

## 特別講演

# Bose-Einstein 凝縮モデルにおける温度効果

福泉 麗佳 (東北大学大学院情報科学研究科)\*

## 1. 序

この講演では、正の温度を持つ Bose-Einstein 凝縮のモデル方程式として使用されている以下の方程式について考える。

$$\begin{cases} dX &= (i + \gamma)(HX + \eta X - \lambda|X|^2 X)dt + \sqrt{2\gamma}dW, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \\ X(0) &= X_0. \end{cases} \quad (1)$$

ここで、 $V(x) = |x|^2$  とし、 $H = \Delta - V(x)$ ,  $\gamma > 0$ ,  $\eta \geq 0$  である。未知関数  $X$  はフィルトレーション  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  を備えた確率空間  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  上の複素数値確率場である。確率過程  $(W(t))_{t \geq 0}$  は  $L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$  上の  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -柱状 Wiener 過程、つまり時空ホワイトノイズとする。

この方程式は、絶対零度での Bose-Einstein 凝縮のモデル方程式に熱的效果としてノイズと散逸項を付加したものであり、凝縮体周辺の非凝縮粒子と凝縮体の相互作用 ([1]) や、(ノイズの前の係数を変化させることで) 急冷クエンチによる渦生成 ([10]) の観察に使用されている。[8] では、 $V \equiv 0$  の場合に熱 (Gibbs) 平衡状態を調べ、相転移温度の周辺において相転移分類を行っている。この講演では、これらの物理的背景を動機とした、方程式 (1) の数学的な研究結果<sup>1</sup>を紹介する。特に、時間無限大で解の分布が Gibbs 分布に指数的に収束すること、つまり、((1) の係数  $\gamma$  のバランスでは、) 相転移が起らないことを厳密に証明する。

## 2. 先行結果と主定理

以降、常に  $d = 1$  とする。作用素  $H$  の固有関数 (エルミート関数) を  $\{h_n\}_{n \geq 0}$  とすると  $Hh_n = -\lambda_n^2 h_n$ ,  $\lambda_n = \sqrt{2n+1}$  であり、 $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  の正規直交基底となっている。

まずは、方程式 (1) の局所解の存在結果から紹介する。

**命題 1.**  $\gamma > 0$ ,  $\eta \geq 0$ ,  $\lambda = 1$ ,  $p \geq 3$  とする。また 任意の  $T > 0$  を固定する。 $X_0 \in L^p(\mathbb{R})$  とする。このとき停止時刻  $T^* = T_{X_0, \omega}^* > 0$  と、 $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -適合した方程式 (1) の一意解  $X(\cdot) \in C([0, T^*), L^p(\mathbb{R}))$  が存在し、次のいずれかが成立する:  $T^* = T$  または  $\limsup_{t \rightarrow T^*} |X(t)|_{L^p(\mathbb{R})} = +\infty$ 。

この命題は  $\lambda = -1$  の場合も成立するが、ここでは  $\lambda = 1$  の場合だけ考える。次に解を大域化したい。そのためにまずは、方程式 (1) が不変 Gibbs 測度を持つことを示す。Gibbs 測度とは形式的には正規化定数の差を除いて、

$$\rho(du) = e^{-S(u)} du$$

本研究は科研費 (課題番号:15K04944,16KT0127) の助成を受けたものである。

\* e-mail: fukuizumi@math.is.tohoku.ac.jp

<sup>1</sup> A. de Bouard 氏 (Ecole Polytechnique) と A. Debussche 氏 (ENS, Rennes) との共同研究に基づく

の形で書けるものである．ここで  $S$  は  $\gamma = 0$  の場合のハミルトニアン, つまり

$$S(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |(-H)^{1/2} u|^2 dx - \frac{\eta}{2} \int_{\mathbb{R}} |u|^2 dx + \frac{\lambda}{4} \int_{\mathbb{R}} |u|^4 dx,$$

である．Gibbs 測度  $\rho$  は方程式 (1) の時間発展に関する不変測度であることが期待される．この不変性を用いて, 測度  $\rho$  に関してほとんどすべての初期値, つまり  $\rho$ -a.e.  $X_0$  に対して (1) の大域解を得る:

**定理 1.**  $\gamma > 0, \eta \geq 0, \lambda = 1, p \geq 3$  とする． $\rho$ -可測集合  $\mathcal{O} \subset L^p(\mathbb{R})$  が存在して, 次の (1) と (2) を満たす．

(1)  $\rho(\mathcal{O}) = 1$ ,

(2)  $X_0 \in \mathcal{O}$  に対して, 方程式 (1) の一意解  $X(\cdot) \in C([0, \infty), L^p(\mathbb{R}))$  が存在する．

さらに, 測度  $\rho$  は方程式 (1) の推移半群  $(P_t)_{t \geq 0}$  に対して不変である．

定理 1 によって, 推移半群  $(P_t)_{t \geq 0}$  は任意の  $t \geq 0$  と  $p \geq 3$  に対し,  $L^2((L^p(\mathbb{R}), d\rho), \mathbb{R})$  上で意味を持ち, 連続であることがわかる．実は,  $p \geq 3$  に対して,  $P_t$  は  $L^p$  上の Borel 有界関数の集合上で定義でき, 強 Feller 性と既約性を持つことがわかる．その結果として, 以下の定理が得られる．

**定理 2.**  $\gamma > 0, \eta \geq 0, \lambda = 1, p \geq 3$  とする．任意の  $X_0 \in L^p(\mathbb{R})$  に対して, 方程式 (1) の一意解  $X(\cdot) \in C([0, \infty), L^p(\mathbb{R}))$  が存在する．

最後に, 方程式 (1) の複素係数部を除いた方程式

$$dY = \gamma(HY + \eta Y - \lambda|Y|^2 Y)dt + \sqrt{2\gamma}dW \quad (2)$$

を仲介させることによって, 定理 1 で大域的に定義された解の分布が指数的に時間無限大で Gibbs 分布に従うことが得られる．

**定理 3.**  $\gamma > 0, \eta \geq 0, \lambda = 1, p \geq 3$  とする．さらに  $\phi \in L^2((L^p, d\rho), \mathbb{R})$  とし,  $\bar{\phi}^\rho = \int_{L^p} \phi(y) d\rho(y)$  とおく．このとき  $u(t, \cdot) := P_t \phi(\cdot)$  は  $t \rightarrow \infty$  のとき,  $L^2((L^p, d\rho), \mathbb{R})$  の意味で指数的に  $\bar{\phi}^\rho$  へ収束する, より正確には,

$$\int_{L^p} |u(t, y) - \bar{\phi}^\rho|^2 d\rho(y) \leq e^{-2\gamma t} \int_{L^p} |\phi(y) - \bar{\phi}^\rho|^2 d\rho(y)$$

が成り立つ．

**注 2.1.** より一般の非線形項  $|X|^{2\sigma} X$  の場合は, これらの定理が  $p > 2$  かつ  $p \geq 2\sigma + 1$  という条件で成り立つ．Doob の定理 ([7]) により, 強 Feller 性と既約性から測度  $\rho$  の一意性が従う．

関連した先行結果を述べる．Barton-Smith [2] が,  $V \equiv 0$ , 任意の空間次元  $d$ , Dirichlet 有界領域  $D$  上で (1) を考え,  $L^p(D)$  ( $p \geq 2$ ) での大域解の存在, かつ不変測度の存在と一意性を  $\lambda = \pm 1$  の場合に示している．しかしながら, 大域解を得るために散逸係数  $\gamma$  の大きさに制限がかかり, また, 得られた不変測度が Gibbs 測度であるという議論はなく, 不変測度への収束も示していない．近年, Carlen-Fröhlich-Lebowitz [5] によって  $V \equiv 0, \lambda = -1$  の場合, 1次元周期境界条件とノイズにある程度の滑らかさの仮定のもと, 方程式 (1) の線形部分を改変したモデルに対して, 対応する Gibbs 測度の構成とその測度への指数収束が示されている．

この講演で紹介する手法は,  $\lambda = 1$  かつ空間1次元というシンプルな場合ではあるが, 先行結果の Gibbs 分布への収束証明等を簡素化し, 一括するものである. さらに, この結果により全ての  $\gamma > 0$  (かつ任意の初期値) に対して大域解を構成できることになる.

調和ポテンシャル  $V(x) = |x|^2$  を伴うことで, 対応する固有関数  $h_n$  の  $n$  に関する挙動が有界領域や周期境界条件の場合と比較して悪くなることから, Gibbs 測度のサポートは Banach 空間  $L^p$  ( $p > 2$ ) 上となり, 基本的に扱う空間が Hilbert 空間  $L^2$  である有界領域上や周期境界条件の場合 [2, 5] より数学的正当化は複雑である.

Burq-Thomann-Tzvetkov [4] では, ハミルトン系 ( $\gamma = 0$ ) で,  $V(x) = |x|^2$ ,  $d = 1$  の場合に Gibbs 測度を構成し, Gibbs 測度の不変性を利用してほとんどすべての初期値に対して正則性の低い Sobolev 空間で解の大域存在を証明している. この  $\gamma = 0$  の場合の結果をしばしば活用する. 実際, 上述の定理 1 では, [4] で構成された Gibbs 測度  $\rho$  が方程式 (1) の時間発展に対する不変測度でもあることを確認することからはじまる.

このアブストラクトには, 鍵となるアイデアを最も簡単な形で解説することを試みる. 以下で紹介する形式的な計算を厳密に正当化するためには次のような有限次元近似を使用する.

$$dX = (i + \gamma)(HX + \eta S_N X - \lambda S_N(|S_N X|^2 S_N X))dt + \sqrt{2\gamma} \Pi_N dW, \quad X(0) \in E_N \quad (3)$$

ここで,  $E_N$  はエルミート関数で張られた複素ベクトル空間  $E_N = \text{span}\{h_0, h_1, \dots, h_N\}$  であり,  $\Pi_N$  は  $E_N$  上への射影作用素で  $\|\Pi_N\|_{\mathcal{L}(L^2, L^2)} \leq 1$  を満たす.  $S_N$  も  $E_N$  上への射影であるが,

$$S_N\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n h_n\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \chi\left(\frac{2n+1}{2N+1}\right) c_n h_n = \chi\left(\frac{H}{2N+1}\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n h_n\right), \quad c_n \in \mathbb{C}$$

で定義されるものである. ただし,  $\chi$  は cut-off 関数で  $\chi \in C_0^\infty(-1, 1)$ , かつ  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  上で  $\chi = 1$  を満たすものとする. [4] により, すべての  $p \in [1, \infty]$  に対して  $S_N$  は  $L^p$  から  $L^p$  への,  $N$  について一様な, 有界作用素であることがわかっている.

また, 簡単のため,  $\eta = 0$  の場合のみ考え, 3.7 節に,  $\eta > 0$  の場合に採用するアイデアを少し述べるにとどめる. 一般空間次元の場合は Renormalization を用いた, より洗練された解析が必要となる.

### 3. 証明の概略

以降,  $\lambda = 1$  を代入して述べる.

#### 3.1. Gibbs 測度

まずは, 上で形式的に述べた Gibbs 測度を正確に定義する.

$$\begin{aligned} \rho(du) &= \Gamma^{-1} e^{-S(u)} du \\ &= \Gamma^{-1} e^{-\frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}} |u|^4 dx} e^{-\frac{1}{2} ((-\partial_x^2 + x^2)u, u)_{L^2}} du \end{aligned}$$

の線形部分に相当する後方部は,  $u = \sum_{k=0}^N (a_k + ib_k) h_k$ ,  $(a_k, b_k) \in \mathbb{R}^2$  に対して, 有限次元空間上のガウス測度

$$\mu_N(du) = \prod_{k=0}^N \frac{\lambda_k^2}{2\pi} e^{-\frac{\lambda_k^2}{2} (a_k^2 + b_k^2)} da_k db_k$$

を分布を持つランダム級数

$$\varphi_N(\omega, x) = \sum_{k=0}^N \frac{\sqrt{2}}{\lambda_k} g_k(\omega) h_k(x), \quad (g_k \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, 1), \text{ 独立}) \quad (4)$$

の  $L^2(\Omega, L^p(\mathbb{R}, \mathbb{C}))$  ( $p > 2$ ) での収束先  $\varphi := \lim_{N \rightarrow \infty} \varphi_N$  によって生成される  $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  ( $p > 2$ ) 上の測度  $\mu$  として定義する:

$$\mu(du) = e^{-\frac{1}{2}((-\partial_x^2 + x^2)u, u)_{L^2}} du.$$

これにより, 任意の  $p > 2$  に対して,  $\text{supp} \mu \subset L^4 \cap L^p$  なので, ( $\lambda = 1$  のおかげで)  $\exp(-\frac{1}{4}|u|_{L^4}^4) \in L^1(L^p, d\mu)$ , したがって上の  $\rho$  は意味を持ち,  $\Gamma = \int_{L^p} e^{-\frac{1}{4}|u|_{L^4}^4} \mu(du)$  である. この,  $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{C}), p > 2$  という空間は以下の考察からも見ることができる.

$$dZ = (i + \gamma)(\partial_x^2 - x^2)Zdt + \sqrt{2\gamma}dW$$

の定常解を  $Z_\infty(t)$  と書くことにする. つまり,

$$Z_\infty(t) = \sqrt{2\gamma} \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)(i+\gamma)(-\partial_x^2 + x^2)} dW(s),$$

であり, すべての  $t$  で常に分布が同じである. これを記号で  $\mathcal{L}(Z_\infty(t)) = \mathcal{L}(Z_\infty(0))$  と書く. 今,  $Z_\infty(t)$  を基底  $\{h_k\}_{k \geq 0}$  を用いて表現すると,

$$Z_\infty(t) = \sqrt{2\gamma} \sum_{k \in \mathbb{N}} \left( \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)(i+\gamma)\lambda_k^2} d\beta_k(s) \right) h_k$$

となり,

$$\mathcal{L}\left(\sqrt{2\gamma} \int_{-\infty}^0 e^{s(i+\gamma)\lambda_k^2} d\beta_k(s)\right) = \mathcal{N}_{\mathbb{C}}\left(0, \frac{2}{\lambda_k^2}\right)$$

であるから, 上述の級数表示 (4) と比較すると  $Z_\infty(t)$  の分布はガウス測度  $\mu$  と等しいことがわかる. 上の具体表示により,  $Z_\infty$  はガウス型確率変数であることから正の整数  $m$  に対して,

$$\mathbb{E}(|Z_\infty(t, x)|^{2m}) \leq C_m \mathbb{E}(|Z_\infty(t, x)|^2)^m \leq C_m \left( \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{|h_k(x)|^2}{\lambda_k^2} \right)^m$$

と評価できるので,  $2m \geq p$  を満たす  $p$  に対して, Minkowski の不等式によって

$$|Z_\infty(t)|_{L_{\omega}^{2m}(L_x^p)} \leq C_m \left| \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{|h_k(x)|^2}{\lambda_k^2} \right|_{L_x^{p/2}}^{1/2} \leq C_m \left( \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{|h_k(x)|_{L_x^p}^2}{\lambda_k^2} \right)^{1/2}$$

がわかる. 右辺に現れた  $|h_k|_{L^p}$  の  $\lambda_k$  に関するオーダーは Koch-Tataru [9] の結果と補間不等式によって以下ようになる.

$$|h_k|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C_p \lambda_k^{-\frac{1}{6}\theta(p)},$$

ただし,

$$\theta(p) = \begin{cases} 1 & \text{if } p \geq 4, \\ 2 - \frac{4}{p} & \text{if } 2 \leq p \leq 4. \end{cases}$$

$\lambda_k^2 = 2k + 1$  であったので, 最右辺の無限級数が収束するためには  $p > 2$ , すなわち, 任意の  $m \geq p/2 > 1$  に対して,  $Z_\infty \in L^{2m}(\Omega; L^p)$ . つまり  $Z_\infty \in L^p$  a.s. であり,  $p > 2$  に対して  $\rho(L^p) = 1$  が従う.

注 3.1. 同様の計算により, Kolmogorov テストから,

$$\sup_{t \in [0, T]} |Z(t)|_{L^p} \leq M_{T,p} \quad a.s. \quad (5)$$

も従う.

### 3.2. 局所解の構成

$v$  を以下の方程式の解とする.

$$\partial_t v = (i + \gamma)(\partial_x^2 v - x^2 v - |v + Z_\infty|^2(v + Z_\infty)), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

求めたい解は  $X = v + Z_\infty$  と書けるので  $v$  が時間局所的に存在することがいえればよい. Mehler の公式により線形部分の半群が以下のような評価式を満たすことは容易にわかる. 十分小さい  $t > 0$  に対して,

$$|e^{t(i+\gamma)(\partial_x^2 - x^2)} f|_{L^r(\mathbb{R})} \leq C t^{-\frac{1}{2l}} |f|_{L^s(\mathbb{R})}, \quad 0 \leq \frac{1}{r} \leq \frac{1}{r} + \frac{1}{l} = \frac{1}{s} \leq 1.$$

縮小写像を作る際に非線形項を取り扱うことから  $p \geq 3$  という条件が必要になるが  $T^* > 0$  が存在して,  $X \in C([0, T^*), L^p)$  が示せる.

注 3.2. ここで, 解を大域化しようと考えた場合, エネルギー法による  $L^p$  の *a priori* 評価を導出することも可能であるが, パラメータ  $\gamma$  に制限がかかる ([2]). したがって, ここではすべての  $\gamma > 0$  に対して大域化を行う方法を考える. それが不変測度を用いる方法である.

### 3.3. Gibbs 測度の不変性

Gibbs 測度が方程式 (1) の時間発展に対する不変測度であることを形式的に計算してみる. 実際には有限次元近似が必要である. まずは方程式 (1) を以下の形に書く.

$$dX = -J \nabla_X S(X) dt - \gamma \nabla_X S(X) dt + \sqrt{2\gamma} dW, \quad X(0) = y$$

ここで,

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

方程式 (1) の推移半群を  $P_t$  とする. すなわち,  $\phi \in C_b(L^p)$  に対して,  $P_t \phi(y) = \mathbb{E}(\phi(X(t, y)))$  とする.  $P_t^* \rho = \rho$  が成り立つとき,  $\rho$  は不変測度であるという. 今,  $\mathcal{L}$  を推移半群  $P_t$  の生成作用素とすると,

$$\mathcal{L}\phi(y) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P_t \phi(y) - \phi(y)}{t}.$$

であるので,  $\rho$  が不変であることを確認するためには

$$\int_{L^p} (\mathcal{L}\phi)(y) \rho(dy) = 0 \quad (6)$$

を示せばよい. 一方で,  $\mathbb{E}(\phi(X(t, y)))$  に伊藤の公式を使うことで

$$(\mathcal{L}\phi)(y) = \gamma \Delta_y \phi(y) - \gamma (\nabla_y \phi(y), \nabla_y S(y))_{L^2} - (\nabla_y \phi(y), J \nabla_y S(y))_{L^2}$$

と具体形がわかる. これを (6) に代入し, 部分積分と  $\text{Tr}(\nabla_y J \nabla_y) = 0$  から,

$$\begin{aligned} & \int_{L^p} (\mathcal{L}\phi)(y) \rho(dy) \\ &= \int_{L^p} \left[ \gamma \Delta_y \phi(y) - \gamma (\nabla_y \phi(y), \nabla_y S(y))_{L^2} - (\nabla_y \phi(y), J \nabla_y S(y))_{L^2} \right] e^{-S(y)} dy \\ &= \gamma \int_{L^p} \Delta_y \phi(y) e^{-S(y)} dy + \gamma \int_{L^p} \left( \nabla_y \phi(y), \nabla_y (e^{-S(y)}) \right)_{L^2} dy \\ & \quad - \int_{L^p} \left( \nabla_y \phi(y), J \nabla_y (e^{-S(y)}) \right)_{L^2} dy = 0. \end{aligned}$$

注 3.3.  $-J \nabla_X S(X) dt$  の項がない方程式 (2) に対しても  $\rho$  が同様に不変測度であることがわかる.

### 3.4. ほとんどすべての初期値に関する解の大域化

この節のアイデアは元来 Bourgain [3] が提唱したものであるが, Da Prato-Debussche [6] に従って, 確率偏微分方程式の解の大域化に応用する.

$T > 0$ ,  $p \geq 3$  としたとき, ある定数  $C_T > 0$  が存在して

$$\int_{L^p} \mathbb{E} \left( \sup_{t \in [0, T^*)} |X(t, X_0)|_{L^p} \right) \rho(dX_0) \leq C_T$$

が成立することを形式的に見る.(実際には再び有限次元近似で正当化する必要がある.) この事実が示せると,

$$\rho(X_0 \in L^p; \sup_{t \in [0, T^*)} |X(t, X_0)|_{L^p} < +\infty) = 1$$

が従う. 方程式 (1) を mild form で書くと,

$$\begin{aligned} X(t) &= e^{t(i+\gamma)(\partial_x^2 - x^2)} X_0 - e^{t(i+\gamma)(\partial_x^2 - x^2)} Z_\infty(0) \\ & \quad + \int_0^t e^{(t-s)(i+\gamma)(\partial_x^2 - x^2)} (|X|^2 X)(s) ds + Z_\infty(t). \end{aligned}$$

性質 (5) から,

$$\begin{aligned} & \int_{L^p} \mathbb{E} \left( \sup_{t \in [0, T^*)} |X(t, X_0)|_{L^p} \right) d\rho(X_0) \\ & \leq C \int_{L^p} \mathbb{E} |X_0|_{L^p} d\rho(X_0) + C \mathbb{E} \int_{L^p} \int_0^T |X(s, X_0)|_{L^{3p}}^3 ds d\rho(X_0) + M_{T,p}. \end{aligned}$$

ここで,  $\rho$  の不変性を用いると

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{L^p} \mathbb{E} |X(s, X_0)|_{L^{3p}}^3 d\rho(X_0) ds &= \int_0^T \int_{L^p} |X_0|_{L^{3p}}^3 d\rho(X_0) ds \\ &\leq \int_0^T \int_{L^p} |X_0|_{L^{3p}}^3 d\mu(X_0) ds. \end{aligned}$$

$\mathcal{L}(Z_\infty(s)) = \mu$  であるので, 右辺は  $\int_0^T \mathbb{E} (|Z_\infty(s)|_{L^{3p}}^3) ds$  に等しく, 再び (5) により, ある定数  $C_T$  で押さえられることがわかる.

### 3.5. Gibbs 測度への収束性

$\gamma > 0$  とする. 解分布の収束には Poincaré 不等式: 任意の  $\phi \in C_b^1(L^p)$  対して,

$$\int_{L^p} |\nabla_y \phi(y)|_{L^2}^2 d\rho(y) \geq \int_{L^p} |\phi(y) - \bar{\phi}^\rho|^2 d\rho(y) \quad (7)$$

を使用する. ここで,  $\bar{\phi}^\rho = \int_{L^p} \phi(y) d\rho(y)$  としたが  $\bar{\phi}^\rho = 0$  としても一般性を失わない. さて, この不等式 (7) が成立すると仮定する.  $u(t, y) = P_t \phi(y)$  とし,  $P_t$  の生成作用素を  $\mathcal{L}$  とすると, 3.3 節と同様の計算から  $\mathcal{L}$  は  $\mathcal{L}u^2(y) = 2\gamma |\nabla_y u(y)|_{L^2}^2 + 2u(y)(\mathcal{L}u)(y)$  を満たし, 測度  $\rho$  の不変性から

$$0 = 2\gamma \int_{L^p} |\nabla_y u|_{L^2}^2 d\rho(y) + \frac{d}{dt} \int_{L^p} |u(t)|^2 d\rho(y).$$

したがって (7) により,  $\frac{d}{dt} |u(t)|_{L^2(L^p, d\rho)}^2 \leq -2\gamma |u|_{L^2(L^p, d\rho)}^2$ , つまり,  $|u(t)|_{L^2(L^p, d\rho)} \leq e^{-\gamma t} |\phi|_{L^2(L^p, d\rho)}$ . ただし, この計算も形式的であり, 有限次元近似により正当化する.

**注 3.4.** Poincaré 不等式は測度の性質のみを表しているので, (1) を介して証明する必要はなく, 同じ不変測度  $\rho$  を持っている (2) を介して示せばよい. 方程式 (2) の性質は非常に良く調べられており (例えば [7]), 対応するハミルトニアン中の非線形ポテンシャル項が今の場合凸なので, Poincaré 不等式が成り立つということは知られている.

### 3.6. 任意の初期値に対する解の大域化

次に, 任意の初期値に対して解を大域化する方法を紹介する. Coupling 法により次の命題が示せる.

**命題 2.** (強フェラー性)  $\gamma > 0$ ,  $p \geq 3$  とする. 任意の  $\phi \in \mathcal{B}_b(L^p(\mathbb{R}))$  と任意の  $t > 0$  に対して,  $P_t \phi$  は  $L^p(\mathbb{R})$  上の連続関数である. さらに, 任意の  $T > 0$  に対して, 定数  $c_\gamma(T)$  が存在して, すべての  $X_0 + h \in \mathcal{O}$  を満たす  $X_0 \in \mathcal{O}$  と  $h \in L^p(\mathbb{R})$  について

$$|P_T \phi(X_0 + h) - P_T \phi(X_0)| \leq c_\gamma(T) \|\phi\|_{L^\infty(L^p)} \left( T^{-1+\frac{1}{p}} + 1 \right) (|X_0|_{L^p(\mathbb{R})} + 1)^2 |h|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

が成立する.

この命題から  $P_t$  は  $\mathcal{O}$  上だけでなく  $L^p$  全体で定義され, また,  $Z_\infty$  の既約性から  $\mathcal{O}$  は  $L^p$  で稠密である. Prokhorov, Skorohod の定理により, 確率空間  $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$  が存在しその上で定義されたマルチンゲール解  $\tilde{X}(t, X_0)$  があって,  $P_t \phi(X_0) = \tilde{\mathbb{E}}(\phi(\tilde{X}(t, X_0)))$  が任意の  $t > 0$  に対して成立. ここで,

**命題 3.** (既約性) 推移半群  $(P_t)_{t \geq 0}$  は  $L^p(\mathbb{R})$  上で既約である. すなわち,  $L^p$  のどんな空でない開集合  $B$  に対しても  $\tilde{\mathbb{P}}(\tilde{X}(t, X_0) \in B) > 0$ .

と組み合わせると, Doob の定理から 任意の  $t_0 > 0$ ,  $X_0 \in L^p$  に対して,  $\tilde{\mathbb{P}}(\tilde{X}(t_0, X_0) \in \mathcal{O}) = \rho(\mathcal{O}) = 1$ . したがって,  $\sup_{t \in [t_0, T]} |\tilde{X}(t, X_0)|_{L^p} < \infty, \tilde{\mathbb{P}} - a.s.$  一方で命題 1 からある時間  $\tau^*(X_0) > 0$  が存在して,  $\sup_{t \in [0, \tau^*]} |\tilde{X}(t, X_0)|_{L^p} < \infty, \tilde{\mathbb{P}} - a.s.$  2 つ合わせて  $\tilde{X}(t, X_0)$  が大域的に存在することになる. 最後に Yamada-Watanabe の定理から,  $\tilde{X}(t, X_0)$  は  $C([0, T], L^p)$  での一意な (確率論の意味での) 強解となる.

### 3.7. $\eta > 0$ の場合

$\eta < 1 = \lambda_0^2$  の場合は  $-\partial_x^2 + x^2 - \eta$  は正定値のままなので、線形部分に取り込んでしまえば今までと同じように Gibbs 測度が定義でき、Poincaré の不等式も問題ない。  $\eta \geq 1$  の場合は線形部分に取り込むことが難しいので、非線形項として扱うが、Poincaré 不等式を成立させるため、ハミルトニアン中の非線形ポテンシャルを凸の部分と有界な部分とに分けることで攻略する。具体的には、

$$\begin{aligned} S(u) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |(-\partial_x^2 + x^2)^{1/2} u|^2 dx - \frac{\eta}{2} \int_{\mathbb{R}} |u|^2 dx + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}} |u|^4 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |(-\partial_x^2 + x^2)^{1/2} u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}} F_1(x, |u(x)|^2) dx + \int_{\mathbb{R}} F_2(x, |u(x)|^2) dx, \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} F_1(x, y) &:= \begin{cases} \frac{1}{4}y^2 - \frac{\eta}{2}y, & y \geq \eta \\ \theta(x)(\frac{1}{4}y^2 - \frac{\eta}{2}y) + (1 - \theta(x))(-\frac{\eta^2}{4}), & 0 \leq y < \eta \end{cases} \\ F_2(x, y) &:= \frac{1}{4}y^2 - \frac{\eta}{2}y - F_1(x, y), \end{aligned}$$

$$\theta \in C^\infty, \quad \theta \in [0, 1], \quad \theta(x) = 1 \quad \text{if} \quad |x| \geq \sqrt{2\eta}, \quad \theta(x) = 0 \quad \text{if} \quad |x| \leq \sqrt{3\eta/2}$$

とすると、 $F_1(x, y)$  は  $y \in \mathbb{R}^+$  について凸関数、 $F_2(x, y)$  はすべての  $y \in \mathbb{R}^+$ ,  $x \in \mathbb{R}$  に対して有界となる。

### 参考文献

- [1] P.B. Blakie, A.S. Bradley, M.J. Davis, R.J. Ballagh and C.W. Gardiner, “Dynamics and statistical mechanics of ultra-cold Bose gases using c-field techniques,” *Advances in Physics*. **57** (2008) no.5, 363-455.
- [2] M. Barton-Smith, “Invariant measure for the stochastic Ginzburg Landau equation,” *Nonlinear differ. equ. appl.* **11** (2004) 29-52.
- [3] J. Bourgain, “Periodic nonlinear Schrödinger equation and invariant measures,” *Commun. Math. Phys.* **166** (1994) 1-26.
- [4] N. Burq, L. Thomann and N. Tzvetkov, “Long time dynamics for the one dimensional nonlinear Schrödinger equation,” *Ann. Inst. Fourier(Grenoble)*. **63** (2013) no.6, 2137-2198.
- [5] E.A. Carlen, J. Fröhlich and J. Lebowitz, “Exponential relaxation to equilibrium for a one-dimensional focusing non-linear Schrödinger equation with noise,” *Commun. Math. Phys.* **342** (2016) 303-332.
- [6] G. Da Prato and A. Debussche, “Strong solutions to the stochastic quantization equations,” *The Annals of Probability*. **31** (2003) no.4, 1900-1916.
- [7] G. Da Prato and J. Zabczyk, “Ergodicity for infinite dimensional systems,” *London Mathematical Society Lecture Note Series* 229; Cambridge University Press, 1996.
- [8] M. Kobayashi and L. F. Cugliandolo, “Quench dynamics of the three-dimensional U(1) complex field theory: geometric and scaling characterisation of the vortex tangle,” *Phys. Rev. E* **94** (2016) 062146.
- [9] H. Koch and D. Tataru, “ $L^p$  eigenfunction bounds for the Hermite operator,” *Duke Math. J.* **128** (2005) 369-392.
- [10] C.N. Weiler et al. “Spontaneous vortices in the formation of Bose-Einstein condensates,” *Nature* **455** (2008) nature07334.