して, π による v の水平持ち上げとして定まるファイバー上のベクトル場を $\tilde{v}$ とするとき, $\tilde{v}$ による Clifford 積と D_π は反可換である.

これらのデータに加えて, W に作用する $\mathbb{Z}/2$ -次数付き Dirac 型作用素 D と M 上の滑らかな関数 $\rho: M \rightarrow [0, 1]$ であって, $M \setminus V$ 上で恒等的に 0, その適当なコンパクト近傍の補集合上で恒等的に 1, となるものを任意に固定する. このとき, 次の形の D の摂動を考える.

$$D_t := D + t\rho D_\pi: \Gamma(W) \rightarrow \Gamma(W) \quad (t \geq 0). \quad (1)$$

摂動 (1) は Witten[17] が Poincaré-Hopf の定理および Morse の不等式を Dirac 作用素の指数の局所化として理解するために導入した摂動のある種の無限次元版である. M が閉多様体の場合, 任意の $t \geq 0$ に対して D_t が楕円型であることから, D_t は Fredholm 作用素となり, 指数のホモトピー不変性から $\text{ind}(D_t) = \text{ind}(D)$ となる. この $\text{ind}(M, W) := \text{ind}(D)$ は (M, W) の位相不変量であり, Atiyah-Singer の指数定理により特性類の積分として記述される. M が閉多様体とはかぎらない場合の次の定理が我々の理論のプロトタイプである.

定理 3.1 ([6]). 任意の $b \in U$ に対して $\ker(D_\pi|_{\pi^{-1}(b)}) = 0$ とする. さらに, V がシリンダー状の端をもち, 与えられたデータが平行移動に関して不変であると仮定する.

1. $M = V$ のとき, 十分大きい任意の t に対して $\ker(D_t) = 0$ となる.
2. $M = V$ とは限らない場合, 十分大きい任意の t に対して $\ker(D_t)$ は有限次元となり, その解析的指数 $\text{ind}(D_t)$ は t によらない. さらに, $\text{ind}(D_t)$ は与えられたデータの連続変形に関する不変性, 切除公式および和公式をみたす.

定義 3.1. この $\text{ind}(D_t)$ を (M, W, V, U, π, D_π) の**局所指数**あるいは**相対指数**といい,

$$\text{ind}(M, V) = \text{ind}(M, V, W) = \text{ind}(M, W, V, U, \pi, D_\pi) := \text{ind}(D_t)$$

とかく.

定理 3.1 の証明のカギは, Laplace 型作用素 $(D_t)^2$ の V 上でのスペクトルギャップを示すことにある. シリンダー状の端でない場合も, V を適当な超曲面で切り取りシリンダー状の場合に帰着させることで $\text{ind}(M, V)$ が定義できる. 切り取り方に依存しないことは定理 3.1 の 1. からわかる. この事実は $\text{ind}(M, V)$ に対する**切除公式**そのものであり, その性質が指数の局所化に直結する: M が閉多様体の場合を考える. $M \setminus V$ の任意の開近傍 N に対して, 切除公式より

$$\text{ind}(M, W) = \text{ind}(M, V, W) = \text{ind}(N, N \cap V, W|_{N \cap V})$$

となる. この等式は, $\text{ind}(M, W)$ がコンパクトな部分集合 $M \setminus V$ の近傍で定義される $\text{ind}(N, N \cap V, W|_{N \cap V})$ に一致する, すなわち $\text{ind}(M, W)$ の $M \setminus V$ への局所化を意味する.

注意 3.2. この枠組みは「条件をみたす構造があれば指数がその構造が定義されていない部分に局所化する」ということを意味する. しかし, 局所化した部分の連結成分ごとに局所的な寄与がどうなるかについては何も述べていない. 後述する応用例においても, 具体的な寄与がいくつになるかは個別に方針を考え計算を実行する必要がある.

3.2. 非特異 Lagrange ファイバー束の場合

3.1 節における構造 (M, W, V, U, π, D_π) は, 特異ファイバーをもたない Lagrange ファイバー束から自然に構成される³. まず, (M, ω) を前量子化束 $(L, \nabla) \rightarrow (M, \omega)$ をもつ $2n$ 次元閉シンプレクティック多様体とする. ω と整合的な M の複素構造 J から定まる Riemann 計量を g_J とし, J に関する反正則余接束のなす空間から定まる M 上の $\mathbb{Z}/2$ -次数付き Clifford 加群 $\wedge^\bullet T^*M^{0,1}$ に L をテンソルしたものを W_L とする.

定義 3.3. W_L の切断の空間に作用する $\mathbb{Z}/2$ -次数付き Dirac 型作用素 $D_L = D_L^+ \oplus D_L^-$ の解析的指数

$$RR(M, L) := \text{ind}(D_L) = \ker(D_L^+) - \ker(D_L^-) \in K(\text{pt}) \cong \mathbb{Z}$$

を **Riemann-Roch 数**という. ただし, $K(\cdot)$ は位相的 K 群であり, 次元を与える写像 $\dim : K(\text{pt}) \rightarrow \mathbb{Z}$ が同型を与える.

解析的指数のホモトピー不変性と ω と整合的な複素構造全体が可縮であることから, $RR(M, L)$ は J のとり方には依存しない.

次に, (M, ω) 上に特異ファイバーをもたない Lagrange ファイバー束の構造 $\pi : (M, \omega) \rightarrow B$ が存在する状況を考える. Arnold-Liouville の定理から, π のファイバーは n 次元トーラスとなる. いま, $T_{\text{fiber}}M$ を $\pi : M \rightarrow B$ のファイバーに沿った接束とすると, 直交射影 $TM \rightarrow T_{\text{fiber}}M$ と g_J から定まる Levi-Civita 接続および ∇ を用いて, W_L の切断の空間に作用する π のファイバーに沿った Dirac 作用素 D_π が構成できる. さらに, J をうまく選ぶことにより D_π の各ファイバー $\pi^{-1}(b)$ への制限がファイバー上の平坦直線束

³実際は, Lagrange ファイバー束がもつ構造で指数の局所化に必要なものを抽出したものが (M, W, V, U, π, D_π) である.

$(L, \nabla)|_{\pi^{-1}(b)}$ に係数にもつ Hodge-de Rham 作用素であるようにできる. さらにこの事実から $D_\pi|_{\pi^{-1}(b)}$ と B 方向の Clifford 積の反可換性がしたがう. 一般には $\ker(D_\pi|_{\pi^{-1}(b)}) = 0$ とはならないが, 次の事実がカギとなる.

補題 3.2. 各 $b \in B$ に対して

$$\ker(D_\pi|_{\pi^{-1}(b)}) \cong H^*(\pi^{-1}(b), L|_{\pi^{-1}(b)})$$

が成立する. ただし, 右辺は平坦直線束 $(L, \nabla)|_{\pi^{-1}(b)}$ を係数にもつ局所系のコホモロジーである. さらに, これらが 0 となる条件は $b \in B$ が Bohr-Sommerfelt 点, すなわち $(L, \nabla)|_{\pi^{-1}(b)}$ が自明な平坦直線束となることである.

補題 3.2 より, M 内での BS ファイバーたちの補集合を V とし $U := \pi(V)$ とおくと, 任意の $b \in U$ に対して

$$\ker(D_\pi|_{\pi^{-1}(b)}) = 0$$

となる. したがってここで構成した $(M, W_L, V, U, \pi|_V, D_\pi|_V)$ は定理 3.1 の仮定を満たす. したがって, 非特異 Lagrange ファイバー束の RR 数 $RR(M, L)$ が V の補集合, つまり BS ファイバーに局所化することがわかる. さらに, BS ファイバーの近傍の標準形 (n 次元トーラスの余接束内の零切断の近傍) を用いて直接計算を実行することで, 各 BS ファイバーからの寄与は 1 となることがわかる. こうして次が得られる.

定理 3.3 ([1][6][11]). 非特異 Lagrange ファイバー束 $\pi : (M, \omega) \rightarrow B$ に対して, その RR 数は BS 点の個数に一致する. すなわち,

$$RR(M, L) = \#BS$$

となる.

定理 3.3 は, 非特異 Lagrange ファイバー束に対しての spin^c 量子化と実偏極による量子化が一致することを主張する等式である. 我々の指数の局所化によるもの以外にも様々な証明がある. Andersen[1] は, RR 数を与える特性類の積分が B 上の BS 点の数え上げに一致することを示し, 指数定理を経由して等式を示している. 窪田 [11] は, ジョイントスペクトラルフローを用いた指数の局所化の理論を用いている. また, 最近吉田尚彦は適当な条件をみたす Lagrange ファイバー束上の Dirac 作用素の $\ker$ の元を具体的に書き下すことで定理 3.3 の等式およびその局所化を考察する試みを行っている. 山下真由子は groupoid C^* 環の K 理論およびその指数理論により我々の局所化を再定式化する試みを行っている.

定理 3.3 を導く設定は特異ファイバーがある場合にも形式的には拡張可能である. つまり, BS ファイバーと特異ファイバーの和集合を考え, その補集合を V とすれば, やはり $RR(M, L)$ が $M \setminus V$ つまり BS ファイバーと特異ファイバーの近傍に局所化する. しかし, 例えばトーリック多様体の場合には特異ファイバーは運動量写像の像の多面体の境界のファイバー上に連続的に現れ, それら特異ファイバーから意味のある (例えば特異 BS ファイバーからの) 寄与を取り出すには別のメカニズムが必要となる. 次節ではそのための精密化とその応用を議論する.

注意 3.4. 3.1 節で説明したプロトタイプの非特異 Lagrange ファイバー束以外への適用例として Hamiltonian S^1 -作用の場合がある. 例えば [8] では, Hamilton S^1 -作用の場合

に指数の局所化を用いて量子化予想 ($[Q,R]=0$) を示し, 帰納法により一般のトーラス作用の場合を示している. また, [5] では [8] の構成を拡張し, Hamilton S^1 -作用をもつ非コンパクトなシンプレクティック多様体に対するある同変 RR 数の定義を与え, その指数に対する $[Q,R]=0$ を示した.

4. プロトタイプの精密化

トーリック多様体は, 特異ファイバーをもつ Lagrange ファイバー束であるが, その特異ファイバーは次元の低いイソトロピックトーラス (つまり, 各ファイバーへの ω の制限は 0 になる) となっている. [7] では, この構造を抽象化した幾何学的構造を考えることで定理 3.3 で得られた指数の局所化の精密化を得ている. 一言で述べるなら, その構造は多様体の開被覆とその上で定義された 3.1 節で説明した構造の族 (compatible fibration, compatible system), である. その全容は技術的にやや煩雑な条件も含むので, ここでは細部には踏み込まず具体例による要点のみを述べる.

例 4.1 (トーリック多様体上の compatible fibration). 4次元トーリック多様体として複素 2 次元の射影空間 $\mathbb{C}P^2$ を考える. ただし, k を正整数としてシンプレクティック構造は Fubini-Study 形式の k 倍によるものを考える. よく知られているように, トーリック多様体の構造は同次座標 $[z_1 : z_2 : z_3] \in \mathbb{C}P^2$ を用いて $(t_1, t_2) \in T^2 = S^1 \times S^1$ に対して

$$(t_1, t_2) \cdot [z_1 : z_2 : z_3] := [t_1 z_1 : t_2 z_2 : z_3]$$

で定まる T^2 作用で与えられ, この作用に関する運動量写像 $\mu : \mathbb{C}P^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ は

$$\mu([z_1 : z_2 : z_3]) = \frac{k}{|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2} (|z_1|^2, |z_2|^2)$$

となり, 像 $\Delta := \mu(\mathbb{C}P^2)$ は $(0, 0)$, $(k, 0)$, $(0, k)$ を頂点とする直角二等辺三角形になる. Δ を単体複体とみなすことで, 各次元ごとの切片による自然な stratification

$$\Delta = \Delta^{(0)} \cup \Delta^{(1)} \cup \Delta^{(2)}$$

が定まる. ただし, $\Delta^{(i)}$ は Δ の i 次元切片であり, $\Delta^{(i)} \setminus \Delta^{(i-1)}$ はいくつかの連結成分にわかれる. その連結成分の各々を $\Delta_l^{(i)}$ とする. トーリック多様体の一般論により次の事実が知られている:

逆像 $\mu^{-1}(\Delta_l^{(i)})$ は i 次元トーラスをファイバーとするイソトロピックトーラス束になる.

このトーラス束は T^2 の適当な部分群 $G_l^{(i)}$ による半自由な作用⁴により与えられる. 実際には, 有限の固定化部分群をもつことがあるので, 厳密にはオービフォールドの意味のファイバー束になる. 例えば, 直角二等辺三角形 Δ の斜辺に対応する連結成分を $\Delta_3^{(1)}$ とするとき, $b \in \Delta_3^{(1)}$ に対して $\mu^{-1}(b) \cong S^1$ であり, この逆像に含まれる点の固定化部分群は $\text{diag}(S^1) = \{(t, t) \in T^2 \mid t \in S^1\}$ となる. このとき, $G_3^{(1)} = \text{diag}(S^1)^\perp := \{(t, t^{-1}) \in T^2 \mid t \in S^1\} \cong S^1$ は逆像 $\mu^{-1}(\Delta_3^{(1)})$ に半自由に作用する. 逆像の各点でのこの $G_3^{(1)}$ -作用に関する固定化部分群は $\text{diag}(S^1) \cap \text{diag}(S^1)^\perp = \{(1, 1), (-1, -1)\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ である.

⁴ 具体的には, 切片の情報から固定化部分群が決まり, T^2 に適当に計量を固定することで, その直交部分として部分トーラスを定める.

このようなファイバー束構造は各 $\Delta_l^{(i)}$ の開近傍を十分小さくとることで、その逆像 $V_l^{(i)}$ 上まで自然に拡張し、 $\mathbb{C}P^2$ の開被覆 $\{V_l^{(i)}\}_{i,l}$ と各開集合上で定義されたトーラス束の族

$$\{\pi_l^{(i)} : V_l^{(i)} \rightarrow U_l^{(i)} = V_l^{(i)}/G_l^{(i)}\}_{i,l}$$

が得られる。この族は $(V_l^{(i)}$ たちを十分小さくとることで) 次の性質をもつ：

$$i < i' \text{ のとき, } \emptyset \neq V_l^{(i)} \cap V_{l'}^{(i')} \ni x \text{ に対して } (\pi_l^{(i)})^{-1}(\pi_l^{(i)}(x)) \subset (\pi_{l'}^{(i')})^{-1}(\pi_{l'}^{(i')}(x)).$$

このような、開被覆上で定義されたファイバー束の族であって、共通部分上でファイバーに包含関係のあるものは [7] では、*good compatible fibration* とよばれている。同様の構成により、トーリック多様体上にトーラス束の族を構成し、*good compatible fibration* の構造を定義することができる。応用上、特に我々の局所指数の積公式の定式化において、異なるファイバー間の包含関係という条件は強すぎる⁵もので、実際には [7] では包含関係を仮定しない次に定義される *compatible fibration* という構造 (と様々な技術的な仮定) のもとで理論が展開される。

定義 4.2 (compatible fibration). 多様体 V 上の compatible fibration とは以下の条件をみたすデータ $\{\pi_\alpha : V_\alpha \rightarrow U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ のことである。

1. $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ は V の開被覆である。
2. 各 $\alpha \in A$ に対して U_α は多様体であって、 $\pi : V_\alpha \rightarrow U_\alpha$ は閉多様体をファイバーとするファイバー束である。
3. 各 $\alpha, \beta \in A$ に対して

$$V_\alpha \cap V_\beta = \pi_\alpha^{-1}(\pi_\alpha(V_\alpha \cap V_\beta)) = \pi_\beta^{-1}(\pi_\beta(V_\alpha \cap V_\beta)).$$

例 4.3 (トーリック多様体上の compatible system とその acyclicity). 例 4.1 と同じ設定のもと、 $\mathbb{C}P^2$ 上の標準束の k 回テンソル積 L は前量子化束となり、複素構造から定まる $\mathbb{Z}/2$ -次数付き Clifford 加群束とのテンソルにより $\mathbb{Z}/2$ -次数付き Clifford 加群束 $W_L \rightarrow \mathbb{C}P^2$ を得る。このとき、各 $V_l^{(i)}$ 上には、イソトロピックトーラス束および $\mathbb{Z}/2$ -次数付き Clifford 加群束 $W_L|_{V_l^{(i)}} \rightarrow V_l^{(i)}$ があり、3.2 節での Lagrange ファイバー束の場合と同様の構成により、 $\pi_l^{(i)}$ のファイバーに沿った Dirac 作用素 $D_l^{(i)} : \Gamma(W|_{V_l^{(i)}}) \rightarrow \Gamma(W|_{V_l^{(i)}})$ が得られる。

このようにして得られるファイバーに沿った Dirac 作用素の族 $\{D_l^{(i)}\}_{i,l}$ は [7] で *compatible system* とよばれている。 M 上の Dirac 作用素のこれらのデータを用いた摂動に基づいて指数理論を展開しようと思ったとき、ある種の非退化性が必要となる。まず思いつくのは、Lagrange ファイバー束の場合と同様に、ファイバー上での非退化性、つまり

$$b \in U_l^{(i)} \text{ に対して } \ker \left(D_l^{(i)}|_{(\pi_l^{(i)})^{-1}(b)} \right) = 0$$

という条件である。実は、この条件は $\mu((\pi_l^{(i)})^{-1}(b)) \in \mathbb{Z}^2$ となること、さらには $(\pi_l^{(i)})^{-1}(b)$ が BS ファイバーであることと同値である。この事実から、 $\{D_l^{(i)}\}_{i,l}$ を用いた摂動から得られる局所指数により、Dirac 作用素の指数、すなわち Riemann-Roch 数の BS ファイ

⁵ ファイバーの包含関係という条件は直積で閉じていない。

バーへの局所化が期待される．この期待は実際に正しいのであるが，Dirac 作用素の摂動により指数理論を展開する際に技術的にポイントとなるのは次の事実である：

$$V_l^{(i)} \cap V_{l'}^{(i')} (\neq \emptyset) \text{ 上で } D_l^{(i)} D_{l'}^{(i')} + D_{l'}^{(i')} D_l^{(i)} \geq 0 \text{ である.}$$

実はこの例においては， $i < i'$ とすると反交換子は $D_l^{(i)} D_{l'}^{(i')} + D_{l'}^{(i')} D_l^{(i)} = (D_l^{(i)})^2 \geq 0$ となることがわかる．

例 4.3 で得られた構造を抽象化することで以下の定義にたどり着く．

定義 4.4 (Compatible system とその acyclicity). V を Riemann 多様体， $W \rightarrow V$ を V 上の $\mathbb{Z}/2$ -次数付き Clifford 加群束とする． V 上の compatible fibration $\{\pi_\alpha : V_\alpha \rightarrow U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ を考え，各 $\alpha \in A$ に対して U_α も Riemann 多様体であって $\pi_\alpha : V_\alpha \rightarrow U_\alpha$ は Riemannian 沈め込みであると仮定する．微分作用素の族 $\{D_\alpha\}_{\alpha \in A} = \{D_\alpha : \Gamma(W|_{V_\alpha}) \rightarrow \Gamma(W|_{V_\alpha})\}_{\alpha \in A}$ であって，各 $\alpha \in A$ に対して D_α が 3.1 節の D_π に対する条件 5(a)(b)(c) をみたすものを， $\{\pi_\alpha : V_\alpha \rightarrow U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 上の *compatible system* とよぶ．まとめて $\{V_\alpha, \pi_\alpha, D_\alpha\}_{\alpha \in A}$ を compatible sytem ということもある．

さらに，compatible system $\{D_\alpha\}_{\alpha \in A}$ が以下の条件をみたすとき *acyclic* であるという．

1. 各 $\alpha \in A$ と各 $b \in U_\alpha$ に対して， $\ker(D_\alpha|_{\pi_\alpha^{-1}(b)}) = 0$.
2. 各 $\alpha, \beta \in A$ に対して， $V_\alpha \cap V_\beta$ 上で反交換子 $D_\alpha D_\beta + D_\beta D_\alpha$ は非負の微分作用素.

注意 4.5. Acyclicity の 2 つめの条件 (反交換子の非負性) は後述する摂動の Fredholm 性を導くための十分条件として導入された．しかし，これは人工的な条件であってより自然な条件に置き換えることができると期待している．自然な条件としては，

各ファイバー上で $\{D_\alpha\}_{\alpha \in A}$ の任意の加重平均の kernel が自明

というものが考えられる．なお，上記の acyclicity はこの加重平均に対する条件を導く．

このような compatible system という構造 $\{V_\alpha, \pi_\alpha, D_\alpha\}_{\alpha \in A}$ を用いて，3.1 節と同様の設定と摂動を考える．

1. コンパクトとは限らない Riemann 多様体 M .
2. M 上の $\mathbb{Z}/2$ -次数付き Clifford 加群束 W .
3. M の開集合 V であって補集合 $M \setminus V$ がコンパクトとなるもの.
4. V 上の compatible fibration $\{\pi_\alpha : V_\alpha \rightarrow U_\alpha\}_{\alpha \in A}$.
5. V 上の compatible system $\{D_\alpha : \Gamma(W|_{V_\alpha}) \rightarrow \Gamma(W|_{V_\alpha})\}_{\alpha \in A}$.

さらに M 上の Dirac 型作用素 $D : \Gamma(W) \rightarrow \Gamma(W)$ と， M の開被覆 $\{V_\alpha, V_\infty\}_{\alpha \in A}$ (ただし， V_∞ は $M \setminus V$ の十分小さい開近傍) に従属する 1 の分割 $\{\rho_\alpha^2, \rho_\infty^2\}_{\alpha \in A}$ であって，

$V_\alpha \cap V_\beta \neq \emptyset$ のとき ρ_α は π_β のファイバー上定数関数

となるもの⁶を考える. これらを用いて

$$D_t := D + t \sum_{\alpha \in A} \rho_\alpha D_\alpha \rho_\alpha \quad (t \geq 0)$$

という形の摂動を考える. このとき, 定理 3.1 と同様に次の定理が得られる.

定理 4.1 ([7]). 上記設定において, $\{\pi_\alpha : V_\alpha \rightarrow U_\alpha\}_\alpha$ は good compatible fibration であり, compatible system $\{D_\alpha\}_\alpha$ は acyclic であるとする. さらに, V はシリンダー状の端をもち, $W, \{V_\alpha, U_\alpha, \pi_\alpha, D_\alpha\}_{\alpha \in A}$ などは平行移動に関して不変であると仮定する.

1. $M = V$ のとき, 十分大きい任意の t に対して $\ker(D_t) = 0$ となる.
2. $M = V$ とは限らない場合, 十分大きい任意の t に対して $\ker(D_t)$ は有限次元となり, その解析的指数 $\text{ind}(D_t)$ は t によらない. さらに, $\text{ind}(D_t)$ は与えられたデータの連続変形に関する不変性, 切除公式および和公式をみたす.

定義 4.6. 定理 4.1 において,

$$\text{ind}(M, V, W, \{V_\alpha, \pi_\alpha, D_\alpha\}_\alpha) = \text{ind}(M, V, W) := \text{ind}(D_t)$$

を acyclic compatible system $\{V_\alpha, \pi_\alpha, D_\alpha\}_\alpha$ の **局所指数** (あるいは**相対指数**) という.

V がシリンダー状の端をもつとは限らない場合にも, プロトタイプの場合と同様にシリンダー状に端を変形するという方針で $\text{ind}(M, V, W)$ が定義される. そのような変形を正当化するには技術的な条件がいくつか必要となるが, トーラス作用から定まる compatible system に対してはその条件はみたされる.

注意 4.7. Compatible fibration に対する good, すなわち異なるファイバー束のファイバー間の包含関係という仮定は, D_t の Fredholm 性を担保するための十分条件のひとつである. 実際, 包含関係のない compatible fibration であっても (応用上十分一般的な) 適当な仮定のもとで D_t の Fredholm 性が示せる. 例えば [4] では, 群作用とある種の整合性をもつ *G-tangential compatible fibration* というクラスに対しての定式化を用いている. そのような定式化のもとで, 局所指数 $\text{ind}(M, V, W)$ に対する積公式が示される.

プロトタイプの場合と同様に, 閉多様体の場合には Dirac 型作用素の指数が非 acyclic な部分 $M \setminus V$ へ局所化することが切除公式からわかる. 特に, トーリック多様体の場合は運動量写像の像に含まれる格子点 (=BS 点) 上のファイバーが非 acyclic な部分であったので, トーリック多様体に対する Danilov の定理, つまり

トーリック多様体の Dirac 作用素の指数 (= RR 数) は格子点に局所化する

という事実の指数の局所化に基づいた幾何学的な証明が得られる.

注意 4.8. 我々の指数理論において, シンプレクティック構造そのもの, 例えばその非退化性, は実は本質的ではない. 実際, [3] ではある種の退化を許容した 2 次微分形式が付与されたトーリック origami 多様体というクラスに対して同変 RR 数の局所化として Danilov 型の定理を示している.

⁶ 一般にはこのような 1 の分割が存在するかは不明であるが, トーリック多様体の場合などトーラス作用に由来する compatible fibration に対しては群作用による平均化により構成できる.

5. 指数の同境不変性とその応用

我々が [7] で構築した acyclic compatible sytem に対する指数理論はある種の位相的な理論である. つまり, 与えられたデータから得られる指数 $\text{ind}(M, V, W)$ はデータの連続的な変形のもとで不変である. ここで, データの変形とは, 例えば計量などの連続的な変形が念頭にある. 一方で, コンパクト集合の補集合上で与えられた開被覆の取替えなどの離散的なデータの変形のもとの不変性は明らかでない. この点に関して, [4] では開被覆のある非常に自然な取替えのもとの指数の不変性を示した. カギになるのは, acyclic compatible sytem の間の自然な同境 (コボルディズム) の定式化と, その同境のもとの局所指数の不変性 (同境不変性) である. ここでは, 典型的かつ応用上有益な例においてその同境を説明する.

例 5.1. 0 を含む小開区間 I に対して, $M := S^1 \times I$ とし, $V := S^1 \times (I \setminus \{0\})$ 上の自然な S^1 -束 $V \rightarrow I \setminus \{0\}$ を考える. $0 \in I$ の十分小さい開近傍 I' をとり $V' := S^1 \times I'$ とおくと, 直積集合 $\widetilde{M} := M \times M$ 内の $(S^1 \times \{0\}) \times (S^1 \times \{0\})$ の補集合 $\widetilde{V}$ の開被覆 $(V \times V) \cup (V \times V') \cup (V' \times V)$ 上に積構造により compatible fibrtion が次のように定まる:

- $V \times V$ 上で $S^1 \times S^1$ -束
- $V' \times V$ 上で $\{1\} \times S^1 (\cong S^1)$ -束
- $V \times V'$ 上で $S^1 \times \{1\} (\cong S^1)$ -束

一方, $\widetilde{M}$ への自然な $T^2 = S^1 \times S^1$ -作用を用いて, $\widetilde{V}$ の開被覆 $(V \times M) \cup (M \times V)$ 上にもう一つの compatible fibration の構造が

- $V \times M$ 上でも $M \times V$ 上でも T^2 -束

として定まる. $\widetilde{V}$ 上の 2 つの compatible fibration を区別するために, 一つめの積構造により定まる compatible fibration を考えたものを $\widetilde{V}$ でなく $\widetilde{V}_{\text{prod}}$ と書くことにする.

いま, M 上で標準的な $\mathbb{Z}/2$ -次数付き Clifford 加群束 W とファイバーに沿った Dirac 作用素 D_{S^1} であって, $r \neq 0$ に対して $\ker(D_{S^1}|_{S^1 \times \{r\}}) = \{0\}$ となるものをひとつとる⁷. (次数付きの) 積を考えることで, この作用素が $\widetilde{V}_{\text{prod}}$ 上の acyclic compatible system を誘導する. 例えば, $V' \times V$ 上では $\epsilon \otimes D_{S^1}$ というファイバー ($= S^1$) に沿った Dirac 型作用素を考える. ただし, ϵ は W の元の次数により符号を与える写像である. これらのデータから $\widetilde{M} \setminus \widetilde{V}_{\text{prod}}$ に局所化した局所指数

$$\text{ind}(\widetilde{M}, \widetilde{V}_{\text{prod}}) \quad (2)$$

が定義される⁸. また, $\widetilde{V} = (V \times M) \cup (M \times V)$ 上にも 各々の開集合上で $D_{S^1} \otimes \text{id} + \epsilon \otimes D_{S^1}$ を考えることにより compatible system が定義でき, $\widetilde{V}$ 上で acyclic となる. ポイントは作用素の二乗についての

$$(D_{S^1} \otimes \text{id} + \epsilon \otimes D_{S^1})^2 = (D_{S^1})^2 \otimes \text{id} + \text{id} \otimes (D_{S^1})^2$$

⁷ 例えば M の座標を (x, r) として, シンプレクティック構造と計量は標準的なもの, x -方向を実部, r -方向を虚部とみる複素構造を入れたとき, 自明束 $W = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ の切断に作用する作用素として

$D_{S^1} = \begin{pmatrix} 0 & -\partial_x + \sqrt{-1}r \\ \partial_x - \sqrt{-1}r & 0 \end{pmatrix}$ という形の作用素を考えればよい.

⁸ 積公式によりこの指数は D_{S^1} が定める M 上の局所指数の二乗に一致する.

という等式から, $(r_1, r_2) \neq (0, 0)$ であるかぎりファイバー $(S^1 \times \{r_1\}) \times (S^1 \times \{r_2\})$ 上で $D_{S^1} \otimes \text{id} + \epsilon \otimes D_{S^1}$ が acyclic になることである. こうして $\tilde{V}$ 上の acyclic compatible system から局所指数

$$\text{ind}(\tilde{M}, \tilde{V}) \quad (3)$$

が定義される.

いま, $\tilde{M} \times [0, 1]$ において, $\tilde{V} \times [0, \frac{3}{4}]$ 上では $\tilde{V}_{\text{prod}}$ の, $\tilde{V} \times [\frac{1}{4}, 1]$ 上では $\tilde{V}$ の compatible fibration および compatible sytem を考えることにより $\tilde{V} \times [0, 1]$ 上の compatible system が構成でき, これは acyclic となる. このような関係の一般化として, [4] では (acyclic) compatible system の間の同境を定義し, 局所指数の同境不変性を示した. 上述の $\tilde{V} \times [0, 1]$ 上の compatible system は $\tilde{V}_{\text{prod}}$ 上と $\tilde{V}$ 上の acyclic compatible system の同境を与える. これらの帰結として次がわかる.

命題 5.1 ([4]). $\tilde{V}_{\text{prod}}$ と $\tilde{V}$ 上の 2 つの acyclic compatible system は互いにコボルダントであり, 両者から得られる局所指数は一致する:

$$\text{ind}(\tilde{M}, \tilde{V}_{\text{prod}}) = \text{ind}(\tilde{M}, \tilde{V}).$$

この例における M はトーリック (origami) 多様体の特異ファイバーの局所モデルの構成要素の一つであり, 命題 5.1 における指数の一致は [3] で特異ファイバーからの寄与を計算する際に重要な役割を果たしている.

6. 今後の展望

6.1. 残された問題

本研究のテーマである「RR=BS を幾何学的に理解せよ」という問題について, その雛形というべき非特異 Lagrange ファイバー束とトーリック多様体に対しては, 指数の局所化の立場からの理解ができる. 講演者がこの問題を初めて意識したのは, Riemann 面上の平坦 $SU(2)$ 接続のモジュライ空間に対する Jeffrey-Weitsman の結果 [10] を知ったときである. しかし, 講演者の力不足と怠慢により, このモジュライ空間の場合に対しては目標はまだ達成できていない. 困難のひとつは, 特異ファイバー (の近傍) の構造の解析にある. このモジュライ空間はトーリック多様体に極めて近い構造をもっているが, 特異ファイバーとして球面などのトーリックの場合には現れ得ないものが存在する. その特異ファイバーからの寄与を計算するためにその近傍の解析が必要となる. また, 異なるファイバー束のファイバーに沿った Dirac 作用素同士の反交換子がうまくコントロールできるような compatible fibration をどう構成するかも問題である. 同様の球面特異ファイバーをもつ重要な例として旗多様体上の Gelfand-Cetlin 系がある. Gelfand-Cetlin 系の方が扱いやすい側面もあるため, まずそちらで考察し, その結果をもとにモジュライ空間の場合を考察する, というのが考えうるアプローチの一つである.

6.2. 無限次元化に向けて

近年, コンパクト Lie 群のループ群が作用する状況での同変指数の定式化や幾何学的量子化の研究が活発にされている.

Loizides-Meinrenken [12] は, ループ群が作用する無限次元シンプレクティック多様体に対して, その概複素構造からの Clifford 加群束 (スピノール束) の構成法を議論している. Song [14] は準 Hamilton 空間の Dirac 作用素と代数的 Dirac 作用素の組み合わせとそ

これらのより合わせにより半単純 Lie 群のループ群が作用する無限次元シンプレクティック多様体上の Dirac 作用素とその同変指数を定義している. 高田 [15, 16] は Abelian なケースにおいて, Clifford 加群束の切断の空間や Dirac 作用素とみなせる対象を KK 理論および非可換幾何学の観点から (シンプレクティックとは限らない状況において) 構成している.

これらの研究の文脈, 特に高田による Abelian な場合の理論において, 本研究の中心テーマである指数の局所化を見出しその現象を摂動によって幾何学的に理解できるか, という問いは自然であろう. この問いを考察するにあたって, Bohr-Sommerfeld ファイバーの条件から定まる格子点的な情報をどのように抽出するかが問題となると思われる.

参考文献

- [1] J. E. Andersen, *Geometric quantization of symplectic manifolds with respect to reducible non-negative polarizations*, Comm. Math. Phys. **183** (1997), no. 2, 401–421.
- [2] V. Danilov, *The geometry of toric varieties (Russian)*, Uspekhi Mat. Nauk **33** (1978), no. 2, 85–134, English translation: Russian Math. Surveys 33 (1978), no. 2, 97–154.
- [3] H. Fujita, *A Danilov-type formula for toric origami manifolds via localization of index*, arXiv:1511.05669, to appear in Osaka Journal of Mathematics.
- [4] ———, *Cobordism invariance and the well-definedness of local index*, Ann. Global Anal. Geom. **47** (2015), no. 4, 399–414.
- [5] ———, *S^1 -equivariant local index and transverse index for non-compact symplectic manifolds*, Math. Res. Lett. **23** (2016), no. 5, 1351–1367.
- [6] H. Fujita, M. Furuta, and T. Yoshida, *Torus fibrations and localization of index I—polarization and acyclic fibrations*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **17** (2010), no. 1, 1–26.
- [7] ———, *Torus fibrations and localization of index II: local index for acyclic compatible system*, Comm. Math. Phys. **326** (2014), no. 3, 585–633.
- [8] ———, *Torus fibrations and localization of index III: equivariant version and its applications*, Comm. Math. Phys. **327** (2014), no. 3, 665–689.
- [9] V. Guillemin and S. Sternberg, *The Gel’fand-Cetlin system and quantization of the complex flag manifolds*, J. Funct. Anal. **52** (1983), no. 1, 106–128.
- [10] L. C. Jeffrey and J. Weitsman, *Bohr-Sommerfeld orbits in the moduli space of flat connections and the Verlinde dimension formula*, Comm. Math. Phys. **150** (1992), no. 3, 593–630.
- [11] Y. Kubota, *The joint spectral flow and localization of the indices of elliptic operators*, Ann. K-Theory **1** (2016), no. 1, 43–83.
- [12] Y. Loizides and E. Meinrenken, *Spinor modules for Hamiltonian loop group spaces*, preprint, arXiv:1706.07493, 2017.
- [13] J. Śniatycki, *On cohomology groups appearing in geometric quantization*, (1977), 46–66. Lecture Notes in Math., Vol. 570.
- [14] Y. Song, *Dirac operators on quasi-Hamiltonian G -spaces*, J. Geom. Phys. **106** (2016), 70–86.
- [15] D. Takata, *An analytic LT equivariant index and noncommutative geometry*, preprint, arXiv:1701.06055, 2017.
- [16] ———, *LT -equivariant index from the viewpoint of KK -theory*, preprint, arXiv:1709.06205, 2017.
- [17] E. Witten, *Supersymmetry and Morse theory*, J. Differential Geom. **17** (1982), no. 4, 661–692 (1983).