

極値的円板を許容する閉リーマン面

中村 豪 (愛知工業大学)*

概 要

種数 $g \geq 2$ の閉リーマン面のモジュライ空間 $\mathcal{M}_g$ 上の関数として, 最大単射半径を値に取る関数 (最大単射半径関数) を考える。この関数は最大値をもち, 最大値は種数 g を用いて具体的に表される。この最大値を与えるリーマン面を極値的という。本講演では種数が2と3の場合を中心に, 極値的リーマン面の対称性及び極値的クライン面の複素ダブルについて考察する。また, 種数が2の場合において, 双曲8角形を用いて構成したタイヒミュラー空間を導入し, 極値的リーマン面の分布を調べる試みをする。

1. 対称リーマン面

$\mathcal{M}_g$ を種数 $g \geq 2$ の閉リーマン面のモジュライ空間とする。これは複素 $3g - 3$ 次元のオービフォールドである。 $\mathcal{M}_g$ からそれ自身への写像 $\sigma = \sigma_g$ として, 各リーマン面 S にその複素共役リーマン面 $\bar{S}$ を対応させるものを考える。位数2の反等角自己同型写像 (シンメトリー) を持つリーマン面を対称リーマン面という。あるいは, 実代数曲線と対応するため実リーマン面ともいう。種数 g の対称リーマン面全体の集合を $\mathcal{M}_g^{\mathbb{R}}$ で表す。反等角自己同型写像を持つがどれも位数2でないときアシンメトリック (asymmetric) リーマン面という。あるいは擬実 (pseudo-real) リーマン面という。 $\mathcal{M}_g^{\mathbb{R}}$ は σ の固定点集合 $\text{Fix}(\sigma)$ に含まれ, $\text{Fix}(\sigma) \setminus \mathcal{M}_g^{\mathbb{R}}$ はアシンメトリックリーマン面から成る。Seppälä ([32]), Buser-Seppälä-Silhol ([7]) の結果より, $\mathcal{M}_g^{\mathbb{R}}$ は連結になることが知られている。また, $\text{Fix}(\sigma) \setminus \mathcal{M}_g^{\mathbb{R}}$ はすべての $g \geq 2$ に対して空集合ではなく (Bujalance-Conder-Costa, [4]), 低い種数の場合には連結性が判明しており, $g = 2, 3$ のときは連結, $g = 4$ のときは非連結であり, 3つの連結成分からなる (Bujalance-Costa, [5])。 $\text{Fix}(\sigma)$ についての最近の結果として次がある。

定理 1.1 (Costa-Hidalgo, [9]). $\text{Fix}(\sigma)$ は連結である。

証明は, 位数 $2n$ ($n \geq 2$) の反等角自己同型写像 τ を持つ閉リーマン面 $S \in \text{Fix}(\sigma) \setminus \mathcal{M}_g^{\mathbb{R}}$ に対して, $\mathcal{O}(S, \tau)$ (向きを保つ同相写像による S の変形空間で τ の共役を許容するもの) が連結であること, $\mathcal{M}_g^{\mathbb{R}}$ が連結であること, そして両者は共通部分を持つことによる。共通部分の閉リーマン面の構成には NEC 群が使われている。

次節で NEC 群を簡単に振り返る。

2. NEC 群

$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}; \text{Im} z > 0\}$ を上半平面とする。非ユークリッド結晶群 (Non-Euclidean crystallographic group), 略して NEC 群, とは $\text{Aut}^{\pm}(\mathbb{H}) = \text{PGL}(2, \mathbb{R})$ の離散部分 Γ で $\mathbb{H}/\Gamma$ がコンパクトとなるものをいう。

本研究は科研費 (課題番号:18K03348) の助成を受けたものである。

2010 Mathematics Subject Classification: 30F10, 30F35, 30F50, 30F60, 32G15

キーワード: リーマン面, クライン面, モジュライ空間, タイヒミュラー空間, 極値的円板

* 〒470-0392 愛知県豊田市八草町八千草1247 愛知工業大学 基礎教育センター

e-mail: gou@aitech.ac.jp

web: <http://aitech.ac.jp/~nakamura/>

Γ を NEC 群とする。一般に, Γ の生成元と関係式は次で表される。

$$\begin{aligned} \text{生成元: } & x_i, \quad i = 1, \dots, r \\ & e_i, \quad i = 1, \dots, k \\ & c_{ij}, \quad i = 1, \dots, k, \quad j = 0, \dots, s_i \\ & a_i, b_i, \quad i = 1, \dots, g \quad (\mathbb{H}/\Gamma \text{ が向き付け可能のとき}) \\ & d_i, \quad i = 1, \dots, g \quad (\mathbb{H}/\Gamma \text{ が向き付け不可能のとき}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{関係式: } & x_i^{m_i} = 1, \quad i = 1, \dots, r \\ & e_i^{-1} c_{i0} c_i c_{is_i} = 1, \quad i = 1, \dots, k \\ & c_{i,j-1}^2 = c_{ij}^2 = (c_{i,j-1} c_{ij})^{n_{ij}} = 1, \quad i = 1, \dots, k, \quad j = 1, \dots, s_i \\ & x_1 \cdots x_r e_1 \cdots e_k a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1 \quad (\mathbb{H}/\Gamma \text{ が向き付け可能のとき}) \\ & x_1 \cdots x_r e_1 \cdots e_k d_1^2 \cdots d_g^2 = 1 \quad (\mathbb{H}/\Gamma \text{ が向き付け不可能のとき}) \end{aligned}$$

g, r, k はそれぞれ $\mathbb{H}/\Gamma$ の位相的種数, ツノの個数, 境界成分の個数を表す。このとき Γ のシグネチャー $\sigma(\Gamma)$ を次で定める。

$$\sigma(\Gamma) = (g; \pm; [m_1, \dots, m_r]; \{(n_{11}, \dots, n_{1s_1}), \dots, (n_{k1}, \dots, n_{ks_k})\}),$$

符号 “ $\pm$ ” は, $\mathbb{H}/\Gamma$ が向き付け可能のとき “+”, 向き付け不可能のとき “−” とする。

$\mathbb{H}/\Gamma$ の基本領域の双曲面積 $\mu(\Gamma)$ は次で与えられる。

$$\mu(\Gamma) = 2\pi \left(\alpha g - 2 + k + \sum_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_i} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{s_i} \left(1 - \frac{1}{n_{ij}} \right) \right),$$

ここで $\mathbb{H}/\Gamma$ が向き付け可能のとき $\alpha = 2$, 不可能のとき $\alpha = 1$ である。 Γ' が Γ の指数有限の部分群のとき, Riemann-Hurwitz の公式は $\mu(\Gamma') = [\Gamma : \Gamma'] \mu(\Gamma)$ で与えられる。

リーマン面が等角構造を備えるのに対し, クライン面は, 等角写像及び反等角写像を座標変換に許す構造 (dianalytic structure) を備える。クライン面は向き付け可能 (すなわちリーマン面) の場合もあり得る。 S を種数 g , 境界成分の個数 k のクライン面とし, 向き付け可能の場合は $2g + k \geq 3$, 向き付け不可能の場合は $g + k \geq 3$ とするならば, S は $\mathbb{H}$ の NEC 群 Γ による商空間 $\mathbb{H}/\Gamma$ として与えられる。

3. クライン面のダブル

$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ を単位円板とし, $S = \mathbb{D}/\Gamma$ を種数 g , 境界成分 $k > 0$ のクライン面とする。 Λ を Γ の指数 2 の部分群とすると $\mathbb{D}/\Lambda$ は S の 2 重被覆 (ダブル) である。取り得る 2 重被覆の数は次で与えられる。

定理 3.1 (Costa-Hall-Singerman, [8]). S の 2 重被覆の数は $2^{\alpha g + 2k - 1} - 1$ である。ここで S が向き付け可能のとき $\alpha = 2$, 向き付け不可能のとき $\alpha = 1$ である。

主な 2 重被覆としては, 複素ダブル (complex double), オリエンティングダブル (orienting double), ショットキーダブル (Schottky double) がある。複素ダブルの定義を与える。

定義 3.2. $S = \mathbb{D}/\Gamma$ に対してフックス群 $\Gamma^+ := \Gamma \cap \text{Aut}(\mathbb{D})$ で与えられるリーマン面 $\mathbb{D}/\Gamma^+$ を S の複素ダブルという。

4. 極値的リーマン面

種数 $g \geq 2$ の閉リーマン面 S の普遍被覆面として $\mathbb{D}$ を使う。 S には $\mathbb{D}$ の双曲計量 $2|dz|/(1-|z|^2)$ から自然に計量が導かれる。 任意の点 $p \in S$ と $r > 0$ に対して

$$B_r(p) := \{q \in S \mid d_S(q, p) < r\}$$

と定める。ここで $d_S(\cdot, \cdot)$ は S における双曲距離である。 $r_S(p)$ で S の p における単射半径を表す。すなわち、

$$r_S(p) := \max\{r > 0 \mid B_r(p) \text{ は } \mathbb{D} \text{ の双曲半径 } r \text{ の開円板と等長的}\}.$$

$r_{\max}(S) := \max_{p \in S} r_S(p)$ を S の最大単射半径という。 $r_{\max}$ は $\mathcal{M}_g$ 上の関数であり、最大値を持つ。

定理 4.1 (Bavard, [2]). $r_g := \max_{S \in \mathcal{M}_g} r_{\max}(S)$ は次で与えられる。

$$\cosh r_g = \frac{1}{2 \sin(\pi/(12g-6))}.$$

最大値を与える $S \in \mathcal{M}_g$ を極値的リーマン面と呼ぶ。定義より S には半径 r_g の円板 (極値的円板) が少なくとも一つ埋め込まれる。極値的リーマン面は、等角同値を除いて、種数2の場合が9種類、種数3の場合が1726種類存在する。 $g \geq 4$ に対しては、oriented maximal genus g Wicks form の同値類を調べることにより、極値的リーマン面の種類を与えるアルゴリズムが得られている (Vdovina, [34])。各極値的リーマン面に対して極値的円板の埋め込み位置は判明している。 $g = 2$ の場合は Girondo - González-Diez [15] 及び N [20], $g = 3$ の場合は N [21]。

同様に極値的クライン面も定義できる。種数 $g \geq 3$ の閉クライン面のモジュライ空間 $\mathcal{K}_g$ 上の最大単射半径関数の最大値 $\tilde{r}_g$ は

$$\cosh \tilde{r}_g = \frac{1}{2 \sin(\pi/(6g-6))}$$

であり、極値的クライン面は種数6まですべて得られている (N, [26])。

5. 結果

極値的リーマン面の等角及び反等角自己同型写像は極値的円板の中心点の集合を不変にするため次が導かれる。

定理 5.1. 任意の $g \geq 2$ に対してアシンメトリックな極値的リーマン面は存在しない。

NEC 群を具体的に構成することにより、種数 g の極値的かつ対称なリーマン面の列 $\{S_g\}$ が構成できる。すなわち、

定理 5.2. すべての $g \geq 2$ に対して極値的対称リーマン面は存在する。

特に、 $g = 2, 3$ について次が成り立つ。

定理 5.3. $\mathcal{M}_g^{\text{ext}}$ を種数 g の極値的リーマン面の集合とする。このとき

$$\#(\mathcal{M}_2^{\text{ext}} \cap \mathcal{M}_2^{\mathbb{R}}) = 7, \#(\mathcal{M}_2^{\text{ext}} \setminus \text{Fix}(\sigma_2)) = 2.$$

$$\#(\mathcal{M}_3^{\text{ext}} \cap \mathcal{M}_3^{\mathbb{R}}) = 128, \#(\mathcal{M}_3^{\text{ext}} \setminus \text{Fix}(\sigma_3)) = 1598.$$

定理 5.4. S を種数3の極値的クライン面の複素ダブルで得られる閉リーマン面とする。このとき S は極値的ではない種数2の閉リーマン面である。

6. Schmutz Schaller によるタイヒミュラー空間

$g \geq 2$ とする。Schmutz Schaller は双曲 $4g$ 角形を用いてタイヒミュラー空間の構成を行っている。

定義 6.1 (Schmutz Schaller, [31]). 次の条件をみたす双曲 $4g$ 角形 $P = P(g)$ を Schmutz 多角形と呼ぶ ([31] では canonical polygon と呼んでいる)。ここで、時計回りに辺を $a_1, \dots, a_{4g}$, 角を $\alpha_1, \dots, \alpha_{4g}$ とする。

(I) a_j と a_{j+2g} は同じ長さを持つ ($j = 1, \dots, 2g$),

$$(II) \sum_{j=1}^{4g} \alpha_j = 2\pi,$$

(III) $0 < \alpha_j < \pi$ ($j = 1, \dots, 4g$),

(IV) $\alpha_1 = \alpha_{2g+1}$,

$$(V) \sum_{j=1}^g \alpha_{2j-1} + \sum_{j=g+1}^{2g} \alpha_{2j} = \sum_{j=1}^g \alpha_{2j} + \sum_{j=g+1}^{2g} \alpha_{2j-1} (= \pi).$$

固定した g に対する Schmutz 多角形全体の集合に同値関係を入れ、位相を導入する。Schmutz 多角形の向かい合う辺を同一視することにより種数 g の閉リーマン面 $S = S(P)$ が得られる。逆に、閉リーマン面から Schmutz 多角形も構成できることに注意する。この $S(P)$ には、辺 $a_1, \dots, a_{4g}$ から自然にマーキングが備わる。このようにしてタイヒミュラー空間 $\mathcal{T}_g$ が構成できる。

このアイデアに基づき、測地的長さ関数を利用して $\mathcal{T}_2$ の大域座標系を得た。

定理 6.2 (N, [24]). $\mathcal{T}_2$ の埋め込み $\Phi: \mathcal{T}_2 \rightarrow \mathbb{R}_{>1}^7$; $S \mapsto (x_1, \dots, x_7)$ で次をみたすものが存在する:

(i) $|X| < 1, |Y| < 1, |Z| < 1$;

(ii) $X + Y + Z - 1 > \sqrt{2(1-X)(1-Y)(1-Z)}$;

(iii) $A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + 2ABCD - 2 = 2\sqrt{(1-A^2)(1-B^2)(1-C^2)(1-D^2)}$;

ここで

$$X := \frac{x_4x_7 - x_1}{\sqrt{(x_4^2 - 1)(x_7^2 - 1)}}, Y := \frac{x_4x_5 - x_2}{\sqrt{(x_4^2 - 1)(x_5^2 - 1)}}, Z := \frac{x_5x_6 - x_3}{\sqrt{(x_5^2 - 1)(x_6^2 - 1)}},$$

$$A := \frac{x_1 + x_4 + x_7 + 1}{\sqrt{2(x_1 + 1)(x_4 + 1)(x_7 + 1)}}, B := \frac{x_2 + x_4 + x_5 + 1}{\sqrt{2(x_2 + 1)(x_4 + 1)(x_5 + 1)}},$$

$$C := \frac{x_3 + x_5 + x_6 + 1}{\sqrt{2(x_3 + 1)(x_5 + 1)(x_6 + 1)}}, D := \frac{x_6 + x_7 + x_8 + 1}{\sqrt{2(x_6 + 1)(x_7 + 1)(x_8 + 1)}},$$

$$x_8 := x_6x_7 + \sqrt{x_6^2 - 1}\sqrt{x_7^2 - 1}(XYZ - X\sqrt{1-Y^2}\sqrt{1-Z^2} - Y\sqrt{1-Z^2}\sqrt{1-X^2} - Z\sqrt{1-X^2}\sqrt{1-Y^2}).$$

7. 写像類群による作用

写像類群 $\mathcal{MCG}_g$ はタイヒミュラー空間 $\mathcal{T}_g$ 上に真に不連続に作用する。この節では、種数 2 の極値的リーマン面の分布を調べるために、写像類をいくつか与え、我々のモデルであるタイヒミュラー空間上での作用を調べる。

7.1. 周期的な元 ω_0

$\omega_0 \in \mathcal{MCG}_2$ を次で定める。各 $S = (S, \{A_1, A_2, A_3, A_4\}) \in \mathcal{T}_2$ に対して、対応する Schmutz 多角形 $P(S)$ (辺 $a_1, \dots, a_8$) を取る。 $P(S)$ の辺のラベルを巡回させた多角形を $\widetilde{P(S)}$ (辺 $a_2, a_3, a_4, a_1, a_2, a_3, a_4, a_1$) とする。この $\widetilde{P(S)}$ に対応する閉リーマン面 $\tilde{S} = (\tilde{S}, \{A_2, A_3, A_4, A_1\})$ を ω_0 による S の像と定める。明らかに ω_0 は周期的であり、固定点 S_0 (双曲正八角形に対応する閉リーマン面) を持つ。

7.2. 非周期的な元 ω_1

写像類群 $\mathcal{MCG}_2$ の元 ω_1 を次で定める。各 $S = (S, \{A_1, A_2, A_3, A_4\}) \in \mathcal{T}_2$ に対して、対応する Schmutz 多角形 $P(S)$ (辺 $a_1, \dots, a_8$, 向かい合う頂点を結ぶ線分 b_1, b_2, b_3, b_4) を取る。 $P(S)$ を線分 b_1 で切断し、辺 a_1 と a_5 を貼り合わせてできる多角形を $\widetilde{P(S)}$ とする。これは再び Schmutz 多角形である。この $\widetilde{P(S)}$ (辺 $b_1, a_2, a_3, a_4, b_1, a_2, a_3, a_4$) に対応する閉リーマン面 $\tilde{S} = (\tilde{S}, \{B_1, A_2, A_3, A_4\})$ を ω_1 による S の像と定める。すなわち、 $\tilde{S} = \omega_1(S)$, $\Phi(S) = (x_1, \dots, x_7)$ に対して

$$\Phi(\tilde{S}) = \Phi\omega_1\Phi^{-1}(x_1, \dots, x_7) = (2x_4^2 - 1, x_2, x_3, \frac{2x_4(x_4 + x_7) - x_1 - 1}{\sqrt{2(x_1 + 1)}}, \tilde{x}_5, \tilde{x}_6, \sqrt{\frac{x_1 + 1}{2}}),$$

ここで

$$\begin{aligned} \tilde{x}_5 &= \frac{x_5(2x_4 + x_7) - x_2 + \sqrt{(x_5^2 - 1)(x_7^2 - 1)}(XY - \sqrt{(1 - X^2)(1 - Y^2)})}{\sqrt{2(x_1 + 1)}}, \\ \tilde{x}_6 &= \frac{x_6(x_4 + x_7) - \frac{\sqrt{x_6^2 - 1}}{\sqrt{x_7^2 - 1}} \left| \begin{array}{cc} x_7(x_4 + x_7) - x_1 - 1 & \sqrt{1 - x_1^2 - x_4^2 - x_7^2 + 2x_1x_4x_7} \\ \sqrt{1 - W^2} & W \end{array} \right|}{\sqrt{2(x_1 + 1)}}, \end{aligned}$$

$$W = X\sqrt{(1 - Y^2)(1 - Z^2)} + Y\sqrt{(1 - Z^2)(1 - X^2)} + Z\sqrt{(1 - X^2)(1 - Y^2)} - XYZ.$$

7.3. 非周期的な元 ω_2

写像類群 $\mathcal{MCG}_2$ の元 ω_2 を ω_1 と同様に次で定める。各 $S = (S, \{A_1, A_2, A_3, A_4\}) \in \mathcal{T}_2$ に対して、対応する Schmutz 多角形 $P(S)$ (辺 $a_1, \dots, a_8$, 向かい合う頂点を結ぶ線分 b_1, b_2, b_3, b_4) を取る。 $P(S)$ を線分 b_2 で切断し、辺 a_1 と a_5 を貼り合わせてできる多角形を $\widetilde{P(S)}$ とする。これは再び Schmutz 多角形であり、この $\widetilde{P(S)}$ (辺 $b_2, a_3, a_4, a_2, b_2, a_3, a_4, a_2$) に対応する閉リーマン面 $\tilde{S} = (\tilde{S}, \{B_2, A_3, A_4, A_2\})$ を ω_2 による S の像と定める。すなわち、 $\tilde{S} = \omega_2(S)$, $\Phi(S) = (x_1, \dots, x_7)$ に対して

$$\Phi(\tilde{S}) = \Phi\omega_2\Phi^{-1}(x_1, \dots, x_7) = (2x_5^2 - 1, x_3, x_8, \tilde{x}_4, \tilde{x}_5, \sqrt{\frac{x_1 + 1}{2}}, \tilde{x}_7)$$

ここで、 x_8 は定理 6.2 で示したものの、 $\tilde{x}_4$ は ω_1 の $\tilde{x}_5$, $\tilde{x}_5$ は ω_1 の $\tilde{x}_6$,

$$\tilde{x}_7 = \frac{x_2 + x_5x_7 - \sqrt{(x_5^2 - 1)(x_7^2 - 1)}(XY - \sqrt{(1 - X^2)(1 - Y^2)})}{\sqrt{2(x_1 + 1)}},$$

双曲正8角形に対応する閉リーマン面 S_0 の座標は

$$\Phi(S_0) = (5 + 4\sqrt{2}, 5 + 4\sqrt{2}, 5 + 4\sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}).$$

この閉リーマン面の ω_1 による像 $\omega_1^m(S_0)$ ($m = 1, 2, \dots$) の座標は次のようになる。

$$\Phi(S_0) \xrightarrow{\omega_1} \begin{bmatrix} 33 + 24\sqrt{2} \\ 5 + 4\sqrt{2} \\ 5 + 4\sqrt{2} \\ 13 + 9\sqrt{2} \\ 9 + 7\sqrt{2} \\ 5 + 3\sqrt{2} \\ 1 + \sqrt{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{\omega_1} \begin{bmatrix} 661 + 468\sqrt{2} \\ 5 + 4\sqrt{2} \\ 5 + 4\sqrt{2} \\ 59 + 42\sqrt{2} \\ 43 + 30\sqrt{2} \\ 19 + 14\sqrt{2} \\ 3 + 2\sqrt{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{\omega_1} \begin{bmatrix} 14017 + 9912\sqrt{2} \\ 5 + 4\sqrt{2} \\ 5 + 4\sqrt{2} \\ 273 + 193\sqrt{2} \\ 197 + 139\sqrt{2} \\ 89 + 63\sqrt{2} \\ 13 + 9\sqrt{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{\omega_1} \dots$$

次に、 ω_2 による作用を調べる。

$$\Phi(S_0) \xrightarrow{\omega_2} \begin{bmatrix} 33 + 24\sqrt{2} \\ 5 + 4\sqrt{2} \\ 5 + 4\sqrt{2} \\ 9 + 7\sqrt{2} \\ 5 + 3\sqrt{2} \\ 1 + \sqrt{2} \\ 5 + 3\sqrt{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{\omega_2} \begin{bmatrix} 85 + 60\sqrt{2} \\ 5 + 4\sqrt{2} \\ 5 + 4\sqrt{2} \\ 19 + 14\sqrt{2} \\ 3 + 2\sqrt{2} \\ 3 + 2\sqrt{2} \\ 3 + 2\sqrt{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{\omega_2} \begin{bmatrix} 33 + 24\sqrt{2} \\ 5 + 4\sqrt{2} \\ 5 + 4\sqrt{2} \\ 13 + 9\sqrt{2} \\ 9 + 7\sqrt{2} \\ 5 + 3\sqrt{2} \\ 1 + \sqrt{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{\omega_2} \dots$$

このように座標は $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ の数で表せることが予想される。

次に、極値的リーマン面の ω_1^m ($m = 1, 2, \dots$) による像を調べる。ここで極値的リーマン面 S_1 は、双曲正18角形の辺の貼り合わせ写像 f_{ij} により生成されるフックス群 $\langle f_{1,4}, f_{2,6}, f_{3,7}, f_{5,8}, f_{9,18}, f_{10,13}, f_{11,15}, f_{12,16}, f_{14,17} \rangle$ に対応するものとする。 S_1 のマーキングの取り方の一つとして、双曲正18角形から Schmutz 多角形を構成し、その4つの辺を用いて与える。これには S_1 の6個あるワイエルシュトラス点の位置情報が重要である。双曲正多角形を基本領域に持つ種数2の閉リーマン面に対しては、そのワイエルシュトラス点の位置は Kuusalo-Näätänen [19] により完全に得られている。基準とするワイエルシュトラス点 w (純虚数に正規化) は次を選んでいる。

$$w = \frac{2i \cos(2\pi/9) \sqrt{-4 + \csc^2(\pi/18)}}{\sqrt{3} \csc(\pi/18) + 2\sqrt{2(2 + \cos(\pi/9) + \cos(2\pi/9) + \sin(\pi/18))}}.$$

このときの S_1 の座標は煩雑なため近似値で表す。

$$\Phi(S_1) = (112.2, 5.851, 5.851, 22.43, 63.33, 22.43, 5.411).$$

$$\Phi(S_1) \xrightarrow{\omega_1} \begin{bmatrix} 1005.5 \\ 5.851 \\ 5.851 \\ 75.52 \\ 211.2 \\ 73.89 \\ 7.522 \end{bmatrix} \xrightarrow{\omega_1} \begin{bmatrix} 11404.6 \\ 5.851 \\ 5.851 \\ 257.1 \\ 718.6 \\ 251.1 \\ 22.43 \end{bmatrix} \xrightarrow{\omega_1} \begin{bmatrix} 132206. \\ 5.851 \\ 5.851 \\ 876.2 \\ 2449. \\ 855.5 \\ 75.52 \end{bmatrix} \xrightarrow{\omega_1} \begin{bmatrix} 1535460. \\ 5.851 \\ 5.851 \\ 2986. \\ 8346. \\ 2915. \\ 257.1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\omega_1} \dots$$

$$\Phi(S_1) \xrightarrow{\omega_3} \begin{bmatrix} 8019.6 \\ 5.851 \\ 112.2 \\ 211.2 \\ 73.89 \\ 7.522 \\ 23.17 \end{bmatrix} \xrightarrow{\omega_3} \begin{bmatrix} 10918.3 \\ 112.2 \\ 5.851 \\ 251.1 \\ 22.43 \\ 63.33 \\ 22.43 \end{bmatrix} \xrightarrow{\omega_3} \begin{bmatrix} 1005.5 \\ 5.851 \\ 5.851 \\ 75.52 \\ 211.2 \\ 73.89 \\ 7.522 \end{bmatrix} \xrightarrow{\omega_3} \begin{bmatrix} 89249.7 \\ 5.851 \\ 112.2 \\ 718.6 \\ 251.1 \\ 22.43 \\ 63.33 \end{bmatrix} \xrightarrow{\omega_3} \dots$$

$\mathcal{T}_2$ に適切な距離を導入し、挙動を解析することが今後の課題である。

参考文献

- [1] N. L. Alling, N. Greenleaf, Foundations of the theory of Klein surfaces, Lecture Notes in Math. **219**, Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1971.
- [2] C. Bavard, Disques extrémaux et surfaces modulaires, Ann. Fac. Sci. Toulouse, VI. Sér., Math. **5** (1996), no. 2, 191–202.
- [3] A. F. Beardon, The geometry of discrete groups, **91**, Graduate Texts in Math. New York - Heidelberg - Berlin: Springer-Verla, 1983.
- [4] E. Bujalance, M. D. E. Conder, and A. F. Costa, Pseudo-real Riemann surfaces and chiral regular maps. Trans. Am. Math. Soc. **362** (2010), no. 7, 3365–3376.
- [5] E. Bujalance and A. F. Costa, Automorphism groups of pseudo-real Riemann surfaces of low genus. Acta Math. Sin., Engl. Ser. **30** (2014), no. 1, 11–22.
- [6] E. Bujalance, J. J. Etayo, J. M. Gamboa, and G. Gromadzki, Automorphism groups of compact bordered Klein surfaces. A combinatorial approach, Lecture Notes in Math. **1439**. Berlin etc.: Springer-Verlag, 1990.
- [7] P. Buser, M. Seppälä, and R. Silhol, Triangulations and moduli spaces of Riemann surfaces with group actions, Manuscr. Math. **88** (1995), no. 2, 209–224.
- [8] A. F. Costa, W. Hall, and D. Singerman, Doubles of Klein surfaces, Glasg. Math. J. **54** (2012), no. 3, 507–515.
- [9] A. F. Costa and R. A. Hidalgo, On the connectedness of the set of Riemann surfaces with real moduli, Arch. Math. **110** (2018), no. 3, 305–310.
- [10] J. DeBlois, The centered dual and the maximal injectivity radius of hyperbolic surfaces, Geom. Topol. **19** (2015), 953–1014.
- [11] J. DeBlois, The local maxima of maximal injectivity radius among hyperbolic surfaces arXiv:1506.08080 (2015).
- [12] F. Fanoni, The maximum injectivity radius of hyperbolic orbifolds, Geom. Dedicata, **175** (2015), no. 1, 281–307.
- [13] M. Gendulphé, The injectivity radius of hyperbolic surfaces and some Morse functions over moduli spaces, arXiv:1510.02581 (2015).
- [14] E. Gironde and G. González-Diez, On extremal discs inside compact hyperbolic surfaces, C. R. Acad. Sci. Paris, t. **329**, Série I (1999), 57–60.
- [15] E. Gironde and G. González-Diez, Genus two extremal surfaces: extremal discs, isometries and Weierstrass points, Israel J. Math. **132** (2002), 221–238.
- [16] E. Gironde and G. González-Diez, Introduction to compact Riemann surfaces and dessins d’enfants, London Math. Soc. Student Texts **79**, Cambridge: Cambridge University Press, 2012.

- [17] E. Gironde and G. Nakamura, Compact non-orientable hyperbolic surfaces with an extremal metric disc, *Conform. Geom. Dyn.* **11** (2007), 29–43.
- [18] T. Jørgensen and M. Näätänen, Surfaces of genus 2: Generic fundamental polygons, *Q. J. Math., Oxf. II. Ser.* **33** (1982), 451–461.
- [19] T. Kuusalo and M. Näätänen, Weierstrass points of genus-2 surfaces with regular fundamental domains, *Q. J. Math.* **54** (2003), no. 3, 355–365.
- [20] G. Nakamura, The number of extremal disks embedded in compact Riemann surfaces of genus two, *Sci. Math. Jpn* **56** (2002), no. 3, 481–492.
- [21] G. Nakamura, Extremal disks and extremal surfaces of genus three, *Kodai Math. J.* **28** (2005), no. 1, 111–130. Correction to “Extremal disks and extremal surfaces of genus three”, *Kodai Math J.* **37** (2014), no. 2, 475–480.
- [22] G. Nakamura, Compact non-orientable surfaces of genus 4 with extremal metric discs, *Conform. Geom. Dyn.* **13** (2009), 124–135.
- [23] G. Nakamura, Compact non-orientable surfaces of genus 5 with extremal metric discs, *Glasg. Math. J.* **54** (2012), no. 2, 273–281.
- [24] G. Nakamura, Teichmüller space of genus two based on Schmutz Schaller’s hyperbolic polygons, *Kodai Math. J.* **35** (2012), no. 1, 138–156.
- [25] G. Nakamura, Compact Klein surfaces of genus 5 with a unique extremal disc, *Conform. Geom. Dyn.* **17** (2013), 39–46.
- [26] G. Nakamura, Compact non-orientable surfaces of genus 6 with extremal metric discs, *Conform. Geom. Dyn.* **20** (2016), 218–234.
- [27] G. Nakamura and T. Nakanishi, Parametrizations of some Teichmüller spaces by trace functions, *Conform. Geom. Dyn.* **17** (2013), 47–57.
- [28] G. Nakamura and T. Nakanishi, Parametrizations of Teichmüller spaces by trace functions and action of mapping class groups, *Conform. Geom. Dyn.* **20** (2016), 25–42.
- [29] G. Nakamura and T. Nakanishi, Generation of finite subgroups of the mapping class group of genus 2 surface by Dehn twists, *J. Pure Appl. Algebra* **222** (2018), 3585–3594.
- [30] P. Schmutz Schaller, Systoles and topological Morse functions for Riemann surfaces, *J. Differential Geom.* **52** (1999), no. 3, 407–452.
- [31] P. Schmutz Schaller, Teichmüller space and fundamental domains of Fuchsian groups, *Enseign. Math.* **45** (1999) no. 2, 169–187.
- [32] M. Seppälä, Real algebraic curves in the moduli space of complex curves, *Compos. Math.* **74** (1990), no. 3, 259–283.
- [33] M. Seppälä and T. Sorvali, *Geometry of Riemann surfaces and Teichmüller spaces*. North-Holland Mathematics Studies. **169**, Amsterdam etc: North-Holland, 1992.
- [34] A.Vdovina, On the number of optimal surfaces, *Geom. Topol. Monographs* **14** (2008), 557–567.
- [35] A.Vdovina, On the number of nonorientable Wicks forms in a free group, *Proc. Royal. Soc. Edinb., Sect. A* **126**, (1996) no.1, 113–116.