

2次元正規複素特異点の特異点解消過程による最近の研究

泊 昌孝 (日本大学文理学部)*

概 要

2次元正規複素解析空間の特異点に関する「極大イデアル因子 M とアルチンの基本因子 Z_0 の同一視問題」という古典的なテーマについて、特異点解消の構成過程により研究し近年得られた結果を報告します。ここでは特異点それぞれの特殊構造に従って考えられる個性的な特異点解消手法に注目して論じます。研究の流れに従って、

(1) 擬斉次方程式で定まる C^* -作用を持つ特異点, 更に一般に, 星型特異点解消を持つ場合; 最小次数部分に被約な斉次元が存在する時の中心曲線原理 (今野-長島, Meng-奥間の結果の拡張)

(2) (1) に於いて, 中心曲線が 非特異有理曲線になる場合の, $M = Z_0$ 問題. p_g に関する, あるコホモロジー群間の非単射性について

(3) 「Normalized blowing-up に関する接錐の被約性」による特殊な小平特異点の特徴付け; 正規 2 次元特異点が, 小平特異点の標準特異点解消過程の途中に現れるという形で「小平特異点への埋め込み」、小平特異点を用いた一般の特異点の難易度を計るための一つの実験

(4) 2 重点 $z^2 - f(x, y) = 0$ に関する標準特異点解消過程を用いた研究. $Z_0^2 = -1$ となる $f(x, y)$ の Puiseux pairs を用いての 3 つのタイプ (Odd, Laufer type, くつつき Laufer type) の成分による特徴づけ. 系としての, $M = Z_0$ 成立 の完全な判定法

とお話しをしてゆきます。

1. はじめに

(V, p) を正規 2 次元複素特異点, $\psi: (\tilde{V}, A) \rightarrow (V, p)$ を特異点解消とし, 例外集合を $A = \cup_{j=1}^m A_j$ と既約分解する. 特異点の複雑さを, 埋め込み次元や方程式の次数によって評価しようとする際, 極大イデアルに関する Hilbert-Samuel 関数 を決定することが基本的な問題になります. それを, 例外集合 A の様子から求める問題としては, 非常にうまくいった研究として, 2 次元正規孤立特異点の研究における M. Artin [1] の fundamental cycle (基本因子) Z_0 による, 極大イデアル の記述があります. ここで,

$$Z_0 = \min\{D \in \bigoplus_{j=1}^m \mathbb{Z}A_j \mid D \cdot A_j \leq 0 \ (\forall j), D \neq 0\}$$

である. 極大イデアル m について, $(m \cdot \mathcal{O}_{\tilde{V}})^{**} = \mathcal{O}_{\tilde{V}}(-M)$ と表したとき, $Z_0 = M$ であるかが今回の問題です. ここで, 左辺の $**$ はイデアル層の因子部分を取り出す操作をあらわしている. このようにして定まる M を極大イデアル因子と呼んでいる. う

本研究の多くは都丸正氏との共同研究を元に行っています. [27] をはじめ複数の準備中の論文で詳細は述べられる予定です.

* 〒156-8550 東京都世田谷区桜上水 3-25-40 日本大学 文理学部数学科
e-mail: tomari@math.chs.nihon-u.ac.jp

まく特異点解消をとることで、**をとる事なく議論できることも多いものです。この同一視は2次元特異点論での議論では常に基本問題となっていました。

有理特異点の研究：(1) Castelnuove-Kodaira-Grauert の非特異点判定法、(2) 有理2重点の分類

楕円型特異点の研究：Wagreich-K.Saito- Laufer- Yau 達から始まり、日本人の方々も多く研究されています。

有理特異点、楕円型特異点でない場合にも、様々な状況でのコホモロジー消滅の度合いを計る数値的な情報が、fundamental cycle の計算列に絡んでいることが多く、個別な特異点に限らず、fundamental cycle の理解は現役のテーマとも言えます。

私は、2010年頃山形大学で今野-長島の議論 [11] を著者本人から聞く機会がありました。2013年3月数学会（京都、関数論分科会）での奥間智弘氏の Brieskorn 完全交叉特異点について発表 [16] に端を発して、都丸正氏と以前から20年以上前から時々話題にして来たこのテーマに、本格的に共同研究としてとりくんで来ました。§1, §2 ではまず、この点に言及します。

以下に述べます古い問題意識を合わせて、私は更に大きな観点での $M = Z_0$ との比較問題 §3 と、非常に精密な分類となる2重点での $M = Z_0$ 判定問題 §4 へ取り組みました。

ここで、私が本研究の背景としている古い数学について述べておきたいと思います。2つあります。私が修士に入りましたころに出版されました教科書 [7] は、「特異点の解消がなされて以来、研究の対象は特異点そのものに移ってきた。…」という希望と意欲に満ちあふれた言葉で始まっている。方程式の分類や、例外集合の分類という世界はすでに多くありましたが、それらを結びつける世界は、まだまだという感のあった時代だとおもいます。

1981年に書かれた私の修士論文のテーマは、今回のタイトルと良く似た

On resolution process of hypersurface two-dimensional isolated singularities

というものでした。Brieskorn[2], Kirby[10] で、有理2重点の定義式が Klein の方程式に限ること（Du Val の分類の現代流の証明）を学びました。修士論文のテーマは、Kirby の2重点についての branching sequence という分岐曲線の幾何からの研究を、有理特異点とは限らないクラスへ拡張しようというものでした。計算で得ていた観察を理論化するために、Laufer[13] Theorem 3.14 の議論にある微分形式のなす加群そのもののトーション位数を幾何種数の下からの評価に使う考え方を、Brieskorn の特異点解消過程でのいわゆる discrepancy の精密評価に着目し、不変量 L と呼ぶ数値を定義しました [21]。後の同値な定義を使いますと、これは、

$$R^1\psi_*(O_{\tilde{V}}) \supset m \cdot R^1\psi_*(O_{\tilde{V}}) \supset m^2 \cdot R^1\psi_*(O_{\tilde{V}}) \supset \cdots \supset m^L \cdot R^1\psi_*(O_{\tilde{V}}) = 0$$

という $R^1\psi_*(O_{\tilde{V}})$ の m -adic filtration の長さによって定義されます。2重点 $V = \{z^2 - f(x, y) = 0\}$ を Kirby の方法で計算しますと、曲線 $\{f(x, y) = 0\} \subset \mathbb{C}^2$ の blowing-up

による特異点解消過程における中心の重複度の列が、 L の計算と結びつき、 p_g と L とが相互に評価しあうというのが修士論文の主定理でした。その結果、 $L = p_g$ と成る事は特異点解消過程が特別なものになることが見てとれましたが、堀川の p_g -formula [8] などを用いて、2重点の canonical resolution について、 $p_a \leq 1$ を有理2重点を自然に拡張する形で完全に特徴づけることができました [21]。なお p_a は Wagreich[37] によって

$$p_a(V, p) = \max\{p_a(D) \mid D \in \bigoplus_{j=1}^m \mathbb{Z}A_j, D > 0\}$$

と定義されます。特異点の環論的性質を例外集合より評価するためには、技術的には有効な不変量であり、例外集合のトポロジーよりきまります。ですが、具体的な数値の意味は、まだまだ研究の余地がある量だと考えています。2重点の canonical resolution についての p_a の研究は後に、高村昌和[20]によって、 p_a の上から精密評価、その系として、 $\text{ord } g \leq 8$ までのブランチを持つクラスまで拡張がされています。 $p_a = 2$ までの特異点解消過程による特徴づけとして発展しています。 $p_a(V, p)$ に関する精密な評価は他にあまり研究がなく、高村の論文 [20] は大変貴重なものだと思います。

今回の §4 ではこの2重点の標準特異点解消に立ち戻って、 $M = Z_0$ を研究します。

$p_a = 1$ の研究、2重点の解析の手応えを元に、ドクター入学直後、私は、次の基本予想 (作業仮説) を持っていました。不等式 $p_g \leq p_a \times L$ の成立です。これは、ある特異点解消 (厳密には有理特異点を許す部分解消で良い) $R^1\psi_*(O_{\tilde{V}}(-M)) \rightarrow R^1\psi_*(O_{\tilde{V}})$ で単射が成立することが十分条件になります [23]。また $M = Z_0$ が成り立つ特異点解消があるなら、正しくなるのも証明されました [23]。Gorenstein 性から外れる一般的な2次元特異点については [2011 大沢先生還暦シンポジウム] でもお話ししましたように成立しない作業仮説であることがわかりましたが、少なくとも私が最初に研究を開始した2重点には、次の結果がありました。

定理 (Dixon)[5] : $\text{ord } f$ が偶数ならば、 $Z^2 = -2$ であり、任意の特異点解消上で $Z = M$ となる。

多くの場合に基本予想が成り立つことがわかります。今回の研究のゴールは、その Dixon の定理をはずれた $\text{ord } f$ が奇数の場合にも、大変多くの場合に $Z = M$ が成り立つことが示されます。

また、2重点とは限らない場合も、奥間氏が $p_a = 1$ Gorenstein ケースに肯定的に基本予想 $L = p_g$ を示す結果を含む仕事 [17] をされました。[17] では、その一步として、講演者が [22] でおこなった極大楕円型特異点についての $M = Z_0$ の成立がやはり意味をもちました。

2つ目の非常に大きな節目は、以下に述べる1997年発表の都丸氏の「Dixon の定理の延長とも言える世界での、小平特異点についての大変わかりやすい判定法」[33][34] です。

定理 (都丸) 正規2次元特異点 $V = \{z^n - f(x, y) = 0\} \subset \mathbb{C}^3$ について、

(1) もし、 n が $\text{ord } f$ をわりきれば、 V の任意の特異点解消上で $M = Z$ が成立し、

更に小平特異点になる。

(2) 曲線 $\{f = 0\}$ による自然数 N_0 があり、 $n \geq N_0$ ならば、 V の最小良特異点除去上で、 $M = Z$ であり、更に小平特異点になる。

Dixon の結果を含み、かつ、非常に簡明な条件で論じられた結果です。都丸氏は後に、この議論を特異点を Riemann 面の退化に埋め込み Pencil 種数という考えで分類するという研究を発展されました。私は命題の中のこの表現を基準に多くの特異点を理解したいという希望が感じられました。以下の節の結果も上記の結果を一つの手本に定式化している事をもうしておきたいとおもいます。

特異点解消を blowing-up を繰り返しておこなってゆく際に、途中に現れる特異点のクラスが、分類論的に見て有理特異点に近いものであったり、また、Dixon-都丸の表示式をもつものなど、「不変量を統制するのは都合の良いクラス」が段階的に登場することがある。それらの $p_a(Z_0)$ などに絡んだ不変量の評価は、特異点解消過程を使って元の特異点を評価するのに有効になることを講演者は経験しています。研究の出発点にある 2 重点の標準特異点解消では、Dixon の定理の成り立つものとそれ以外が交互に絡んで登場します。その解読が結果を生みました。そんな考察を、上に書いた [34] を鏡に一般の 2 次元特異点にも定式化できないか？ $M = Z_0$ の成立するクラスを節目に考えることを、§3 では、 $M = Z_0$ が成立する特異点の代表である「小平特異点」を用いて試みを行いたいと思います。

2. 2 次元次数付き特異点の極大イデアルサイクルと基本サイクルについて

今回の発表の直接の先行研究である [11] [16] では、Brieskorn 多項式で定義された場合について、 $M = Z_0$ に関する条件が方程式の形（重み）によって完全に判定されています。そこでは、特異点解消における中心曲線での相当が必要十分となることが示され、重要なステップになります。この結果は Brieskorn 特異点と同じ重みを持つ擬斉次特異点にも同様に成り立つだろうか？と考えるのは自然な疑問です。すぐわかることとして、極端な場合として、通常のフェルマー方程式にあたる $(1, 1, 1)$ の重みをもつケースを考えれば、答えはそのままでは NO! です。

「重み以外の何かの性質」として、

「座標環の最小次数の斉次部分に於ける被約元の存在を仮定すること」

が我々の答えです。私は、問題を、特異点が 擬斉次多項式で定義されている場合を含む、双対グラフが星型になっている仮定での一般論から考えてみることにしました。

星型特異点 [29]. 以下、 (V, p) の最小良特異点解消において A の双対グラフが中心曲線 X をもつ星型であるとする。

$F^k = \psi_*(O_{\tilde{V}}(-kX)) \subset O_V$ として filtration を定めると、付随する次数付き環 $G = \bigoplus_{n \geq 0} F^n / F^{n+1}$ は、孤立特異点を持つ整域になる。正規化 $\bar{G}$ は、星型グラフから Pikham の定め方 [19] で X 上の正有理因子 D を与えると、 $\bar{G} = R(X, D)$ となる。 V が C^* -作用を持つ場合、 $G = R(X, D)$ であり、 O_V と G の完備化が一致し、星型特異点

は、 C^* -作用を持つ場合の自然な拡張になっている。この状況で、 $\{F^k\}$ による filtered blowing-up $\phi : V' \rightarrow V$ すると、 V' は巡回特異点をのみをもち、 ϕ の例外集合は、 $X = \text{Proj}(G)$ ひとつである。 $\tau : \tilde{V} \rightarrow V'$ は、 V' の巡回特異点の最小特異点解消になり、 $\psi = \phi \circ \tau$ と分解する。この構図で、かつて [29] では、中心曲線のみを例外集合にもつ状況での反射イデアル層の星型特異点解消への引き戻しが詳しく研究されていた。それを背景に、定理 1 が得られた。

星型特異点において、 G は一般には正規には成らない。正規になり $G = R(X, D)$ となるとき、特異点 (V, p) は $\text{Spec}(R(X, D))$ と同じ例外集合を持ち、 p_g が一定の変形で特異点解消レベルで結ばれ、いわゆる equisingular な関係になる。

定理 1. (V, p) を星型特異点解消を持つ特異点とし、 G は正規であり、 $G = R(X, D)$ と表させると仮定する。

(*) さらに、極大イデアル m についての filtration から定まる $gr_F(m) = \bigoplus_{k \geq 1} F^k / F^{k+1}$ の最小次数部分に、 G の被約な斉次元が存在すると仮定する。

このとき、 $Z_\psi = M_\psi$ となるためには、中心曲線 X 上での Z_ψ と M_ψ の係数が一致することである。

注意 2. ここで、 $G_k = R(X, D)_k = H^0(X, O_X([\alpha D]))$ であるが、両サイクルの中心曲線での係数については、次が成り立つ：

$$\begin{aligned} Z_\psi \text{ の } X \text{ における係数} &= \min\{\alpha > 0 \mid \deg[\alpha D] \geq 0\} \\ M_\psi \text{ の } X \text{ における係数} &= \min\{\alpha > 0 \mid G_k \neq 0\} \end{aligned}$$

右辺の形から、中心曲線における M と Z_0 の食い違いが、数値的な条件による切断の存在性で表されることが分かる。

[11] [16] で扱われた Brieskorn 完全交叉得点について、定理 1 の条件 (*) が成り立つことが、[30] を用いて示される。

定理 3. R を正規次数付き特異点であって、ゼロ次部分 R_0 が、体であるとする。 R が Brieskorn 多項式の完全交叉として与えられるなら、極大イデアル $R_+ = (z_1, \dots, z_s)$ を homogeneous 元で表すとき、生成元を全て reduced にとることができる。(特に、(*) が極大イデアルについて成立する。)

この証明にもちいるのは Kummer 被覆における分岐因子の性質であるが、その部分を特に強調する次の形の命題も成立する。

定理 4. (V, p) を星型特異点解消を持つ特異点とし、 G は正規であると仮定する。この分岐被覆を

$$S = O_V[z]/z^n - f, \quad f \in F^\mu - F^{\mu+1}$$

と定める。ここで、 $\bar{f} \in F^\mu / F^{\mu+1} = G_\mu$ が G の被約元、かつ、 $\frac{\mu}{n} \leq \min \deg \text{ of } G_+$ と仮定する。

このとき、 S は星型特異点であり、中心 filtration の gr が正規になり、さらに、(*) が成立する。

すなわち、 S に定理 1 の仮定と結果が成立する。

この操作により、 f が Brieskorn 型のような変数分離な式でなくても、分岐の指数 n が十分大きければ、最小次数部分に被約元が生じて、中心曲線による $M = Z_0$ の成立原理が成り立つ状況が構成できる。

次数付き環の斉次元がいつ被約になるか？は可換環論的には素朴な問題である。本稿の 定理 1 への応用を考え、[26] では一つの命題を報告する。

3. 有理曲線を中心曲線とする 2 次元次数付き特異点の極大イデアルサイクルについて

この節では 前節の状況で、更に $X = P^1$ である場合を考える。注意 2 によれば、特に $X = P^1$ である場合は、 M と Z_0 の中心曲線における係数は常に一致することが分かる。

都丸氏と講演者は、1997 年ころより何度もこの状況での $M = Z_0$ を問題にしてきたのである。星型特異点解消を持ちしかも中心曲線が P^1 である。有理ホモロジー球面の位相を持つ状況であり、次数付きの場合には W. Neuman によって Brieskorn complete intersection の abelian quotient になっていることが分かっている。Splice quotient singularity の中でも良いクラスと考えられる。

問題：星型特異点解消をもち、中心曲線が P^1 である場合、 $M = Z_0$ となるのはいつか？

1997 年版の素朴な version では、常に正しいだろうと考えていました。事実、最終節で触れることになるが、重複度が 2 の状況では、この仮定のもとでは常に $M = Z_0$ が成立します (定理 21 参)。当時、都丸氏は M と Z_0 の食い違い部分の位相を考えておられ、関連しての問題でした。ただ、非 Gorenstein であって p_g が次数付きの場合とは異なる場合 (定理 1 の仮定である $gr_F(O_V) = G$ の正規性が不成立の状況) には容易に反例はつれます。そして、次数付きである場合に限っても、 $Z \neq M$ となる例は、まず都丸氏により Kummer 被覆の手法で得られました [27]。都丸氏は類似構成も行っています。

ここでは、次数付き環の Pinkham-Demazure 因子の言葉に関連させて、 $M = Z_0$ の問題を考えてみます。

定理 5. 2 次元 $R = R(X, D)$ について、有理因子 D を $D = \sum_{x \in X} p_x/q_x x \in \text{Div}(E) \otimes Q$ と表示する。 $e = \min\{\alpha > 0 \mid \deg[\alpha D] \geq 0\}$ とおき、 $h \in R_e$ を有理関数 $\phi \in H^0(E, O(eD))$ を用いて $h = \phi T^e$ (T は $Q(R)$ の次数 1 の元) と表す。このとき、

$$\text{div}_V(h) = Z \iff X \text{ の各点 } x \text{ にて } p'_x \left(\text{ord}_x h - e \frac{p_x}{q_x} \right) < 1$$

である。 p'_x は、 $1 \leq p'_x < q_x$ なる整数であって、 $p'_x p_x \equiv 1 \pmod{q_x}$ とする。

注意 6. $h \in R_e$ が被約であることは、 X の各点 x にて $q_x \left(\text{ord}_x h - e \frac{p_x}{q_x} \right) \leq 1$ と同値である。この式は、上記の条件式の十分条件になる（必要条件では無い）。このことから、定理 5 は、定理 1 の結果の一つの精密化を与えています。

$X = P^1$ の時は、 D の表現による双対グラフの言葉によって、 $Z = M$ に対する最小次数元での実現に関する必要十分条件が得られる。

系 7. 2次元 $R = R(P^1, D)$ について、 D と e を上記の通りとする。

$$\text{div}_{\tilde{V}}(h) = Z \text{ となる } h \in R_e \text{ が存在} \iff P^1 \text{ の各点 } x \text{ にて } p'_x \left(\left\lceil e \frac{p_x}{q_x} \right\rceil - e \frac{p_x}{q_x} \right) < 1$$

である。

例 8 (1)[27] $X = P^1$, $D = 12P_0 - \sum_{i=1}^{16} \frac{2}{3}P_i - \frac{4}{5}P_{17} - \frac{2}{5}P_{18}$ とする。 $e = 6$, $[6D] \sim 0$ であり、 $\phi \in k(P^1)$ を $\text{div}(\phi) = -[6D]$ なる唯一の元とすると、 $\text{div}(\phi) + 6D = \frac{1}{5}P_{17} + \frac{3}{5}P_{18}$ である。 $p'_{P_{18}} = 3$ であって、 $3 \cdot \frac{3}{5} \geq 1$ 。系 2 により、最小同次元で Z の実現は不可である。さらに、 $R_7 = R_8 = R_{10} = 0$ と R_9 についての類似考察により、 $Z \neq M$ がわかる。(2) 超曲面特異点 $z^4 = x(y^5 + x^{16})$ は $R = R(P^1, D)$ $D = P_0 - \frac{3}{64}P_1 - \frac{3}{4}P_2 - \frac{1}{5}P_3$ と表すことができる。 $e = 20$ となり、同様の考察により、 $Z \neq M$ であることがわかる。現在、我々が知っている $X = P^1$ であって、Gorenstein であり、かつ重複度が最小の例がこの例である。

注意 9. 星形特異点であり、中心曲線で $Z = M$ であるのに、全体では $Z \neq M$ となる状況では、 $p_a(Z) > p_a(M)$ である事が簡単に示される。そのことから、自然なコホモロジー写 $R^1\psi_*O(-M) \rightarrow R^1\psi_*O$ が単射でない状況が生ずる。Splice quotient 特異点に関しては injective 特異点になるか？という問いをかつて (2011 年大沢還暦シンポジウム) 講演者は述べたが、特異点解消の段階で考えたときには、否定的であることが判明したことになる。filtered ring の研究の中では、当初、珍しい現象として捉えられていた例が、今回の考察から、より構成しやすくなったと考えられる。一方、特異点解消を有理特異点を持つ部分解消に置き換えて考えると次数付き特異点では「単射な対応が構成できる」ことが [23] で示されており、非常にデリケートな状況である。

4. 正規化ブローイングアップの接錐が被約な2次元正規特異点について； 小平特異点を用いた一般の特異点の難易度を計るための一つの実験

私達は、 $M = Z_0$ の成立を一つの問題として議論をおこなっています。ここでは、特異点解消 $\phi: \tilde{V} \rightarrow$ における線形系 $| -Z_0 |$ の元 M と base locus の問題ととらえて考えてみます。もっとも良いクラスとして、定理 11 (3) にある小平特異点が、定理 10 の表現で登場します。そして、与えられた特異点を特異点解消を blowing-up followed by

normalization の合成 (Zariski の標準特異点解消) として構成する際の各ステップに現れる特異点としてとらえ、小平特異点との違いをさぐる視点が見えてきます。

$\overline{m^k}$ the k -th power m^k の the integral closure (整閉包) であるとする ($k \geq 0$)。このときリース環 $R = \bigoplus_{k \geq 0} \overline{m^k} T^k$ から導かれる V の正規化ブローアップが $\phi: \tilde{V}_1 = \text{Proj}_V(R) \rightarrow V$ として表現される。これは、Zariski's canonical resolution of surface singularity (V, p) の第一ステップである。そして、 ϕ の例外集合 (fiber) は $\text{Proj}(G)$ with $G = \bigoplus_{k \geq 0} \overline{m^k} / \overline{m^{k+1}}$ となる。この、 $G = \bigoplus_{k \geq 0} \overline{m^k} / \overline{m^{k+1}}$ を the normalized tangent cone of (V, p) と呼ぼう。

定理 10. (V, p) の重複度を e とする。上記の記号のもとで、次は互いに同値である。

- (1) the normalized tangent cone G は被約である。
- (2) 任意の特異点解消 $V_* \rightarrow V$ において、イデアル層として $m_{O_{V_*}} = O_{V_*}(-Z_{V_*})$ (ただし Z_{V_*} は Artin の基本因子) であり、さらに、 $Z_{V_*} A_i < 0$ となる既約成分についてそこでの係数が 1, すなわち $\text{Coeff}_{A_i}(Z_{V_*}) = 1$ である。
- (3) (V, p) は小平特異点であって、 $-Z_{V_*}^2 = e$ となる。
- (4) parameter system $x, y \in m$ があって、その一般一次結合による切片 $C_{\alpha, \beta} = \{\alpha x + \beta y = 0\} \cap V$ は、 e 個の smooth な既約成分に分解する。

この同値な条件を満たすとき、特異点は、(3) で言うところの種数が $p_a(Z) = \delta(C_{\alpha, \beta}) - e + 1$ となる小平ペンシルに埋め込まれる。 $\text{ord} f \geq n$ であって、 $V = \{z^n - f(x, y) = 0\}$ という形をした場合については、上記の状況は n divides $\text{ord} f$ であることと同値であることが、条件 (4) から容易に確かめられる。その意味で、この結果は、後にも述べられる 2 重点についての J.Dixon や Tomaru [34] の自然な拡張であるともとらえられる。線形系の base locus の観点からは、「十分に負定値な場合は、定理 10 の条件が成立すること」が次のようにわかる。(I) 固定成分がないこと、(II) 固定点 embedded point が無いこと (III) リース環が一次で生成される事、という段階をへた命題であるが、(I) は $M = Z_0$ へ、(III) は小平性を示す十分条件となる。

定理 11. $\phi: (\tilde{V}_*, A) \rightarrow (V, p)$ を特異点解消であるとする。

I. 次の (1a)(2a) を仮定する：

(1a) すべての既約成分 A_i について $-A_i^2 \geq 2p_a(A_i) - 1$ である。(2a) 各既約成分 A_i に対して $Z_1 = A_i$ ではじまり fundamental cycle の computation sequence $\{Z_k\}$ の中で、 $-A_{i_j} Z_0 \geq 2p_a(A_{i_j}) - 1 + Z_{j-1} A_{i_j}$ が各ステップ j で成立するものが存在する。

このとき、この特異点解消上で、 $Z_0 = M$ となる。

II. 次の (1b)(2b) を仮定する：

(1b) すべての既約成分 A_i について $-A_i^2 \geq 2p_a(A_i)$ である。(2b) 各既約成分 A_i に対して $Z_1 = A_i$ ではじまり fundamental cycle の computation sequence $\{Z_k\}$ の中で、 $-A_{i_j} Z_0 \geq 2p_a(A_{i_j}) - 1 + Z_{j-1} A_{i_j}$ が各ステップ j で成立するものが存在する。

このとき、この特異点解消上で、 $O_{\tilde{V}_*}(-Z_0) = m_{O_{\tilde{V}_*}}$ となる。

III. すべての既約成分 A_i について $-A_i^2 \geq 2p_a(A_i) + 1 + 2A_i \sum_{j \neq i} A_j$ ($\forall i$) と仮定す

る。このとき、

(III-1) Z_0 は被約因子であって、かつ $O_{\tilde{V}_*}(-Z_0) = mO_{\tilde{V}_*}$ がこの特異点解消上成立し、

(III-2) すべての k について $\phi_*(O_{\tilde{V}_*}(-kZ_0)) = m^k$ であり tangent cone $\oplus_{k \geq 0} m^k / m^{k+1}$ は reduced である。and

(III-3) 特異点解消 ϕ は m によるブローイングアップ 1 回で得られる。

この定理 11 から、十分に不定値な双対グラフを持つ特異点は小平特異点である、と言えます。たとえば、最小良特異点解消の例外集合を何点か blowing-up することで、部分グラフの proper transform から小平特異点が得られます。一種の内部近似と言えるでしょう。この反対側の埋め込みについて、以下が成り立ちます。

定理 12. 2次元正規特異点 (V, p) に対して、次の 2 条件を満たす 2次元正規特異点 (V_{-1}, p_{-1}) が存在する。

(1) (V_{-1}, p_{-1}) は、定理 10 の条件を満たす。

(2) 最初の normalized blowing-up $\psi : V_* \rightarrow V_{-1}$ をしたとき、点 $Q \in V_*$ があって、 (V, p) と (V_*, Q) は解析的に同型である。

この特異点 (V_{-1}, p_{-1}) を使って、定理 10 (4) の一般切片を考えると、次の評価が成立する。

$$p_a(Z_V) \leq p_a(Z_{V_{-1}}) = \delta(C) - e(m, O_{V_{-1}}) + 1$$

5. 2次元正規2重点の極大イデアル因子と基本因子

本節では重複度が2である場合を考える。特異点解消 $\phi : (\tilde{V}, A) \rightarrow (V, p)$ に対して、例外集合 A に台をもつ Artin の基本因子を Z とすると、 Z^2 は、特異点解消によらない数であり、 $-1, -2$ のいずれかになる。 $Z^2 = -2$ の場合には、全ての特異点解消上 $Z = M$ であり、その対局にある $Z^2 = -1$ の解析は基本的な問題である。かつて Laufer [14] によって研究された $z^2 = y(x^4 + y^6)$ は、極大イデアル因子 M と Artin の基本因子 Z があらゆる特異点解消で異なり、 $Z^2 = -1$ を満たす例として有名である。以下では、同様の性質を持つ $z^2 = f(x, y)$ を $f(x, y)$ の Puiseux pair を含む equisingular class として完全に特徴づけた。

その対局にあるものとしては次が有名である。

定理 (Dixon) [5] : $\text{ord } f$ が 偶数ならば、 $Z^2 = -2$ であり、任意の特異点解消上で $Z = M$ となる。

以下の結果を用いると、この「 $\text{ord } f$ が 偶数ならば」と同形式の判定法を、「定理 14 の状況以外では、すべての 2次元正規2重点について $Z_0^2 = -2$ 」という形の拡張が得られる。さらに、 $Z_0 = M$ が最小特異点除去（または、最小良特異点除去）で成立する条件を、定理 14 の Laufer 成分と Laufer くっつき成分の非存在で特徴づけられる（定理 18）。

定理を述べる前に、 $Z^2 = -1$ が得られる、簡単な例を上の Laufer のものと合わせて確認しておく。

例 13 (0) $z^2 = y$, (1) $z^2 = y(x^4 + y^6)$, (2) $z^2 = y(x^8 + y^6)$, (3) $z^2 = y(x^4 + y^6)(x^8 + y^6)$

このうち、最初の例 (0) は 2 重点ではなく非特異であるが、このような y にあたる成分 f_0 が f にあることが以下重要になる。(1),(2),(3) で y の積となるものの性質は、以下のように Puiseux Pairs (Newton Pairs, 特異点解消における重複度の列) とそれらの交わり数という数値的データで特徴づけられる。なお、2018 年発表の際の学会アブストラクト [28] では、くつつき Laufer type の成分への考察が欠落しています。以下の形に訂正させていただきます。

定理 14 被約な解析曲線を定義する $f(x, y) \in \mathbb{C}\{x, y\}$ を用いて 2 次元正規特異点 $V = \{z^2 - f(x, y) = 0\}$ を考える。

この時、Artin 基本因子の次数 $Z^2 = -1$ になる為には、以下性質をもつ分解 $f(x, y) = f_0(x, y)f_1(x, y)f_2(x, y)$ をもつ事が必要十分である。ここで、 f_1, f_2 は unit になる事も許す。

Odd 成分 f_0 : (1) 位数は奇数 (2) tangent cone はただひとつであり、 $D = \{f_0 = 0\}$ を blowing-up して得られる proper transformation を D_1 とするとき、重複度について $e(D_1) = e(D)$ 。

Laufer type 成分 f_1 : (1) 各既約成分の tangent cone が f_0 とは異なり、位数は偶数。(2) f_1 の既約成分を 1st 偶数 同値 (後述) で類別したとき、各同値類について、(1st 偶数成分が k 次で現れる D を代表元とするならば) その同値類に現れる既約曲線の総和 $\Sigma(D)$ の重複度 $e(\Sigma(D))$ が、 $2m(D)_1 \cdots m(D)_k$ で割り切れる。

くつつき Laufer type 成分 f_2 : (1) 各既約成分の tangent cone が f_0 と等しく、(2) f_2 の既約成分から定義される曲線 D を blowing-up して得られる proper transformation を D_1 とするとき、 $e(D_1) < e(D)$ かつ $e(D) + e(D_1)$ が偶数となる。(3) f_2 の既約成分を 1st くつつき偶数 同値 (後述) で類別したとき、各同値類について、(1st くつつき偶数成分が k 次で現れる D を代表元とするならば) その同値類に現れる既約曲線の総和 $\Sigma(D)$ の重複度 $e(\Sigma(D))$ が、 $2m(D)_1 \cdots m(D)_k$ で割り切れる。

定義 (1st 偶数同値、1st くつつき偶数同値)

重複度が m の既約曲線 D のピュイズー展開を本質的な項のみで次のように表現する。

$$x = t^m, \quad y = t^{k_1} + t^{k_2} + \cdots t^{k_g}, \quad (m < k_1 < k_2 < \cdots < k_g)$$

$$\frac{k_i}{m} = \frac{n_i(D)}{m_1(D) \cdots m_i(D)}, \quad (n_i(D), m_i(D)) = 1 \text{ ピュイズーペアは}$$

$$\frac{n(D)_1}{m(D)_1}, \frac{n(D)_2}{m(D)_2}, \dots, \frac{n(D)_{g(D)}}{m(D)_{g(D)}}$$

と表現される。各 $1 \leq i \leq g(D)$ に対して blowing-up による例外集合の string が構成され、string 内の end curve を次の blowing-up sequence の基点となる曲線を与える。

今、二つの既約曲線、 D_1 と D_2 が、それぞれのピュイズー展開に従って、blowing-up sequence で特異点解消されるとき、第 k 番目のピュイズー展開を終了させる string 内の end curve (C^2 の blowing-up で生ずる 例外集合の最後の成分である $E = P^1$) を共

有するとき、 k 次 プュイズー同値、(あるいは、成分 E で プュイズー同値) と呼ぶ。これは、それぞれのプュイズー展開において $i = 1, \dots, k$ までの Puiseux pair が等しく、 k 番目の Puiseux pair を blowing-up で解消する中心を選ぶ瞬間まで、 D_1 と D_2 が交わっていることと同値である。

上記のプュイズー展開において

$$e(D) = m = m(D)_1 \cdots m(D)_g, \quad e(D) + e(D_1) = k_1 = n(D)_1 m(D)_2 \cdots m(D)_g$$

である事に気をつける。

f_1 で登場する既約成分にて、最初に $m(D)_1 \cdots m(D)_i$ が偶数となる番号を、 $i = k(D)$ とする。このとき、 i 番目の resolution string の最終となる成分を、 D の 1st 偶数成分と呼ぶ。 f_1 に登場する二つの既約曲線 D_1 と D_2 が “ 1st 偶数同値 ” であることを、 D_1 と D_2 が 1st 偶数成分に関してプュイズー同値となることと定義する。

f_2 で登場する既約成分にて、最初に偶数の $n(D)_1 m(D)_2 \cdots m(D)_i$ が出てくる番号を、 $i = k(D)$ とする。このとき、 i 番目の resolution string の最終となる成分を、 D の 1st くっつき偶数成分と呼ぶ。 f_1 に登場する二つの既約曲線 D_1 と D_2 が “ 1st くっつき偶数同値 ” であることを、 D_1 と D_2 が 1st くっつき偶数成分に関してプュイズー同値となることと定義する。

注意 (1) f_1 の既約成分 D について、 $e(\Sigma(D))$ は、(従って f_1 の位数は) 4 で割れる。(2) f_1 の既約成分 D について、 $\Sigma(D) = D$ が成立、すなわち同値類がひとつの既約成分からなる場合、プュイズー展開において、展開の番号 i について 2 箇所以上で $m(D)_i$ が偶数になることが、定理 14 の f_1 (3) の同値類の条件である。(3) f_2 の位数 (≥ 0) も偶数であるが、 f_2 が unit でないとき、既約成分 D について、 $e(\Sigma(D))$ と $\Sigma(D)$ の blowing-up による proper transformation の重複度との差は、4 の倍数となる。とくに、 f_2 が unit でないとき、 f_2 の位数は 6 以上である。(4) f_2 の既約成分 D について、 $\Sigma(D) = D$ が成立、すなわち同値類がひとつの既約成分からなる場合、プュイズー展開において、 $n(D)_1 m(D)_2 \cdots m(D)_k$ が最初に偶数になる k の後、もうひとつ番号 $i > k$ についても $m(D)_i$ が偶数になることが、定理 14 の f_2 (3) の同値類の条件である。

$Z^2 = -1$ となっている正規 2 次元 2 重点 $V = \{z^2 - f(x, y) = 0\}$ を考え、特異点解消 $(\tilde{V}, A) \rightarrow (V, p)$ 上で、極大イデアルの引き上げが locally free となり $mO_{\tilde{V}} = O_{\tilde{V}}(-M)$ となるものとする。 $M - Z = Z_1$ は、 M と Z の食い違い部分の台を持つ次数 -1 の fundamental cycle なるが、定理 14 に登場している f_0, f_1, f_2 を用いて、 $p_a(Z_1)$ を表現すると次のようになる。

補題 17 $Z^2 = -1$ となっている正規 2 次元 2 重点 $V = \{z^2 - f(x, y) = 0\}$ について、

$$p_a(Z_1) = \frac{\text{ord} f_1 + \text{ord} f_2 - \text{ord} \tilde{f}_2}{4}$$

となる。ただし、 $\tilde{f}_2$ は、 f_2 が unit でないとき、 $\{f_2 = 0\}$ の blowing-up at $(0, 0)$ による proper transformation を与える定義式である。

M と Z の食い違い部分の有理特異性として、次が得られる。

定理 18 $Z^2 = -1$ となっている正規 2 次元 2 重点 $V = \{z^2 - f(x, y) = 0\}$ を考える。 V の 最小特異点除去上で、 $M = Z$ となる為には、 定理 14 の情報で f_1 および f_2 が unit になることが必要十分である。

なお、この同値性は、最小良特異点除去上での関係式 $M = Z$ と置き換えても正しいことが証明できる。

とくに、 f が既約であって、 $Z^2 = -1$ のときは、 定理 14 により、 $f = f_0$ となるので、 次が得られる。

系 19 (Dixon) 正規 2 次元 2 重点 $V = \{z^2 - f(x, y) = 0\}$ とする。 f が既約であるとき、 最小特異点除去上で、 $M = Z$ となる。

例 20 (1) $z^2 = y(x^4 - y^7)((x^4 + y^7)^3 + x^7 y^{10})$ は、 $f_0 = y$ 、 $f_1 = (x^4 - y^7)((x^4 + y^7)^3 + x^7 y^{10})$ 、 f_2 は unit、 と分解され、 f_1 の 2 つの既約成分は、それぞれ $7/4$ および $7/4, 26/3$ という Puiseux Pair を持つが、 1st 偶数同値になっている。 また、 $\text{ord}(f_1)$ は $2 \times 4 = 8$ で割り切れる。 よって $Z^2 = -1$ である。 ここで、 最小特異点解消上 $Z \neq M$ である。

(2) $z^2 = (x^3 - y^5)(y^4 - x^6)$ は定理 14 における f_0 に相当する成分が存在しないので $Z^2 = -2$ である。 よって、 あらゆる特異点解消上で、 $M = Z$ である。

先に述べた $Z^2 = -1$ における M と Z の食い違いの構造に関して： $M - Z$ が最小特異点解消上でも無くならない場合の構造論は、 Laufer による台についての ホモロジー に非消滅についての研究、 都丸による Dixon 型の結果の拡張を含む解析 [5, 6] がある。

定理 21 $Z^2 = -1$ となっている正規 2 次元 2 重点 $V = \{z^2 - f(x, y) = 0\}$ を考え、 最小特異点解消 $(\tilde{V}, A) \rightarrow (V, p)$ を考える。 このとき、

$$\text{rank} H_1(A, R) \geq \sharp\{f_1 \text{ の 1st 偶数同値類}\} + \sharp\{f_2 \text{ の 1st くつつき偶数同値類}\}$$

である。 (f_i が unit の場合は同値類は 0 個と考える)

特に、 $H_1(A, R) = 0$ である場合、 f_1, f_2 が共に unit になり、 最小特異点解消上で $M = Z$ となるという Laufer [14] §6 Theorem 6.3, の主張がこの形で成立する。 また、 この結果より、 星型双対グラフを例外集合にもち中心曲線が P^1 になる 2 重点に関しては、 つねに、 最小特異点解消上では $M = Z_0$ であることが従う (§2 問題)。 §2 で得た超曲面 4 重点の例を、 低い重複度で考えることができるか？ まず 2 重点の場合に、 Laufer の仕事を完全に把握することの重要性から、 この仕事が始まったという経緯があります。

一般的な M と Z の食い違いについて、 また、 食い違い部分の存在と、 $Z^2 = -1$ の特徴づけとしては、 Calabri-Ferraro による解析 [4] は意味深いものである。 我々は貴重な手本とした。 また、 彼らは食い違いが起きる状況を、 Enriques diagram を使う帰納的な表現で行っている。

最後に、 再び、 定理 14 に登場している f_0, f_1, f_2 を用いて、 $p_a(Z)$ を表現すると次のようになる。

定理 22 $Z^2 = -1$ となっている正規 2 次元 2 重点 $V = \{z^2 - f(x, y) = 0\}$ について、

$$p_a(Z) = \frac{\text{ord} f_0 - 1}{2} + \frac{\text{ord} f_1 + \text{ord} f_2 + \text{ord} \tilde{f}_2}{4}$$

となる。ただし、 $\tilde{f}_2$ は、 f_2 が unit でないとき、 $\{f_2 = 0\}$ の blowing-up at $(0, 0)$ による proper transformation を与える定義式である。

6. 最後に

直接間接に、ここにお名前を挙げました、都丸正氏、奥間智弘氏には、共同研究者として、そして、重要なアドバイスをいただくことで助けていただきました。深く感謝します。私の研究の出発点の時から今にいたるまで数えきれない皆さんから貴重なコメントをいただきました。とりわけ、40 年間に渡り京都大学時代から励まし続けてくださっている斎藤恭司、大沢健夫の両先生、そして、30 年以上に渡り仲間でありつづけている渡辺敬一、石井志保子両先生をはじめ早稲田・日大の特異点セミナーのメンバーに感謝いたします。

参考文献

- [1] Artin, M.: On isolated rational singularities of surfaces. Amer. J. Math., **88**, (1966), 129-136.
- [2] Brieskorn, E.: Über die Auflösung gewisser Singularitäten von holomorpher Abbildungen, Math. Ann., **166** (1966) 76-102
- [3] Brieskorn, E., Knörrer, H.: Plane Algebraic Curves. Birkhäuser-Verlag, Basel, Boston, Stuttgart (1986)
- [4] Calabri, A., Ferraro, R.: Explicit resolutions of double point singularities of surfaces. Collect. Math., **53**, (2002), 99-131
- [5] Dixon, J.D.: The fundamental divisor of normal double points of surfaces, Pacific J. Math. **80** (1979), 105-115.
- [6] Hidaka, F., Tomari, M.: On singularities arising from the contractions of the minimal section of a ruled surface Manuscripta math **65** (1989) 329-347
- [7] 樋口禎一、吉永悦男、渡辺公夫; 多変数複素解析入門、数学ライブラリー **51** 森北出版 (1980) ISBN-10: 4627005199
- [8] Horikawa, E.: On deformations of quintic surfaces, Invent. Math., **31** (1975), 43-85
- [9] Karras, U.: On pencils of curves and deformations of minimally elliptic singularities. Math. Ann. **147** (1980), 43-65
- [10] Kirby, D.: The structure of an isolated multiple point of a surface I, II, III, Proc. London Math. Soc. (3) **VI** (1956), 597-609, **VII** (1957), 1-28.
- [11] Konno, K. Nagashima, D.: Maximal ideal cycles over normal surface singularities of Brieskorn type. Osaka J. Math. **49**(1) (2012), 225-245
- [12] Laufer, H.B.: Normal two-dimensional singularities, Ann. Math. Studies, **71** Princeton University Press (1971).
- [13] Laufer, H.B.: On minimally elliptic singularities, Amer. J. Math., **99** (1977), 1257-1295.
- [14] Laufer, H.B.: On normal two-dimensional double point singularities, Israel J. Math., **31** (1978), 315-334.
- [15] Lipman, J.: Introductions to resolution of singularities, Proc. Symp. Pure. Math. **29** (1975), 187-230.

- [16] Meng, F.-N. Okuma, T.: The maximal ideal cycles over complete intersection surface singularities of Brieskorn type. *Kyushu J. Math.* **68** (2014), 121-137
- [17] Okuma, T.: Numerical Gorenstein elliptic singularities. *Math. Z.* **249** (2005), 31-62
- [18] 奥間智弘.: 複素 2 次元特異点の幾何種数について日本数学会 2012 年度年会 函数論分科会 特別講演 東京理科大学理学部 2012 年 03 月 27 日 [http:// www.mathsoc.jp/ section/ complex/ PDF/2012.1.pdf](http://www.mathsoc.jp/section/complex/PDF/2012.1.pdf) (pp.71-78)
- [19] Pinkham, H.: Normal surface singularities with $\mathbf{C}^*$ -action, *Math. Ann.*, **227** (1977), 183-193.
- [20] Takamura, M.: On the estimate of the arithmetic genus for normal two-dimensional singularities on double coverings. *Tsukuba J. Math.* **28** (2004), 35-74.
- [21] Tomari, M.: A geometric characterization of normal two-dimensional singularities of multiplicity two with $p_a \leq 1$ *Publ. RIMS. Kyoto Univ.* **20** (1984) 1-20
- [22] Tomari, M.: A p_g -formual and elliptic singularities *Publ. RIMS. Kyoto Univ.* **20** (1985) 297-354
- [23] Tomari, M.: Maximal-ideal-adic filtrations on $R^1\psi_*O_{\tilde{V}}$ for normal two-dimensional singularities *Advanced Studies in Pure Mathematics.* **8** (1986) 633-647
- [24] Tomari, M.: The inequality $8p_g < \mu$ for hypersurface two-dimensional isolated double points *Mathematische Nach.* **164** (1993) 37-48
- [25] Tomari, M.: A geometric characterization of normal two-dimensional Gorenstein singularities with $p_a = 1$ *Proc. The Inst. of Natural Scie. Nihon Univ.* **40** (2005) 179-184
- [26] 泊 昌孝: n 次元 weighted homogeneous 正規特異点の座標系が被約元を与える日本数学会 2018 年秋季総合分科会 代数学一般講演 (4 日目)
- [27] Tomari, M., Tomaru, T., The maximal ideal cycles over normal surface singularities with $\mathbf{C}^*$ -action. *Tohoku Math. J.* **69** 3 (2017) 415-430
- [28] 泊昌孝-都丸正.: 2次元正規2重点の極大イデアル因子と基本因子、日本数学会 2018 年度年会 函数論分科会 一般講演 東京大学駒場キャンパス 2018 年 03 月 18 日 [https:// app.mathsoc.jp /meeting__ data/ tokyo18mar/ index-04.html](https://app.mathsoc.jp/meeting__data/tokyo18mar/index-04.html) (公開は一年後より)
- [29] Tomari, M., Watanabe, Kei-ichi: Filtered rings, filtered blowing-ups and normal two-dimensional singularities with “star-shaped” resolution. *Publ. Res. Inst. Math. Sci, Kyoto Univ.*, **25**(1989), 681-740
- [30] Tomari, M., Watanabe, Kei-ichi: Cyclic covers of normal graded rings. *Kodai Mathematical Journal*, **24** (2001) 436-457
- [31] Tomaru, T. : On Gorenstein surface singularities with fundamental genus $p_f \geq 2$ which satisfy some minimality condtions. *Pacific J. Math.* **170**(1) (1995), 271-295
- [32] Tomaru, T., On Maximal ideal cycles for 2-dimensiona normal double points. *Ann Gunma Healthe Sci.* **18** (1997) 17-21.
- [33] Tomaru, T., 日本数学会 1997 年 3 月、信州大学、関数論
- [34] Tomaru, T. : On Kodaira singularities defined by $z^n = f(x, y)$. *Math. Z.* **236**(1) (2001), 133-149.
- [35] Tomaru, T., Pencil genus for normal surface singularities. *J. Math. Soc. Japan* **59** (2007) 35-80.
- [36] 都丸正.: 複素 2 次元特異点と閉リーマン面の退化族について日本数学会 2008 年度年会 函数論分科会 特別講演 近畿大学 2008 年 03 月 23 日 [http:// www.mathsoc.jp/ section/ complex/ PDF/2008.1.pdf](http://www.mathsoc.jp/section/complex/PDF/2008.1.pdf) (pp.31-41)
- [37] Wagreich, Ph.: Elliptic singularities of surfaces, *Amer. J. Math.* **92** (1970), 419-454