Capelli恒等式と概均質ベクトル空間のb-関数

和地　輝仁　(北海道教育大学 教育学部)*

概　　要

本講演では、概均質ベクトル空間のb-関数を求めるという視点から、いくつかのCapelli恒等式を見る。Capelliの Capelli恒等式の復習の後、放物型概均質ベクトル空間に関係する奇数型Capelli恒等式や、簡約ではない概均質ベクトル空間に関係する、成分に0を含むCapelli恒等式と、b-関数の計算を紹介する。

1. 序

Capelli恒等式は、変数を成分とする行列Xの行列式$\det(X)$のb-関数を計算することを1つの目的として成立した。その後、リー環の表現論との深いつながりが理解されるようになり、1991年のHoweと梅田の共著論文 [5] において、抽象Capelli問題の提示と完全な解決という形で一段落することとなった。ここに、抽象Capelli問題とは、リー環$\mathfrak{g}$のベクトル空間V上の線型表現$\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$があったとき、$\mathfrak{g}$の普遍包絡環の中心$ZU(\mathfrak{g})$が、$\rho$ (の普遍包絡環への拡張) によりV上の不変微分作用素環の上へ全射で写っているかどうかという問題である。本講演では、不変微分作用素をリー環の作用で表す等式、あるいは、それに類する等式をCapelli恒等式と呼ぶことにする。

行列式の場合を例にとると、Xの変数を偏微分作用素に置き換えたものを$\frac{\partial}{\partial X}$と表したとき、$\det(X)\det(\frac{\partial}{\partial X})$ は、一般線型群の作用に関して不変微分作用素になる。この場合は抽象Capelli問題が成立しているので、不変微分作用素$\det(X)\det(\frac{\partial}{\partial X})$が一般線型リー環の普遍包絡環の中心の元で表せることになり、計算がかなり容易になる。このことを用いると$\det(X)$のb-関数の計算が実行できる、というのが、Capelli恒等式を用いてb-関数を計算する仕組みである。Howe-梅田以降もCapelli恒等式の表現論的視点からの研究、例えば、普遍包絡環の中心の構造と関連した研究は進展している ([3] [4] [6] [7] [8] [9] [10] [11] [12] [15] [16] [17] [28])。

他方、概均質ベクトル空間のb-関数の計算は、Capelli恒等式を利用して計算できるものもあったが、それよりも、概均質ベクトル空間における関数等式を用いて計算したり、超局所解析を用いて計算することが多かった。そもそも、一般の概均質ベクトル空間では抽象Capelli問題が成立しないことが殆どである。

しかし、ある概均質ベクトル空間において抽象Capelli問題が不成立であっても、b-関数の計算に有用なCapelli恒等式は存在し、それを用いてb-関数が計算できる場合がある。そういうわけで、抽象Capelli問題は完全に解決されているものの、b-関数を計算するためのCapelli恒等式を調べる動機がある。また、Capelli恒等式だけではなく、b-関数も表現論的に意味を持つ場合があることが知られており、(例えば、冪零根基の軌道との関係 [22] [23] [25] や、一般Verma加群との関係 [1] [2] [20] [26] [27]) 本講演では、Capelli自身のCapelli恒等式の復習から始めて、特にb-関数を計算する立場から

2010 Mathematics Subject Classification: 11S90; 17B10, 17B35, 16S32, 15A15, 16G20
キーワード：prehomogeneous vector space, b-function, Capelli identity, universal enveloping algebra
* 085-8580 北海道釧路市城山１丁目１５－５５北海道教育大学
e-mail: wachi.akihito@k.hokkyodai.ac.jp

Capelli 恒等式をいくつか紹介する。簇に付随する概均質ベクトル空間の b-関数を求めることができる「奇数型」Capelli 恒等式、さらに、これを一般化した、放物型概均質ベクトル空間の b-関数を求めることができる Capelli 恒等式、簡約ではないリー環の概均質ベクトル空間における b-関数における「成分に 0 を含む」Capelli 恒等式などを紹介する。

2. Capelli 恒等式と b-関数

まず、Capelli の Capelli 恒等式を復習したい。

$$X = (X_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$$

を、変数を成分に持つ $n \times n$ 行列とし、

$$\frac{\partial}{\partial X} = \left(\frac{\partial}{\partial X_{ij}} \right)_{1 \leq i,j \leq n}$$

を偏微分作用素を成分に持つ $n \times n$ 行列とする。このとき、多項式係数微分作用素環の中の等式として、次が成り立つ。

$$\det({}^tX) \det\left(\frac{\partial}{\partial X} \right) = \det\left({}^tX \frac{\partial}{\partial X} + \begin{pmatrix} n-1 & & & \\ & n-2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \right) \tag{1}$$

ここに、${}^tX \frac{\partial}{\partial X}$ は $n \times n$ 行列 2 つの積である。また、det は行列式であり、左辺では成分が可換であるから曖昧さはないが、右辺においては成分が非可換なので次のように定める。

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) A_{\sigma(1),1} A_{\sigma(2),2} \cdots A_{\sigma(n),n}$$

これを列行列式 (column determinant) と呼ぶ。Capelli 恒等式の右辺には対角行列 (対角シフトと呼ばれる) が現れているが、仮にこれがなければ、成分が可換の場合に成立している行列式の積公式 $\det(A)\det(B) = \det(AB)$ に一致していることに注意しておく (この解釈のため左辺の $\det(X)$ は $\det({}^tX)$ にしてある)。また、列行列式の代わりに、行の添字を対称群で回して定義される行行列式を採用すると、この対角行列の対角成分が $(0, 1, \ldots, n-1)$ に変わることも注意しておく。

行列 X が対称行列の場合の Capelli 恒等式は、Turnbull [24] により得られている。

本講演では触れないが、Capelli は Capelli 恒等式の「小行列式版」も与えている。これは一般線型リー代数の普遍包絡環の中心の生成元を与えることがわかる。同様の等式は、直交リー代数や斜交リー代数でも存在する ([28], [10], [11], [15])。また、他の Capelli 恒等式にもほとんどの場合「小行列式版」があるが、それも本講演では触れないことにする。

次に、Capelli 恒等式を用いた b-関数の計算について復習する。まず、一般に多項式 $f \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots, x_m]$ の b-関数 (佐藤-Bernstein 関数) とは、

$$P.f^{s+1} = b(s) f^s \tag{2}$$

を満たすようなモニックで最小次数の多項式 $b(s) \in \mathbb{C}[s]$ のことである。ここに、P は多項式係数微分作用素であり、一般には s に依存する。b-関数はどんな多項式に対して

も存在することが知られており、また、b-関数の零点は負の有理数であるという著しい性質が、柏原 [14] により示されている。行列式の b-関数の場合に話を戻すと、

$$\det\left(\frac{\partial}{\partial X}\right).\det(X)^{s+1} = b(s)\det(X)^s \tag{3}$$

を満たすような $b(s)$ が、$\det(X)$ の b-関数である。ここに、左辺のドットは微分作用素として作用する意味である。式 (2) における微分作用素 P が、定数係数で s に依存しない $\det(\frac{\partial}{\partial X})$ にとれることは、まったく自明ではないが、これについては後述する。式 (3) の両辺に (左から) $\det(X)$ を掛けて、式 (1) を用いると、

$$\det\left({}^tX\frac{\partial}{\partial X} + \begin{pmatrix} n-1 & & & \\ & n-2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}\right).\det(X)^{s+1} = b(s)\det(X)^{s+1} \tag{4}$$

を得る。式 (3) よりも式 (4) の方が、微分を実際に計算する際、はるかに計算が容易である。実際、行列 ${}^tX\frac{\partial}{\partial X}$ の (i,j) 成分は、

$$\left({}^tX\frac{\partial}{\partial X}\right)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} X_{ki}\frac{\partial}{\partial X_{kj}}$$

であるが、これは、X の第 j 列の変数を第 i 列の変数に変えるような導分であるから、$i \neq j$ の場合 $\det(X)^{s+1}$ を 0 にし、結局式 (4) の左辺の微分作用素は対角成分しか寄与がない。そして ${}^tX\frac{\partial}{\partial X}$ の (i,i) 成分は X の第 i 列の変数に関する次数作用素だから、$\det(X)^{s+1}$ 上の作用は $(s+1)$ 倍の掛け算作用であり、対角シフトの分も合わせると、

$$\begin{aligned} b(s) &= (s+1+(n-1))(s+1+(n-2))\cdots(s+1+0) \\ &= (s+n)(s+n-1)\cdots(s+1) \end{aligned}$$

がわかる。

対角成分しか寄与がないことの表現論的な別の説明にも触れておく。X に対する右からの $GL_n(\mathbb{C})$ の掛け算により、$GL_n(\mathbb{C})$ は X_{ij} を変数とする多項式環に作用するが、${}^tX\frac{\partial}{\partial X}$ の (i,j) 成分は、この作用を微分した $\mathfrak{gl}_n$ の作用を考えたとき、(i,j) 成分のみ 1 であるような行列単位 $E_{ij} \in \mathfrak{gl}_n$ の作用に一致している。ところが、$\det(X)^{s+1}$ は 1 次元の $GL_n(\mathbb{C})$-加群を張っているから、E_{ij} $(i \neq j)$ はウェイトを変えるためゼロ作用であり、従って ${}^tX\frac{\partial}{\partial X}$ は対角成分しか寄与がないことがわかる。対角成分の作用は、微分を計算せずともウェイトの計算だけで求まる。

3. 概均質ベクトル空間

ここまでは $\det(X)$ の b-関数の話に終始したが、これを一般化した話をするために、概均質ベクトル空間とその相対不変式の定義を復習する。簡単のため体は $\mathbb{C}$ を考える。

Definition 1. G を代数群、$\rho : G \to GL(V)$ を G の有限次元ベクトル空間 V 上の有理表現とする。三つ組 (G,ρ,V) が概均質ベクトル空間であるとは、V 上にザリスキ稠密な G-軌道があることを言う *(*ザリスキ開としても同値な定義*)*。開軌道の補集合 S を特異集合と呼ぶ。

このとき、多項式 $f \in \mathbb{C}[V]$ が、群 G のある指標 *(1*次元表現*)* $\chi : G \to \mathbb{C}^\times$ により、

$$f(\rho(g)x) = \chi(g)f(x) \quad (g \in G)$$

を満たすとき、f を相対不変式と呼ぶ。

概均質ベクトル空間 (G, ρ, V) の特異集合 S の余次元が 1 であるとする。このとき、S の既約成分 $S_1, S_2, \ldots, S_r$ の定義多項式 $f_1, f_2, \ldots, f_r \in \mathbb{C}[V]$ は、相対不変式であり、すべての相対不変式は $cf_1^{m_1} f_2^{m_2} \cdots f_r^{m_r}$ $(c \in \mathbb{C},\, m_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ の形で書けることが知られている。$f_1, f_2, \ldots, f_r$ は基本相対不変式と呼ばれる。

G が簡約群の場合は次の事実が知られており、式 (2) における P を s に依存しない定数係数微分作用素でとることができる。

Proposition 2. (G, ρ, V) が概均質ベクトル空間で、G を簡約群であるとする。V の基底を $\rho(G)$ の行列表現が転置共役で閉じているようにとり、その基底の座標関数を $x_1, x_2, \ldots, x_n$ とする。このとき、相対不変式 $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}[V]$ の b-関数 $b(s)$ は、

$$f\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) . f(x_1, x_2, \ldots, x_n)^{s+1} = b(s) f(x_1, x_2, \ldots, x_n)^s \tag{5}$$

で与えられる。ただし、左辺の微分作用素は、f の変数に対応する偏微分作用素を代入して得られる定数係数偏微分作用素である。

前述の Turnbull の恒等式では、変数に単に対応する偏微分作用素を代入するのではなく、その定数倍を代入することになるが、上の命題で指定されている基底の取り方が違うという説明ができる。あるいは、元を辿れば斜交リー代数にルート系に長いルートと短いルートがあるからという説明もできる。

概均質ベクトル空間の b-関数は、概均質ベクトル空間の関数等式に現れるなど重要な量である。b-関数を求める方法としては、単に微分が計算できればそれでもよいが、一般には困難なので、Capelli 恒等式を用いて計算したり超局所解析を用いてホロノミー図形から計算したりする方法がある。最近では、これらの他にも有用な方法が発見されている (佐藤文広-杉山 [19])。いつも Capelli 恒等式で計算できるわけではない理由を次の節で見る。

4. 抽象 Capelli 問題

概均質ベクトル空間の b-関数が、いつも Capelli 恒等式で計算できるわけではない理由は、式 (5) における G-不変微分作用素 (左辺の f^{s+1} のうち 1 乗分をドットを越えて作用素の方へ移動して得られる不変微分作用素) $f(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}) f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ が、G の作用の微分で書けるとは限らないからである。その場合、第 2 節最後の段落で述べたような表現論的な手法が使えない。このような、特定の不変微分作用素を G の作用の微分で書く問題を具象 Capelli 問題と呼ぶ。

また、すべての不変微分作用素が G のリー環 $\mathfrak{g}$ の普遍包絡環の中心 $ZU(\mathfrak{g})$ の作用で書けるかという問題を、抽象 Capelli 問題と呼ぶ。抽象 Capelli 問題が肯定的に成立している概均質ベクトル空間では、Capelli 恒等式を用いて b-関数を容易に計算できることが保証されていると言える。

抽象 Capelli 問題が肯定的に成立していれば、中心の像である不変微分作用素環は可換環になるが、不変微分作用素環は可換環になる表現は、無重複表現である。ここに、(G, ρ, V) が無重複表現であるとは、G の自然な $\mathbb{C}[V]$ 上の表現を既約分解したとき、重複度が 1 (または 0) であることを言う。そして、Kac [13] により分類が得られている既約無重複表現に対して、抽象 Capelli 問題が成立するか否かをすべて解決したのが Howe-梅田 [5] である。さらに、b-関数の計算に必要な具象 Capelli 問題も解いている。

従って、概均質ベクトル空間のb-関数をCapelli恒等式を用いて計算するという課題は、ある意味Howe-梅田で終わっているとも言える。

しかし、既約ではない場合や、不変微分作用素がリー環から来ていないがb-関数が計算できる場合など、抽象Capelli問題に決着が着いた後もCapelli恒等式でb-関数を計算することには意義がある。逆に、Capelli恒等式でb-関数が計算できたとき、それは意味のある等式であると考えるのが自然である。

5. 奇数型Capelli恒等式

後に変数変換をする都合で文字を変えて、変数T_{ij}を成分に持つ$n \times n$行列$T = (T_{ij})$を考え、$\frac{\partial}{\partial T} = (\frac{\partial}{\partial T_{ij}})$を偏微分作用素を成分に持つ$n \times n$行列とする。通常のCapelli恒等式は2個の行列式の積公式の非可換版と思えたが、これを3個にした場合は次の等式が成立する。

$$\det\left(\frac{\partial}{\partial T}\right)\det({}^tT)\det\left(\frac{\partial}{\partial T}\right) = \det\left(\frac{\partial}{\partial T}{}^tT\frac{\partial}{\partial T}\right)$$

通常のCapelli恒等式にあった対角シフトがないことが見てすぐわかる特徴であるが、さらに、行列の積$\frac{\partial}{\partial T}{}^tT\frac{\partial}{\partial T}$の成分どうしは可換であることも証明できる。このように3個の積が現れるCapelli恒等式は、[26], [27] で現れており、一般Verma加群の既約性とb-関数との関連を説明していた。

実は、3個に限らず任意の奇数個に対して上と同様の等式が成立し、そこでは対角シフトはやはり現れず、奇数個の行列の積の成分どうしは可換である。このような等式を奇数型Capelli恒等式と呼ぶことにする。

奇数型Capelli恒等式はもう少し変形を考えることができるため、少し準備をする。

$$f = \det(T)$$

とおき、多項式係数微分作用素環$\mathbb{C}[T_{ij}]\langle\frac{\partial}{\partial T_{ij}}\rangle$を$f$で局所化した$\mathbb{C}[T_{ij}, f^{-1}]\langle\frac{\partial}{\partial T_{ij}}\rangle$を考える。この環において、

$$\frac{\partial}{\partial T}(u) = \frac{\partial}{\partial T} + \frac{u}{f}\frac{\partial f}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T} + u{}^tT^{-1} \tag{6}$$

と定める。ここに、$\frac{\partial f}{\partial T}$は

$$\frac{\partial f}{\partial T} = \left(\frac{\partial f}{\partial T_{ij}}\right)_{1\le i,j\le n}$$

で定める$n \times n$行列である。式(6)の2つ目の等号は、逆行列の余因子行列を用いた表示そのものである。この$\frac{\partial}{\partial T}(u)$は、

$${}^tT\frac{\partial}{\partial T}(u) = {}^tT\frac{\partial}{\partial T} + \begin{pmatrix} u & & \\ & u & \\ & & \ddots \\ & & & u \end{pmatrix}$$

であるから、対角シフトをずらす役割があるものである。また、

$$f^{-u}\frac{\partial}{\partial T}f^u = \frac{\partial}{\partial T}(u)$$

であるから、$\frac{\partial}{\partial T}(u)$の成分どうしは可換である。以上の準備により奇数型Capelli恒等式を完全な形で述べることができる。

Theorem 3 (和地 [29] [31])**.** 上の記号のもと次の等式が成立する。

$$\left|\frac{\partial}{\partial T}(u_1)\,{}^tT\frac{\partial}{\partial T}(u_2)\,{}^tT\cdots{}^tT\frac{\partial}{\partial T}(u_l)\right| = \left|\frac{\partial}{\partial T}(u_1)\right||{}^tT|\left|\frac{\partial}{\partial T}(u_2)\right||{}^tT|\cdots|{}^tT|\left|\frac{\partial}{\partial T}(u_l)\right|.$$

ここで、$|X|$ は $\det(X)$ を表し、$u_1, u_2, \ldots, u_l \in \mathbb{C}$ である。

また、上の式の左辺も右辺も $u_1, u_2, \ldots, u_l$ に関して対称であり、左辺の行列式の中の行列は成分どうしが可換である。

奇数型 Capelli 恒等式を用いて、ある可約概均質ベクル空間の b-関数を計算することができる。次のように G と V を定める。

$$G = GL(n_0;\mathbb{C}) \times \cdots \times GL(n_l;\mathbb{C}),$$
$$V = \mathrm{Mat}(n_0, n_1;\mathbb{C}) \oplus \mathrm{Mat}(n_1, n_2;\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Mat}(n_{l-1}, n_l;\mathbb{C}).$$

G の V 上の作用 ρ を $(g_0, \ldots, g_l) \in G$ と $(X^{(1)}, \ldots, X^{(l)}) \in V$ に対して、

$$\rho(g_0, g_1, \ldots, g_l)(X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(l)}) = (g_0X^{(1)}g_1^{-1}, g_1X^{(2)}g_2^{-1}, \ldots g_{l-1}X^{(l)}g_l^{-1})$$

と定めると、(G, ρ, V) は概均質ベクトル空間になることが知られている。この概均質ベクトル空間に基本相対不変式がいくつあるかは、V に現れる行列のサイズによって変わるが、$n_0 = n_l$ かつ、すべての $0 < r < l$ に対して $n_r > n_0$ であるとすると、

$$f = \det(X^{(1)}X^{(2)}\cdots X^{(l)}) \qquad (X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(l)}) \in V$$

で定義される多項式 f は基本相対不変式になる。一般の場合も (1 変数) b-関数の計算という意味では結局この場合に帰着される。

Proposition 4. 奇数型 *Capelli* 恒等式を用いると、f の b-関数は

$$b(s) = (s + n_1)^{(n_0)}(s + n_2)^{(n_0)}\cdots(s + n_l)^{(n_0)}$$

と計算される。ただし、$a^{(b)}$ は

$$a^{(b)} = a(a-1)(a-2)\cdots(a-b+1)$$

で定義される下降階乗冪である。

この結果は、佐藤-杉山 [19] の結果を用いて、杉山 [21] で既に計算された b-関数のうちの一例であり、奇数型 Capelli 恒等式を用いても計算できるということである。

この b-関数の、奇数型 Capelli 恒等式を用いた計算方法を簡単に説明する。まず、先の記号と同様に、$1 \le r \le l$ に対して、

$$\frac{\partial}{\partial X_{ij}^{(r)}}(u) = \frac{\partial}{\partial X_{ij}^{(r)}} + \frac{u}{f}\frac{\partial f}{\partial X_{ij}^{(r)}} \qquad \begin{pmatrix} 1 \le i \le n_{r-1} \\ 1 \le j \le n_r \end{pmatrix}$$

と定める。f の b-関数は、

$$\left|\frac{\partial}{\partial X^{(1)}}\frac{\partial}{\partial X^{(2)}}\cdots\frac{\partial}{\partial X^{(l)}}\right| . \left(\left|X^{(1)}X^{(2)}\cdots X^{(l)}\right|^{s+1}\right) \tag{7}$$

を計算すればよいが、

$$T = X^{(1)}X^{(2)}\cdots X^{(l)}$$

と置き変数変換をすると、式は(7)は次のように変形できることがわかる。

$$\left|\frac{\partial}{\partial T}(n_1-n_0)\ {}^tT\frac{\partial}{\partial T}(n_2-n_0)\ {}^tT\cdots{}^tT\frac{\partial}{\partial T}(n_l-n_0)\right|.(|T|^{s+1})$$

奇数型Capelli恒等式により、これは、

$$\left|\frac{\partial}{\partial T}(n_1-n_0)\right|\left|{}^tT\right|\left|\frac{\partial}{\partial T}(n_2-n_0)\right|\left|{}^tT\right|\cdots\left|{}^tT\right|\left|\frac{\partial}{\partial T}(n_l-n_0)\right|.(|T|^{s+1})$$

となり、右の方から順番に通常の行列式のb-関数を求める場合と同じ計算ができるから、対角シフトがずれていることにも注意すると、

$$(s+n_1)^{(n_0)}(s+n_2)^{(n_0)}\cdots(s+n_l)^{(n_0)}f^s$$

となり、b-関数が計算できる。

6. 多変数b-関数

前節の(G,ρ,V)は複数の基本相対不変式を持つことがあるが、杉山 [21] では、その場合の多変数b-関数も求めた(ただし、前節の概均質ベクトル空間は[21] で扱った概均質ベクトル空間のうちのごく一部にすぎない)。これも前節と同じ奇数型Capelli恒等式を用いて計算ができる。

まず、多変数b-関数の定義をする。(G,ρ,V)を簡約概均質ベクトル空間とし、基本相対不変式を$f_1,f_2,\ldots,f_p\in\mathbb{C}[V]$とする。このとき、多変数$b$-関数とは、

$$f_i^*(\partial).f_1^{s_1}\cdots f_i^{s_i+1}\cdots f_p^{s_p}=b_i(s_1,\ldots,s_p)f_1^{s_1}\cdots f_i^{s_i}\cdots f_p^{s_p}$$

で定義される$b_i(s_1,\ldots,s_p)$ $(i=1,2,\ldots,p)$ のことである。ただし、$f_i^*(\partial)$で、変数に対応する偏微分作用素を代入したものを表した。

前節の概均質ベクトル空間(G,ρ,V)

$$\begin{aligned}
&G=GL_{m_0}\times GL_{m_1}\times\cdots\times GL_{m_k},\\
&V=\mathrm{Mat}_{m_0,m_1}\oplus\mathrm{Mat}_{m_1,m_2}\oplus\cdots\oplus\mathrm{Mat}_{m_{k-1},m_k},\\
&\quad\rho(g_0,g_1,\cdots,g_k)(X_1,X_2,\cdots,X_k)=(g_0X_1g_1^{-1},g_1X_2g_2^{-1},\ldots,g_{k-1}X_kg_k^{-1})
\end{aligned}$$

の基本相対不変式は、

$$\det(X_cX_{c+1}\cdots X_d),\ \text{ただし}\ 1\le c\le d\le k,\ m_{c-1}=m_d,\ m_t>m_d\ (c\le t<d)$$

で与えられる。基本相対不変式をどの順序でも構わないので、$f_1,f_2,\ldots,f_p$と名付けると、次が得られる。これは杉山[21]が初めて計算した。詳細は省くが奇数型Capelli恒等式を用いても計算できる。

Proposition 5 (杉山 [21])**.** 上の (G,ρ,V) の多変数 b-関数は、

$$b_i(s_1,\dots,s_p)=\prod_{c=c_i}^{d_i}\prod_{j=1}^{m_{d_i}}\left(\left(\sum_{\substack{1\le l\le p,\\ f_l\supset X_c,\, m_{d_l}\ge j}} s_l\right)+m_c+1-j\right)$$

で与えられる。ここに、

$$f_i=\det(X_{c_i}X_{c_i+1}\cdots X_{d_i})$$

であり、$f_l\supset X_c$ は、X_c が f_l の定義に現れること、つまり、$c_i\le c\le d_i$ を意味する。

この b-関数は複雑に見える形をしているが、レース図形を用いて表示できることが杉山 [21] で示されている。以下にその例を示す。

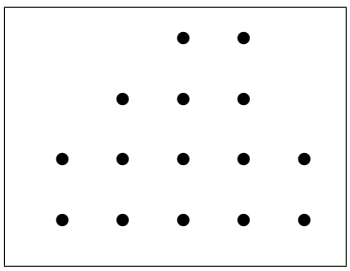
Example 6. (G,ρ,V) が、

$$\begin{aligned}&G=GL_2\times GL_3\times GL_4\times GL_4\times GL_2,\\ &V=\mathrm{Mat}_{2,3}\oplus\mathrm{Mat}_{3,4}\oplus\mathrm{Mat}_{4,4}\oplus\mathrm{Mat}_{4,2},\\ &\rho(g_0,g_1,g_2,g_3,g_4)(X_1,X_2,X_3,X_4)=(g_0X_1g_1^{-1},g_1X_2g_2^{-1},g_2X_3g_3^{-1},g_3X_4g_4^{-1})\end{aligned}$$

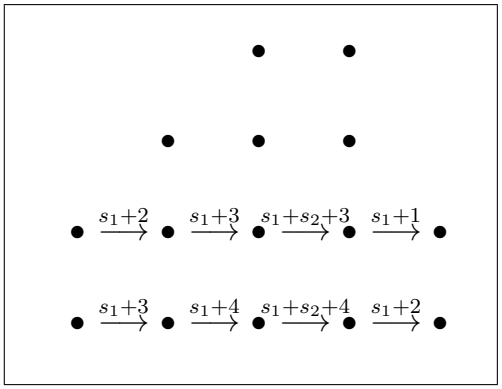
であるとき、基本相対不変式は、

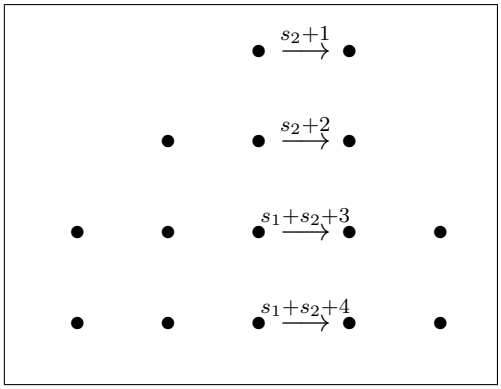
$$f_1=\det(X_1X_2X_3X_4),\quad f_2=\det(X_3)\quad((X_1,X_2,X_3,X_4)\in V)$$

である。レース図形を書くためには、まず群のサイズに合わせた個数の点を書く。



次に、各基本相対不変式に対し、行列式に現れる行列を写像と思って対応する列を結ぶ矢印を書き、それぞれの矢印の上に、s_1,s_2 の *1*次式を書く。f_1 と f_2 の両方にある矢印には s_1+s_2 を、片方にだけある矢印には s_1 または s_2 を割り当て、*1*次式の定数項は、矢印の先の点がその列の上から何番目かにより決める。下の左が f_1, 右が f_2 のレース図形である。





このとき、レース図形に現れた *1* 次式すべての積が、f_1 または f_2 の多変数 b-関数に一致する。

$$b_1(s_1,s_2)=(s_1+1)(s_1+2)^2(s_1+3)^2(s_1+4)(s_1+s_2+3)(s_1+s_2+4),$$
$$b_2(s_1,s_2)=(s_1+s_2+3)(s_1+s_2+4)(s_2+1)(s_2+2).$$

7. 放物型概均質ベクトル空間の b-関数

概均質ベクトル空間は分類が完全には完了していないため、どの範囲の概均質ベクトル空間に対して (例えば奇数型の) Capelli 恒等式を考えればきりがよいかという問題があるが、まずは手頃と思われるのが古典型の放物型概均質ベクトル空間である。これは、前節の概均質ベクトル空間を含み、表現論的にもまとまりのあるものである。

G を複素簡約リー群とし、$\mathfrak{g}$ をそのリー環とする。$\mathfrak{p}$ を $\mathfrak{g}$ の放物型部分代数とする。$\mathfrak{g}$ のカルタン部分代数 $\mathfrak{h}$, ルート系 Δ, 単純ルート系 Φ を、正ルート空間が $\mathfrak{p}$ に含まれるようにとる。Φ の部分集合 Φ_I を $\alpha\in\Phi$ であってルート空間 $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ が $\mathfrak{p}$ に含まれるもの全体の集合で定める。正整数 j に対して、$\mathfrak{g}$ の部分空間 $\mathfrak{g}_j$ を、正ルート $\alpha\in\Delta^+$ であって、単純ルートの和で書いたときに Φ_I のルートがちょうど j 個あるようなルートのルート空間の和で定め、$\mathfrak{g}_{-j}$ はその -1 倍のルートに対応するルート空間の和とし、$\mathfrak{g}_0$ は Φ_I を含まないルートのルート空間と $\mathfrak{h}$ の和で定める。すると、

$$\mathfrak{g}=\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}}\mathfrak{g}_j,\qquad\qquad \mathfrak{p}=\bigoplus_{j\geq 0}\mathfrak{g}_j$$

である。G_0 を G の部分群であって、$\mathfrak{g}_0$ をリー環に持つものとすると、$(G_0,\mathrm{Ad},\mathfrak{g}_1)$ は概均質ベクトル空間になることが知られている。これを、放物型概均質ベクトル空間と呼ぶ。

古典型の放物型概均質ベクトル空間と基本相対不変式を以下に記す。

(1) A 型と B 型から得られるもの

$$G_0=GL_{m_0}\times GL_{m_1}\times\cdots\times GL_{m_k},$$
$$\mathfrak{g}_1=\mathrm{Mat}_{m_0,m_1}\oplus\mathrm{Mat}_{m_1,m_2}\oplus\cdots\oplus\mathrm{Mat}_{m_{k-1},m_k},$$
$$\rho(g_0,g_1,\cdots,g_k)(X_1,X_2,\cdots,X_k)=(g_0X_1g_1^{-1},g_1X_2g_2^{-1},\ldots,g_{k-1}X_kg_k^{-1}).$$

基本相対不変式は、

$$\det(X_cX_{c+1}\cdots X_d),\ \text{ただし}\ 1\leq c\leq d\leq k,\ m_{c-1}=m_d,\ m_t>m_d\ (c\leq t<d).$$

(2) C 型から得られるもの

$$G_0=GL_{q_1}\times GL_{q_2}\times\cdots\times GL_{q_k}\times Sp_{2q_{k+1}},$$
$$\mathfrak{g}_1=\mathrm{Mat}_{q_1,q_2}\oplus\mathrm{Mat}_{q_2,q_3}\oplus\cdots\oplus\mathrm{Mat}_{q_k,2q_{k+1}},$$
$$\rho(g_1,g_2,\ldots,g_{k+1})(X_1,X_2,\ldots,X_k)=(g_1X_1g_2^{-1},g_2X_2g_3^{-1},\ldots,g_kX_kg_{k+1}^{-1}).$$

基本相対不変式は、

$$\mathrm{pf}(X_c\cdots X_k\begin{pmatrix}0 & 1_{q_{k+1}}\\ -1_{q_{k+1}} & 0\end{pmatrix}{}^t(X_c\cdots X_k))$$
$$(1\le c\le k,\ q_c\text{: 偶数},\ q_t>q_c\ (c<t\le k),\ 2q_{k+1}>q_c),$$
$$\det(X_cX_{c+1}\cdots X_d)$$
$$(1\le c\le d\le k,\ q_c=q_{d+1}\ (d=k\text{のときは}q_c=2q_{k+1}),\ q_t>q_c\ (c<t\le d)).$$

(3) C型から得られるもの

$$G_0=GL_{q_1}\times GL_{q_2}\times\cdots\times GL_{q_{k+1}},$$
$$\mathfrak{g}_1=\mathrm{Mat}_{q_1,q_2}\oplus\mathrm{Mat}_{q_2,q_3}\oplus\cdots\oplus\mathrm{Mat}_{q_k,q_{k+1}}\oplus\mathrm{Sym}_{q_{k+1}},$$
$$\rho(g_1,g_2,\dots,g_{k+1})(X_1,X_2,\dots,X_k,S)$$
$$=(g_1X_1g_2^{-1},g_2X_2g_3^{-1},\dots,g_kX_kg_{k+1}^{-1},g_{k+1}S\,{}^tg_{k+1}).$$

基本相対不変式は、

$$\det(S)\text{ and }\det(X_c\cdots X_kS\,{}^t(X_c\cdots X_k))\qquad(1\le c\le k,\ q_t>q_c\ (c<t\le k+1)),$$
$$\det(X_cX_{c+1}\cdots X_d)\qquad(1\le c\le d\le k,\ q_c=q_{d+1},\ q_t>q_c\ (c<t\le d)).$$

(4) D型とB型から得られるもの

$$G_0=GL_{q_1}\times GL_{q_2}\times\cdots\times GL_{q_k}\times O_{q_{k+1}},$$
$$\mathfrak{g}_1=\mathrm{Mat}_{q_1,q_2}\oplus\mathrm{Mat}_{q_2,q_3}\oplus\cdots\oplus\mathrm{Mat}_{q_k,q_{k+1}},$$
$$\rho(g_1,g_2,\dots,g_{k+1})(X_1,X_2,\dots,X_k)=(g_1X_1g_2^{-1},g_2X_2g_3^{-1},\dots,g_kX_kg_{k+1}^{-1}).$$

基本相対不変式は、

$$\det(X_c\cdots X_k\,{}^t(X_c\cdots X_k))\qquad(1\le c\le k,\ q_t>q_c\ (c<t\le k+1)\ ),$$
$$\det(X_cX_{c+1}\cdots X_d)\qquad(1\le c\le d\le k,\ q_c=q_{d+1},\ q_t>q_c\ (c<t\le d)).$$

(5) D型から得られるもの

$$G_0=GL_{q_1}\times GL_{q_2}\times\cdots\times GL_{q_k}\times GL_{q_{k+1}},$$
$$\mathfrak{g}_1=\mathrm{Mat}_{q_1,q_2}\oplus\mathrm{Mat}_{q_2,q_3}\oplus\cdots\oplus\mathrm{Mat}_{q_k,q_{k+1}}\oplus\mathrm{Alt}_{q_{k+1}},$$
$$\rho(g_1,g_2,\dots,g_{k+1})(X_1,X_2,\dots,X_k,A)$$
$$=(g_1X_1g_2^{-1},g_2X_2g_3^{-1},\dots,g_kX_kg_{k+1}^{-1},g_{k+1}A^tg_{k+1}).$$

基本相対不変式は、

$$\mathrm{pf}(A)\qquad(q_{k+1}\text{: 偶数}),$$
$$\mathrm{pf}(X_c\cdots X_kA^t(X_c\cdots X_k))\qquad(1\le c\le k,\ q_c\text{: 偶数},\ q_t>q_c\ (c<t\le k+1)),$$
$$\det(X_cX_{c+1}\cdots X_d)\qquad(1\le c\le d\le k,\ q_c=q_{d+1},\ q_t>q_c\ (c<t\le d)).$$

これらのうち、(1) については、前節で多変数b-関数を与えた。ここでは残りのもののうち (3) について多変数b-関数を記す。これは佐藤文広 [18] で計算されていたものにおいて、やや条件を緩めたものである (定理中の (ii) 型が現れることを許した)。計算は (1) のものとは異なる奇数型Capelli恒等式 (対称行列が現れるもの) を用いる。

Theorem 7 (和地 [30])**.** 基本相対不変式のうち $\det(S)$ と $\det(X_c \cdots X_k S\,{}^t(X_c \cdots X_k))$ を *(i)*型と呼び、$f_i = \det(X_{c_i} \cdots X_k S\,{}^t(X_{c_i} \cdots X_k))$ で c_i を定め、$\det(X_c X_{c+1} \cdots X_d)$ を *(ii)*型と呼び、$f_i = \det(X_{c_i} X_{c_i+1} \cdots X_{d_i})$ で c_i, d_i を定める。

λ_{ijl} を次で定める。

$$\lambda_{ijl} = \begin{cases} 1 & (\ f_j\text{: } (i)\text{型, } f_i \cap f_j \neq \emptyset,\ q_{c_j} \geq l\ ) \\ \frac{1}{2} & (\ f_j\text{: } (ii)\text{型, } f_i \cap f_j \neq \emptyset,\ q_{c_j} \geq l\ ) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

ただし、 $f_i \cap f_j \neq \emptyset$ は、f_i と f_j が同じ行列を含むことを意味する。

このとき、多変数 b-関数は次で与えられる。

(1) f_i が *(i)*型のとき、定数倍を除いて、

$$\begin{aligned} &b_i(s_1, \ldots, s_p) \\ &= \prod_{c=c_i}^{k} \prod_{l=1}^{q_{c_i}} \left(\left(\sum_{j=1}^{p} \lambda_{ijl} s_j \right) + \frac{q_{c+1} + 1 - l}{2} \right) \times \prod_{c=c_i-1}^{k} \prod_{l=1}^{q_{c_i}} \left(\left(\sum_{j=1}^{p} \lambda_{ijl} s_j \right) + \frac{q_{c+1} + 2 - l}{2} \right). \end{aligned}$$

(2) f_i が *(ii)*型のとき、定数倍を除いて、

$$b_i(s_1, \ldots, s_p) = \prod_{c=c_i}^{d_i} \prod_{l=1}^{q_{c_i}} \left(\left(\sum_{j=1}^{p} \lambda_{ijl} s_j \right) + \frac{q_{c+1} + 1 - l}{2} \right).$$

□

この多変数 b-関数もレース図形を用いて表すことができる。次にその例を示す。

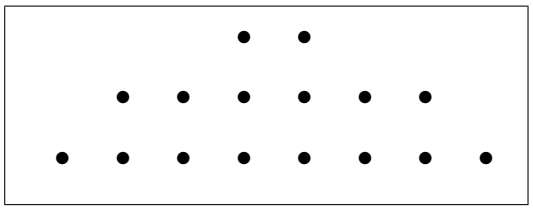
Example 8. (G, ρ, V) が、

$$\begin{aligned} &G = GL_1 \times GL_2 \times GL_2 \times GL_3, \\ &V = \mathrm{Mat}_{1,2} \oplus \mathrm{Mat}_{2,2} \oplus \mathrm{Mat}_{2,3} \oplus \mathrm{Sym}_3, \\ &\quad \rho(g_1, g_2, g_3, g_4)(X_1, X_2, X_3, S) = (g_1 X_1\,{}^t g_2^{-1}, g_2 X_2\,{}^t g_3^{-1}, g_3 X_3\,{}^t g_4^{-1}, g_4 S\,{}^t g_4) \end{aligned}$$

であるとき、基本相対不変式は、

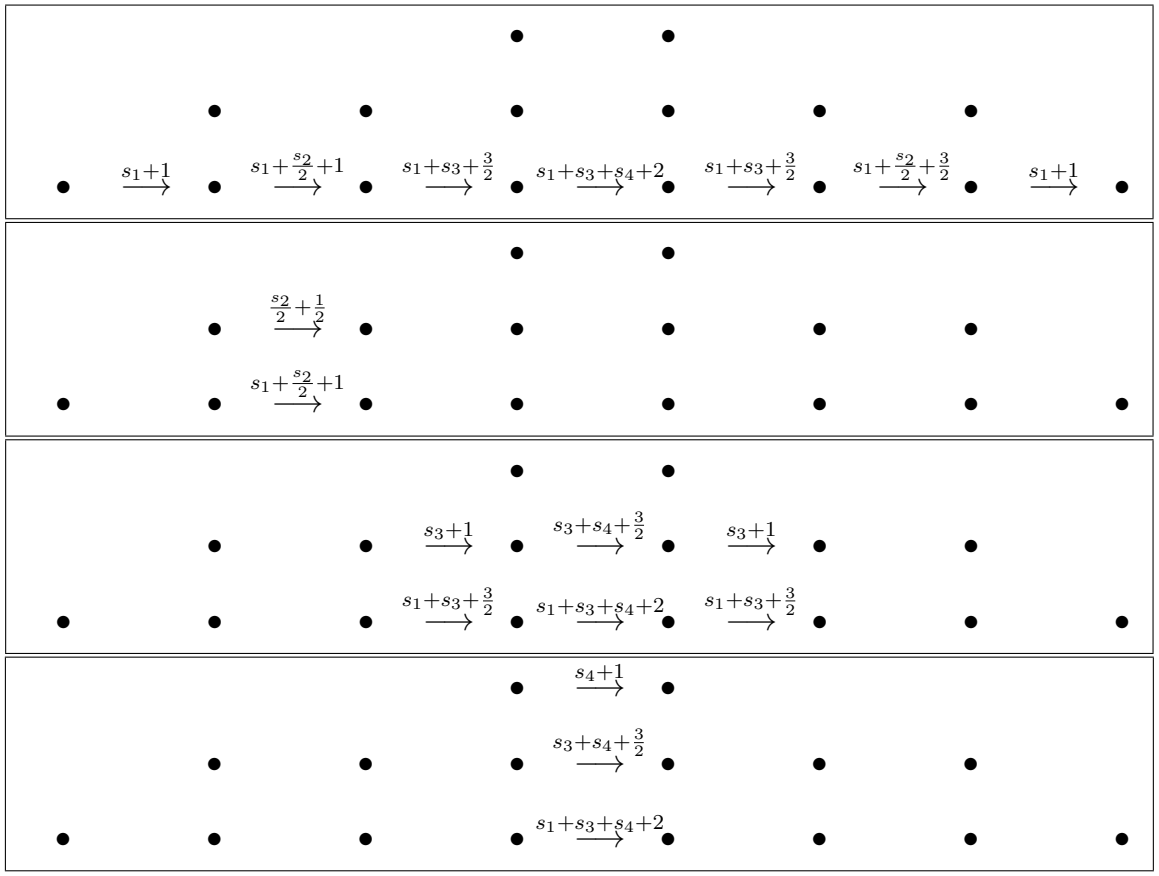
$$\begin{aligned} f_1 &= \det(X_1 X_2 X_3 S\,{}^t X_3\,{}^t X_2\,{}^t X_1), \\ f_2 &= \det(X_2), \\ f_3 &= \det(X_3 S\,{}^t X_3), \\ f_4 &= \det(S), \qquad\qquad ((X_1, X_2, X_3, S) \in V) \end{aligned}$$

である。レース図形を書くためには、まず群のサイズに合わせた個数の点を左右対称に書く。



次に、各基本相対不変式に対し、行列式に現れる行列を写像と思って対応する列を結ぶ矢印を書き、それぞれの矢印の上に、s_1, s_2, s_3, s_4 の *1*次式を書く。その矢印が、f_i の図に現れるならば、*4*つの図すべてにおいてその矢印には s_i を割り当てる。ただし、f_i が *(i)*型ならば s_i を、f_i が *(ii)*型ならば $s_i/2$ を割り当てる。また、*(ii)*型の矢印が左半分にあるときは、右半分の対称の位置にも $s_i/2$ を割り当てる。*1*次式の定数項は、図の左半分の矢印に対しては、矢印の先の点がその列で上から u 番目のときは $(u-1)/2$ とする。ちょうど中央と右半分の矢印については $(u+1)/2$ とする。

すると、f_1, f_2, f_3, f_4 のレース図形は、順に以下のようになる。



そして、それぞれの図においてレース図形に現れる *1*次式すべての積を作ると、多変数 b-関数 $b_i(s_1, s_2, s_3, s_4)$ に一致する。

8. 成分に0を含むCapelli恒等式

最後に、簡約ではない概均質ベクトル空間に関連もする、違ったタイプのCapelli恒等式と b-関数の計算について紹介する。

Theorem 9. *(1)* T を変数 T_{ij} あるいは *0*を成分に持つ正方行列とし、次の条件を満たすとする。

> *(a)* T の各行の *0*である成分は行の末尾にまとまっている。
> *(b)* 各行の *0*である成分の数は、上の行から下の行へ向かって広義単調増加である。

言い換えると、*0*ではない成分はちょうどヤング図形になっている。すると、

$$\det({}^tX)\det\left(\frac{\partial}{\partial X}\right)=\det\left({}^tX\frac{\partial}{\partial X}+\begin{pmatrix}n-1&&&\\&n-2&&\\&&\ddots&\\&&&0\end{pmatrix}\right)$$

が成立する。

(2) $p\geq q$ とする。T を、$T_{ij}=T_{ij}$ を満たす変数 T_{ij}、あるいは *0* を成分に持つ対称行列とし、次の条件を満たすとする。

$$T=\begin{pmatrix}T_1&T_2\\{}^tT_2&0\end{pmatrix}\quad(T_1\text{ は }p\times p,\ T_2\text{ は }p\times q,\ p+q=n),$$

ただし、T_1 と T_2 は成分がすべて変数である。すると、

$$\det({}^tT)\det\left(\frac{\overline{\partial}}{\partial T}\right)=\det\left({}^tT\frac{\overline{\partial}}{\partial T}+\begin{pmatrix}(n-1)/2&&&\\&(n-2)/2&&\\&&\ddots&\\&&&0\end{pmatrix}\right)$$

が成立する。ただし、$\frac{\overline{\partial}}{\partial T}$ は行列 T の変数を対応する偏微分作用素に代えたものだが、対角成分のみ $1/2$ 倍したものである。

定理の Capelli 恒等式は、それぞれ以下の概均質ベクトル空間に対応する。まず定理の (1) について、複素リー群 $G=P\times P'$ とベクトル空間 V を、

$$P=\left\{\begin{pmatrix}P_{11}&P_{12}&\cdots&P_{1m}\\0&P_{22}&\cdots&P_{2m}\\\vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&0&P_{mm}\end{pmatrix}\in GL_n(\mathbb{C})\ \middle|\ P_{ii}\in GL_{n_i}(\mathbb{C})\ (i=1,2,\ldots,m)\right\},$$

$$P'=\left\{\begin{pmatrix}P_{11}&P_{12}&\cdots&P_{1m}\\0&P_{22}&\cdots&P_{2m}\\\vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&0&P_{mm}\end{pmatrix}\in GL_n(\mathbb{C})\ \middle|\ P_{ii}\in GL_{n'_i}(\mathbb{C})\ (i=1,2,\ldots,m)\right\},$$

$$G=P\times P',$$

$$V=\left\{\begin{pmatrix}V_{11}&\cdots&V_{1,m-1}&V_{1m}\\V_{21}&\cdots&V_{2,m-1}&0\\\vdots&\iddots&\iddots&\vdots\\V_{m1}&0&\cdots&0\end{pmatrix}\in\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})\ \middle|\ V_{ij}\in\mathrm{Mat}(n_i,n'_j;\mathbb{C})\right\}$$

で定める。G の V 上の作用を、

$$\rho(g,h)X=gX{}^th\quad((g,h)\in G,\ X\in V)$$

で定めると、(G,ρ,V) は概均質ベクトル空間になる。V の座標関数が T に対応し、これが定理の (1) に対応する概均質ベクトル空間である。

次に、(2) について、G, V を次で定める。

$$
\begin{aligned}
&G = GL_p(\mathbb{C}) \times GL_q(\mathbb{C}),\\
&V = \left\{ \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ {}^tV_{12} & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Sym}_{p+q}(\mathbb{C}) \;\middle|\; V_{11} \in \mathrm{Sym}_p(\mathbb{C}), V_{12} \in \mathrm{Mat}(p,q;\mathbb{C}) \right\}\\
&\quad \simeq \mathrm{Sym}_p(\mathbb{C}) \oplus \mathrm{Mat}(p,q;\mathbb{C}).
\end{aligned}
$$

G の V 上の作用を、

$$
\rho(g,h)X = \begin{pmatrix} g & \\ & h \end{pmatrix} X \, {}^t\!\begin{pmatrix} g & \\ & h \end{pmatrix} \qquad ((g,h) \in G,\ X \in V)
$$

で定めると、(G, ρ, V) は概均質ベクトル空間になる。

定理の (2) の場合の多変数 b-関数を以下に示す。この多変数 b-関数は佐藤文広-杉山 [19] で計算されている。基本相対不変式は

$$
f_1 = \det(T_1), \quad f_2 = \det(T)
$$

であり、多変数 b-関数は、

$$
\begin{aligned}
b_1(s_1,s_2) &= (s_1 + \frac{q+1}{2})^{((q))}(s_1+s_2+\frac{p+1}{2})^{((p-q))}\\
b_2(s_1,s_2) &= (s_2 + \frac{p}{2})^{((q))}(s_2+\frac{q+1}{2})^{((q))}(s_1+s_2+\frac{p+1}{2})^{((p-q))}.
\end{aligned}
$$

ただし、$x^{((q))} = x(x-1/2)\cdots(x-(q-1)/2)$ である。

参考文献

[1] Akihiko Gyoja. Further generalization of generalized Verma modules. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 29(3):349–395, 1993.

[2] Akihiko Gyoja. Highest weight modules and b-functions of semi-invariants. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 30(3):353–400, 1994.

[3] Takashi Hashimoto. A central element in the universal enveloping algebra of type D_n via minor summation formula of Pfaffians. *J. Lie Theory*, 18(3):581–594, 2008.

[4] Takashi Hashimoto. Generating function for GL_n-invariant differential operators in the skew Capelli identity. *Lett. Math. Phys.*, 93(2):157–168, 2010.

[5] Roger Howe and Tōru Umeda. The Capelli identity, the double commutant theorem, and multiplicity-free actions. *Math. Ann.*, 290(3):565–619, 1991.

[6] Minoru Itoh. Capelli elements for the orthogonal Lie algebras. *J. Lie Theory*, 10(2):463–489, 2000.

[7] Minoru Itoh. Correspondences of the Gelfand invariants in reductive dual pairs. *J. Aust. Math. Soc.*, 75(2):263–277, 2003.

[8] Minoru Itoh. Capelli identities for the dual pair $(\mathrm{O}_M, \mathrm{Sp}_N)$. *Math. Z.*, 246(1-2):125–154, 2004.

[9] Minoru Itoh. Capelli identities for reductive dual pairs. *Adv. Math.*, 194(2):345–397, 2005.

[10] Minoru Itoh. Two determinants in the universal enveloping algebras of the orthogonal Lie algebras. *J. Algebra*, 314(1):479–506, 2007.

[11] Minoru Itoh. Two permanents in the universal enveloping algebras of the symplectic Lie algebras. *Internat. J. Math.*, 20(3):339–368, 2009.

[12] Minoru Itoh and Tôru Umeda. On central elements in the universal enveloping algebras of the orthogonal Lie algebras. *Compositio Math.*, 127(3):333–359, 2001.

[13] V. G. Kac. Some remarks on nilpotent orbits. *J. Algebra*, 64(1):190–213, 1980.

[14] Masaki Kashiwara. B-functions and holonomic systems. Rationality of roots of B-functions. *Invent. Math.*, 38(1):33–53, 1976/77.

[15] Kenji Kinoshita and Masato Wakayama. Explicit Capelli identities for skew symmetric matrices. *Proc. Edinb. Math. Soc. (2)*, 45(2):449–465, 2002.

[16] Soo Teck Lee, Kyo Nishiyama, and Akihito Wachi. Intersection of harmonics and Capelli identities for symmetric pairs. *J. Math. Soc. Japan*, 60(4):955–982, 2008.

[17] Kyo Nishiyama and Akihito Wachi. A note on the Capelli identities for symmetric pairs of Hermitian type. In *Infinite dimensional harmonic analysis IV*, pages 223–254. World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2009.

[18] Fumihiro Sato. b-functions of prehomogeneous vector spaces attached to flag manifolds of the general linear group. *Comment. Math. Univ. St. Paul.*, 48(2):129–136, 1999.

[19] Fumihiro Sato and Kazunari Sugiyama. Multiplicity one property and the decomposition of b-functions. *Internat. J. Math.*, 17(2):195–229, 2006.

[20] Shuichi Suga. Unitary highest weight modules of a Jacobi group. *Ryukyu Math. J.*, 8:83–93 (1996), 1995.

[21] Kazunari Sugiyama. b-functions associated with quivers of type A. *Transform. Groups*, 16(4):1183–1222, 2011.

[22] T. Tanisaki. Highest weight modules associated to parabolic subgroups with commutative unipotent radicals. In *Algebraic groups and their representations (Cambridge, 1997)*, volume 517 of *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.*, pages 73–90. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1998.

[23] Toshiyuki Tanisaki. Hypergeometric systems and Radon transforms for Hermitian symmetric spaces. In *Analysis on homogeneous spaces and representation theory of Lie groups, Okayama–Kyoto (1997)*, volume 26 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 235–263. Math. Soc. Japan, Tokyo, 2000.

[24] H. W. Turnbull. Symmetric determinants and the Cayley and Capelli operators. *Proc. Edinburgh Math. Soc. (2)*, 8:76–86, 1948.

[25] Akihito Wachi. Contravariant forms on generalized Verma modules and b-functions. *Hiroshima Math. J.*, 29(1):193–225, 1999.

[26] Akihito Wachi. Capelli type identities on certain scalar generalized Verma modules. *J. Math. Kyoto Univ.*, 40(4):705–727, 2000.

[27] Akihito Wachi. Capelli type identities on certain scalar generalized Verma modules. II. *J. Math. Soc. Japan*, 56(2):447–473, 2004.

[28] Akihito Wachi. Central elements in the universal enveloping algebras for the split realization of the orthogonal Lie algebras. *Lett. Math. Phys.*, 77(2):155–168, 2006.

[29] Akihito Wachi. Logarithmic derivative and the Capelli identities. In *New developments in group representation theory and non-commutative harmonic analysis*, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B36, pages 43–52. Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2012.

[30] Akihito Wachi. Capelli identities of odd type and b-functions. *Comment. Math. Univ. St. Pauli*, 63(1-2):291–303, 2014.

[31] 和地輝仁. A 型の簇に付随する b-関数と Capelli 恒等式. 日本数学会 2009 年度秋季総合分科会一般講演.