

特別講演

動的境界条件付き半線形楕円型方程式

川上 竜樹 (龍谷大学 理工学部)*

1. 序

動的境界条件付き半線形楕円型方程式

$$(P) \quad \begin{cases} -\Delta u = u^p, & u \geq 0, & x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N, \quad t > 0, \\ \partial_t u + \partial_\nu u = 0, & & x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x) \geq 0, & & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

について考察する. ただし, $N \geq 2$ であり, $p > 1$ とする. ここで, 初期条件 φ は境界上で与えられていることに注意する. 時間微分を含む問題 (P) の境界条件は動的境界条件と呼ばれ, 完全導体との熱接触, 攪拌された液体や蒸気からの溶質の拡散等, 様々な拡散現象を記述する際に現れる (例えば [3, 4] など参照). これまでも動的境界条件を持つ偏微分方程式の境界値問題は, 楕円型方程式に対してのみならず, 放物型方程式や双曲型方程式など, 様々な方程式に対して多くの先行研究が行われてきた. しかしながら, その状況は領域 Ω の有界性に関して大きく異なっており, そのほとんどが有界領域に対する結果である. (有界領域に関する結果は, 例えば [5, 6, 14, 16, 17, 19, 22, 23, 24, 25, 28] など.) これは Ω が有界領域である場合については, 領域のコンパクト性を用いたエネルギー評価による弱解の構成や正則性評価, 固有関数および固有値を用いた様々な解析, また, 抽象発展方程式に関する解の存在などに関する一般論の適用が可能であることに起因する.

一方, Ω が非有界領域である場合については上記の手法を適用することが難しく, これまでほとんど結果が得られていない. 実際, Ω が半空間 $\mathbb{R}_+^N := \{x_N > 0\}$ である場合に, 非線形動的境界条件 $\partial_t u + \partial_\nu u = u^q$ ($q > 1$) 付きラプラス方程式の非負値解について, 藤田指数の導出 ([1]) と解の有限時間爆発に関する結果の拡張 ([20, 21]) 及び時間大域解の漸近挙動 ([7]) などが得られているのみであり, 問題 (P) については, そもそもどのように解を定義すれば良いかですら知られておらず, 解の存在・非存在や解の時間大域挙動など多くの基本的な問題でさえ未解決であった. 本講演では上記を背景とし, Ω が非有界領域の場合, 特に

- (i) Ω が半空間 $\mathbb{R}_+^N$ (ii) Ω が単位球の外部領域 $\{x \in \mathbb{R}^N : |x| > 1\}$

の場合について

- (a) “解”をどのように定義すべきか?
- (b) 問題 (P) は何時, 時間局所解, さらに時間大域解を持つか?
- (c) 時間大域解が存在するならば, その漸近挙動はどうなっているか?

本研究は科研費 (課題番号:16K17629) の助成を受けたものである.

2010 Mathematics Subject Classification: 35J91, 35B40, 35J25, 35B53

キーワード: semilinear elliptic equation, dynamical boundary condition, minimal solution

* 〒520-2194 滋賀県大津市瀬田大江横谷 1-5 龍谷大学 理工学部

e-mail: kawakami@math.ryukoku.ac.jp

について考察した Marek Fila 氏 (Comenius 大学), 石毛 和弘氏 (東京大学) との一連の共同研究 [8]–[12] の結果を報告する. また, 発展方程式への応用として, 動的境界条件付き半線形熱方程式の解析を視野に行った半空間における動的境界条件付き熱方程式の拡散極限に関する結果 [13] についても合わせて報告する.

2. 半空間の場合

2.1. 解の定義

半空間 $\Omega = \mathbb{R}_+^N$ において問題 (P) を考察する. $P = P(x', t)$ を $N - 1$ 次元ポアソン核とし, $\mathcal{P}(x', x_N, t) := P(x', x_N + t)$ とする. このとき $\mathcal{P} = \mathcal{P}(x, t)$ は斉次動的境界条件付きラプラス方程式の基本解であることがわかる. この $\mathcal{P}$ を用いて, $\mathbb{R}^{N-1}$ 上の可測関数 φ に対して,

$$[S(t)\varphi](x) := \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \mathcal{P}(x' - y', x_N, t)\varphi(y') dy' \quad (2.1)$$

と定める. また, $G = G(x, y)$ を半空間における斉次ディリクレ境界条件下でのラプラシアン $-\Delta_D$ のグリーン関数とし, $\mathbb{R}_+^N$ 上の可測関数 f に対して,

$$[(-\Delta_D)^{-1}f](x) := \int_{\mathbb{R}_+^N} G(x, y)f(y) dy$$

と定める. このとき, 問題 (P) の解を次のように定める.

定義 1 φ を $\mathbb{R}^{N-1}$ 上の非負値可測関数とし, $0 < T \leq \infty$ とする. このとき, $\mathbb{R}_+^N \times (0, T)$ 上の非負値可測関数 u が次をみたすとき u は問題 (P) の $\mathbb{R}_+^N \times (0, T)$ における解であるという:

- (i) $u \in L^\infty(0, T; L^\infty(\mathbb{R}_+^N))$;
- (ii) ほとんど至る所の $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$ と全ての $x_N \geq 0, t \in (0, T)$ に対して次が成立する.

$$\begin{aligned} u(x', x_N, t) &= [S(t)\varphi](x) + [(-\Delta_D)^{-1}u(t)^p](x) \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}_+^N} \mathcal{P}(x' - y', x_N + y_N, t - s)u(y, s)^p dy ds. \end{aligned} \quad (2.2)$$

特に $T = \infty$ のとき, u は問題 (P) の時間大域解であるという. また, 問題 (P) の $\mathbb{R}_+^N \times (0, T)$ における解 u が問題 (P) の $\mathbb{R}_+^N \times (0, T)$ における全ての解 $\tilde{u}$ に対して $u(x', x_N, t) \leq \tilde{u}(x', x_N, t)$ をみたすとき, u を問題 (P) の $\mathbb{R}_+^N \times (0, T)$ における最小解という.

この解表示 (2.2) は次の考察から得られる. φ を 適当な可積分条件をみたす $\mathbb{R}^{N-1}$ 上の連続関数とし, u を問題 (P) の古典解とする. このとき,

$$v(x, t) := [(-\Delta_D)^{-1}u(t)^p](x)$$

とすると, 適当な可積分条件の下で, v は

$$-\Delta v = u^p, \quad x \in \mathbb{R}_+^N, \quad t > 0, \quad v = 0, \quad x \in \partial\mathbb{R}_+^N, \quad t > 0$$

の古典解となる. この解 v と問題 (P) の解 u に対して, $w := u - v$ とすると, w は

$$\begin{cases} -\Delta w = 0, & x \in \mathbb{R}_+^N, \quad t > 0, \\ \partial_t w - \partial_{x_N} w = \partial_{x_N} v, & x \in \partial\mathbb{R}_+^N, \quad t > 0, \\ w(x, 0) = \varphi(x') \geq 0, & x = (x', 0) \in \partial\mathbb{R}_+^N \end{cases}$$

をみたす. ここで, w は (2.1) を用いると

$$w(x, t) = [S(t)\varphi](x) + \int_0^t [S(t-s)\partial_{x_N} v(s)](x) ds$$

で与えられる. 一方, 直接計算より,

$$\partial_{x_N} v(x', 0, t) = \int_{\mathbb{R}_+^N} \mathcal{P}(x' - y', y_N, 0) u(y, t)^p dy$$

となるので, ポアソン核の半群性を用いることにより解表示 (2.2) を得る.

2.2. 臨界指数と定常問題との関係性

上記の解の定義の下で, まず可解性に関する臨界指数と, 定常問題の解との関係性に関して次の結果を得た.

定理 1 $N \geq 2$ とし, $p_* := (N+1)/(N-1)$ と定める. φ を $\mathbb{R}^{N-1}$ 上の非自明な非負値可測関数とし, $p > 1$ とする. このとき以下が成立する.

- (i) $1 < p \leq p_*$ のとき, 問題 (P) の非自明な時間局所解は存在しない.
- (ii) $p > p_*$ のとき, 十分小さい初期値に対して, 問題 (P) の非自明な時間大域解が存在する.

また, 次の (a), (b), (c) は同値である.

- (a) 問題 (P) の非自明な時間局所解が存在する.
- (b) 問題 (P) の非自明な時間大域解が存在する.
- (c) 次の半線形楕円型方程式の境界値問題

$$(E_1) \quad -\Delta v = v^p \quad \text{in } \mathbb{R}_+^N, \quad v = \varphi \geq 0 \quad \text{on } \partial\mathbb{R}_+^N$$

の非負値解が存在する.

さらに, もし $u = u(x, t)$ と $v = v(x)$ がそれぞれ問題 (P) と問題 (E₁) の最小解ならば, ほとんど至る所の $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$ と全ての $x_N \geq 0, t > 0$ に対して $u(x', x_N, t) = v(x', x_N + t)$ が成立する.

注意 1 (i) 定理 1 において, $\mathbb{R}_+^N$ 上の非負値可測関数 $v \in L^\infty(\mathbb{R}_+^N)$ が問題 (E₁) の解であるとは, ほとんど至る所の $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$ と全ての $x_N \geq 0$ に対して,

$$v(x) = [S(0)\varphi](x) + [(-\Delta_D)^{-1}v^p](x) \tag{2.3}$$

をみたすことである.

(ii) 定理 1 (ii) における初期値の大きさに関する条件は自己相似変換に対して不変である. また, このとき, 構成される時間大域解は (2.1) の積分核である $N - 1$ 次元ポアソン核の定数倍に収束する. ([8, 定理 1.2] および [9, 定理 1.1] 参照.)

(iii) 定理 1 の可解性に関する同値性については, より一般に非線形項 $f = f(u)$ に対して, f が u に関して非増加な連続関数でありかつ $f(0) \geq 0$ であるときに成立する. ([11, 定理 1.4] 参照.)

この結果から, (1) $p_* = (N + 1)/(N - 1)$ は時間大域可解性のみでなく, 時間局所可解性に関しても臨界指数, (2) 定常問題 (E_1) の可解性と問題 (P) の時間局所可解性の同値性, の 2 点が得られた. 特に (2) については, 半線形楕円型方程式の境界値問題 (E_1) の可解性に関して, 解の表示式 (2.2) を用いたいわゆる放物型方程式の局所存在理論が適用できることを意味しており, 楕円型方程式の可解性に関する新しい手法を示唆していると言える. また, 可解性に関する初期条件の空間遠方における減衰評価について, 次の結果が得られる.

定理 2 定理 1 と同様の仮定のもとで $p > p_*$ とする. このとき次が成立する.

(i) ψ を $\liminf_{|x'| \rightarrow \infty} |x'|^{-\frac{2}{p-1}} \psi(x') > 0$ をみたす非負値関数とする. このとき, 十分大きな定数 $\kappa > 0$ に対して, $\varphi(x') \geq \kappa \psi(x')$ であれば, 問題 (P) の非自明な時間局所解は存在しない.

(ii) 十分小さな定数 $k > 0$ に対して, $\varphi(x') \leq k(1 + |x'|)^{-\frac{2}{p-1}}$ であれば, 問題 (P) の非自明な時間大域解が存在する.

これにより, 問題 (P) の可解性に関して空間遠方での減衰評価は $|x'|^{-\frac{2}{p-1}}$ が臨界であることがわかる. また, 定理 1 の結果と合わせることで, 問題 (E_1) の境界条件に対しても, この評価が臨界であることがわかる. これらの結果を用いた楕円型方程式に関する結果については, 講演中に紹介する.

2.3. 定理の証明

定理 1 の証明は大きく分けて 3 段階で行う. まず, 時間大域非存在性については, 解の表示式 (2.2) と各項の非負値性, さらにポアソン核の半群性を用いることで, 全空間における半線形熱方程式に対する手法 (例えば [26, 27] を参照) を応用することで得られる. 次に小さな初期値に対する時間大域可解性については, 近似解を導入することで証明していく. それぞれの項を評価していく際に最も注意が必要な項は楕円型方程式に由来する $[(-\Delta_D)^{-1}u(t)^p](x)$ である. この項に対して全空間の Hardy-Littlewood-Sobolev の不等式をそのまま適用すると, 評価可能な下限を線形項 (2.1) の減衰評価から予想される臨界指数 p_* まで下げることができない. ここでは重み付きノルムを用いることで不等式を改良し, 下限を p_* まで下げることができ, 適切な臨界指数を得ることができる. また, 近似解の収束先に関して, 一般的には問題 (P) に対して, 解の一意性は期待できないが, 最小解の一意性を用いることでこの問題を回避する. 最後に可解性に関する同値性については, 問題 (E_1) の最小解 $v(x)$ に対して, $v(x', x_N + t)$ が問題 (P) の時間大域解となることを示すことがポイントとなる. これに対しては, 次の動的境界条件付き調和関数に関する Phragmén-Lindelöf の定理が鍵となる. (より一般の方程式に対しては [18] を参照.)

命題 1 $\sigma > 0$ とする. $u = u(x, t)$ は, 任意の $t \in (0, \sigma]$ に対して $u(\cdot, t) \in C^2(\mathbb{R}_+^N) \cap C^1(\overline{\mathbb{R}_+^N})$ かつ $u \in C(\overline{\mathbb{R}_+^N} \times (0, \sigma])$, $\partial_t u \in C(\partial\mathbb{R}_+^N \times (0, \sigma])$ であり,

$$-\Delta u \geq 0 \quad \text{in } \mathbb{R}_+^N \times (0, \sigma], \quad \partial_t u + \partial_\nu u \geq 0 \quad \text{on } \partial\mathbb{R}_+^N \times (0, \sigma]$$

をみたすとする. このとき, u が任意の $L > 0$ に対して

$$\liminf_{t \rightarrow +0} \inf_{|x'| < L} u(x', 0, t) \geq 0 \quad \text{かつ} \quad \limsup_{R \rightarrow \infty} \inf_{|x|=R, t \in (0, \sigma]} \frac{u(x, t)}{1 + x_N} \geq 0$$

であれば, $\mathbb{R}_+^N \times (0, \sigma]$ において $u \geq 0$ である.

この命題 1 を用いることで, $\mathbb{R}_+^N$ 上の非負値可測関数 f に対して,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^N} G(x', x_N + t, y) f(y) dy &= \int_{\mathbb{R}_+^N} G(x, y) f(y', y_N + t) dy \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}_+^N} \mathcal{P}(x' - y', x_N + y_N, t - s) f(y', y_N + s) dy ds \end{aligned}$$

を示すことができ, これと (2.1), (2.3) を合わせることで, $v(x', x_N + t)$ が問題 (P) の時間大域解になることがわかる. 定理 2 については, 初期条件に関する評価と解の表示式 (2.2) を元に, 解の各点評価を用いることで示されるが, それぞれの項を積分核の減衰評価に注意しながら領域を細分化することによって評価する ([10] 参照).

3. 単位球の外部領域の場合

次に, 半空間以外の非有界領域として, 単位球の外部領域の場合について考察する. $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^N : |x| > 1\}$ とし, ここでは $N > 2$ とする. この場合, 半空間の場合とは異なり, フーリエ変換と調和拡張を用いて基本解を得ることはできないが, 単位球におけるポアソン核を元に, 本問題の基本解を構成することができる. 実際, $P = P(x, y)$ を単位球におけるポアソン核, $K = K(x, y)$ を P の x に関する Kelvin 変換とする. この K に対して, $\mathcal{K}(x, y, t) := K(e^t x, y)$ とおくと, $\mathcal{K}$ は Ω における動的境界条件付きラプラス方程式の基本解となる. よって, この基本解と Ω における斉次ディリクレ境界条件下でのラプラシアングリーン関数を用いることにより, 半空間の場合と同様に問題 (P) の解を積分方程式として定義することができる. この解の定義の下で, 問題 (P) に対して次の結果を得た.

定理 3 ([12]) $N > 2$ とし, $p^* := N/(N-2)$ と定める. φ を $\mathbb{R}^{N-1}$ 上の非自明な非負値可測関数とし, $p > 1$ とする. このとき以下が成立する.

(i) $1 < p \leq p^*$ のとき, 問題 (P) の非自明な時間局所解は存在しない.

(ii) $p > p^*$ とする. このとき以下が成立する.

(a) ψ を $\partial\Omega$ 上の非自明な非負値関数とする. このとき, 十分大きな定数 $\mu > 0$ に対して, $\varphi(x') \geq \mu\psi(x')$ であれば, 問題 (P) の非自明な時間局所解は存在しない.

- (b) $\varphi \in L^\infty(\partial\Omega)$ とする. このとき, $\|\varphi\|_{L^\infty(\partial\Omega)}$ が十分小さいならば, 問題 (P) の非自明な時間大域最小解 u が存在して,

$$\operatorname{ess\,sup}_{t>0} \left[e^{(N-2)t} \|u(t)\|_{L^\infty(\partial\Omega)} + e^{(N-2)t} \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |x|^{N-2} |u(x, t)| \right] < \infty$$

をみたす.

また, 次の (a), (b) は同値である.

- (a) 問題 (P) の非自明な時間局所解が存在する.
(b) 問題 (P) の非自明な時間大域解が存在する.

さらに, もし半線形楕円型方程式の境界値問題

$$(E_2) \quad -\Delta v = v^p \quad \text{in } \Omega, \quad v = \varphi \geq 0 \quad \text{on } \partial\Omega$$

の非負値解 v が存在するならば, 問題 (P) の非自明な時間大域解 u が存在し, ほとんど至る所の $x \in \Omega$ および $t > 0$ に対して $u(x, t) \leq v(e^t x)$ が成立する.

この定理 3 より, 半空間との違いとして, (1) 単位球の外部領域については $p^* = N/(N-2)$ が可解性に関する臨界指数, (2) 時間大域解の時間に関する減衰評価は多項式減衰ではなく指数減衰, の 2 点が得られた. 単位球の外部領域については, 定常問題 (E_2) の可解性と問題 (P) の可解性の同値性は得られないが, 半空間の場合と同様に, Phragmén-Lindelöf の定理を用いることで, 問題 (E_2) の可解性と問題 (P) の非線形項を u^p から $e^{2t}u^p$ に置き換えた場合, 即ち問題 (P) の優解の可解性が同値になることが示される.

4. 熱方程式の場合

これまで扱ってきた問題 (P) は, 内部での拡散が境界上での拡散に比べて非常に早い場合の極限を考察していることに相当している. 本節では, より一般の状況下での拡散現象を表す動的境界条件付き非線形熱方程式を扱うための準備として, 次の半空間における動的境界条件付き熱方程式

$$(H) \quad \varepsilon \partial_t u_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon = 0, \quad x \in \mathbb{R}_+^N, \quad t > 0, \quad \partial_t u_\varepsilon + \partial_\nu u_\varepsilon = 0, \quad x \in \partial\mathbb{R}_+^N, \quad t > 0$$

を考察する. ここで $N \geq 2$ であり, $\varepsilon \in (0, 1)$ とする. また, 初期条件は領域内部および境界上でそれぞれ $\varphi = \varphi(x)$, $\varphi_b = \varphi_b(x')$ とする. この問題 (H) に対して我々は時間大域解の構成と拡散極限 ($\varepsilon \rightarrow 0$) による解の挙動を考察する. 動的境界条件を持つ問題に対する同様の研究としては, eikonal 方程式に対する [2] や完全非線形放物型方程式に対する [15] が挙げられるが, これらは共に粘性解の枠組みで扱われている. ここでは, 問題 (P) に対するアプローチをもとに, 次の方程式系を考察する.

$$(S) \quad \begin{cases} \varepsilon \partial_t v_\varepsilon = \Delta v_\varepsilon - \varepsilon F_1[\varphi_b] - \varepsilon F_2[v_\varepsilon], & \Delta w_\varepsilon = 0, & x \in \mathbb{R}_+^N, \quad t > 0, \\ v_\varepsilon = 0, \quad \partial_t w_\varepsilon - \partial_{x_N} w_\varepsilon = \partial_{x_N} v_\varepsilon, & & x \in \partial\mathbb{R}_+^N, \quad t > 0, \\ v_\varepsilon(x, 0) = \varphi(x) - [S(0)\varphi_b](x), & & x \in \mathbb{R}_+^N, \\ w_\varepsilon(x, 0) = \varphi_b(x'), & & x = (x', 0) \in \partial\mathbb{R}_+^N. \end{cases}$$

ここで,

$$F_1[\varphi_b](x, t) := \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \partial_t \mathcal{P}(x' - y', x_N, t) \varphi_b(y') dy',$$

$$F_2[v](x, t) := [S(0) \partial_{x_N} v(t)](x) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \partial_t \mathcal{P}(x' - y', x_N, t - s) \partial_{x_N} v(y', 0, s) dy' ds$$

である. この $v_\varepsilon, w_\varepsilon$ をそれぞれポアソン核と半空間における熱核を用いて積分方程式として記述することにより次の結果を得た.

定理 4 ([13]) $N \geq 2, \varepsilon \in (0, 1), \varphi \in L^\infty(\mathbb{R}_+^N), \varphi_b \in L^\infty(\mathbb{R}^{N-1})$ とする. このとき, 問題 (S) の一意な時間大域解 $(v_\varepsilon, w_\varepsilon)$ が存在し, 任意の $T > 0$ に対して,

$$\sup_{0 < t < T} \left[\|v_\varepsilon(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+^N)} + (\varepsilon^{-1}t)^{\frac{1}{2}} \|\partial_{x_N} v_\varepsilon(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+^N)} + \|w_\varepsilon(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+^N)} \right] < \infty$$

が成立する. さらに, $u_\varepsilon = v_\varepsilon + w_\varepsilon$ は問題 (H) の古典解であり, 任意のコンパクト集合 $K \subset \mathbb{R}_+^N$ と $0 < \tau_1 < \tau_2 < \infty$ に対して,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\tau_1 < t < \tau_2} \|u_\varepsilon(t) - S(t)\varphi_b\|_{L^\infty(K)} = 0$$

が成立する.

定理 4 から, 拡散極限を考えると, 問題 (H) の解 u_ε は動的境界条件付きラプラス方程式の解に収束することがわかる. このとき, 領域内部における初期値 φ の情報が失われていることに注意する. これにより, 非線形項がない場合については問題 (H) と動的境界条件付きラプラス方程式について, 拡散極限という視点で関係付けることができた. 今後の課題としては, 解の漸近挙動や非線形問題への応用が挙げられる.

参考文献

- [1] H. Amann and M. Fila, A Fujita-type theorem for the Laplace equation with a dynamical boundary condition, *Acta Math. Univ. Comenianae* 66 (1997), 321–328.
- [2] E. S. Al-Aidarous, E. O. Alzahrani, H. Ishii and A. M. Younas, Asymptotic analysis for the eikonal equation with the dynamical boundary conditions, *Math. Nachr.* 287 (2014), 1563–1588.
- [3] I. Bejenaru, J. I. Díaz and I. I. Vrabie, An abstract approximate controllability result and applications to elliptic and parabolic systems with dynamic boundary conditions, *Electron. J. Differ. Equ.* 2001 (2001), 1–19.
- [4] J. Crank, *The Mathematics of Diffusion*, Clarendon Press, Oxford, second edition (1975).
- [5] A. Constantin and J. Escher, Global solutions for quasilinear parabolic problems, *J. Evol. Equ.* 2 (2002), 97–111.
- [6] J. Escher, Nonlinear elliptic systems with dynamic boundary conditions, *Math. Z.* 210 (1992), 413–439.
- [7] M. Fila, K. Ishige and T. Kawakami, Convergence to the Poisson kernel for the Laplace equation with a nonlinear dynamical boundary condition, *Commun. Pure Appl. Anal.* 11 (2012), 1285–1301.
- [8] M. Fila, K. Ishige and T. Kawakami, Large-time behavior of solutions of a semilinear elliptic equation with a dynamical boundary condition, *Adv. Differential Equations* 18 (2013), 69–100.

- [9] M. Fila, K. Ishige and T. Kawakami, Large-time behavior of small solutions of a two-dimensional semilinear elliptic equation with a dynamical boundary condition, *Asymptotic Analysis* 85 (2013), 107–123.
- [10] M. Fila, K. Ishige and T. Kawakami, Existence of positive solutions of a semilinear elliptic equation with a dynamical boundary condition, *Calc. Var. PDE* 54 (2015), 2059–2078.
- [11] M. Fila, K. Ishige and T. Kawakami, Minimal solutions of a semilinear elliptic equation with a dynamical boundary condition, *J. Math. Pures Appl.* 105 (2016), 788–809.
- [12] M. Fila, K. Ishige and T. Kawakami, An exterior nonlinear elliptic problem with a dynamical boundary condition, *Rev. Mat. Complutense* 30 (2017), 281–312.
- [13] M. Fila, K. Ishige and T. Kawakami, The large diffusion limit for the heat equation with a dynamical boundary condition, preprint.
- [14] M. Fila and P. Poláčik, Global nonexistence without blow-up for an evolution problem, *Math. Z.* 232 (1999), 531–545.
- [15] Y. Giga and N. Hamamuki, On a dynamic boundary condition for singular degenerate parabolic equations in a half space, preprint.
- [16] C. G. Gal and M. Meyries, Nonlinear elliptic problems with dynamical boundary conditions of reactive and reactive-diffusive type, *Proc. Lond. Math. Soc.* 108 (2014), 1351–1380.
- [17] T. Hintermann, Evolution equations with dynamic boundary conditions, *Proc. R. Soc. Edinburgh Sect. A* 113 (1989), 43–60.
- [18] K. Ishige and K. Nakagawa, The Phragmén-Lindelöf theorem for a fully nonlinear elliptic problem with a dynamical boundary condition, *Geometric properties for parabolic and elliptic PDE's*, Springer Proc. Math. Stat. 176 (2016), 159–171.
- [19] M. Kirane, Blow-up for some equations with semilinear dynamical boundary conditions of parabolic and hyperbolic type, *Hokkaido Math. J.* 21 (1992), 221–229.
- [20] M. Kirane, E. Nabana and S. I. Pokhozhaev, The absence of solutions of elliptic systems with dynamic boundary conditions, *Differ. Equ.* 38 (2002), 808–815; translation from *Differ. Uravn.* 38 (2002), 768–774.
- [21] M. Kirane, E. Nabana and S. I. Pokhozhaev, Nonexistence of global solutions to an elliptic equation with nonlinear dynamical boundary condition, *Bol. Soc. Paran. Mat.* 22 (2004), 9–16.
- [22] M. Koleva and L. Vulkov, Blow-up of continuous and semidiscrete solutions to elliptic equations with semilinear dynamical boundary conditions of parabolic type, *J. Comput. Appl. Math.* 202 (2007), 414–434.
- [23] J.-L. Lions, *Quelques Méthodes de Résolutions des Problèmes aux Limites Non Linéaires*, Dunod, Paris (1969).
- [24] J. L. Vázquez and E. Vitillaro, Heat equation with dynamical boundary conditions of reactive type, *Commun. Partial Differ. Equations* 33 (2008), 561–612.
- [25] E. Vitillaro, On the Laplace equation with non-linear dynamical boundary conditions. *Proc. Lond. Math. Soc.* 93 (2006), 418–446.
- [26] F. B. Weissler, Local existence and nonexistence for a semilinear parabolic equations in L^p , *Indiana Univ. Math. J.*, Vol. 29 (1980), 79–102.
- [27] F. B. Weissler, Existence and nonexistence of global solutions for a semilinear heat equation, *Israel J. Math.*, Vol. 38 (1981), 29–40.
- [28] Z. Yin, Global existence for elliptic equations with dynamic boundary conditions, *Arch. Math.* 81 (2003), 567–574.