

関数空間上の全射等距離写像

三浦 毅 (新潟大学)*

概 要

Banach 環論において盛んに研究がなされている「保存問題」とは「Banach 環の間の写像が与えられた構造を保存するとき, その写像を決定する問題」ということが出来る. 特に「距離構造」を保存する対象が「等距離写像」である. 本稿では, 筆者がこれまでに行ってきた「保存問題」の視点から「等距離写像」を眺め, 現在取り組んでいる問題に言及するとともに, この問題解決のためこれまでに考察し得られた結果を述べる.

1. 保存問題

1.1. Banach 環

Banach 環とは, おおまかに言うと, Banach 空間 $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ に「自然な」積が定義された対象であり, さらに

$$\|ab\| \leq \|a\| \|b\| \quad (\forall a, b \in \mathcal{B})$$

をみたすものである. 特に $\mathcal{B}$ が積に関する単位元を有するとき, Banach 環 $\mathcal{B}$ は単位的であるといわれる.

単位的 Banach 環 $\mathcal{B}$ に対して, $\mathcal{B}$ の可逆元全体の集合を $\mathcal{B}^{-1}$ で表す. このとき

$$\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda e \notin \mathcal{B}^{-1}\}$$

を $a \in \mathcal{B}$ のスペクトルという. ただし e は $\mathcal{B}$ の単位元である.

Example 1. 1. コンパクト Hausdorff 空間 K 上の複素数値連続関数全体 $C(K)$ は, 各点での演算及び最大値ノルム $\|f\|_{\infty} = \sup\{|f(k)| : k \in K\}$ ($f \in C(K)$) に関して単位的 Banach 環となり, 定数関数 1 が単位元となる. また各 $f \in C(K)$ に対して $\sigma(f) = f(K)$ である.

$C(K)$ の各点での積は可換である, つまり $fg = gf$ ($\forall f, g \in C(K)$) が成り立つ. より一般に, 可換な積をもつ Banach 環を可換 Banach 環という.

2. Banach 空間 $\mathcal{X}$ 上の有界線形作用素全体 $B(\mathcal{X})$ は, 作用素としての和・スカラー倍と, 合成を積とし, 作用素ノルム $\|A\| = \sup\{\|Ax\| : \|x\| = 1\}$ ($A \in B(\mathcal{X})$) に関して単位的 Banach 環となる. 積の単位元は恒等作用素 I である.

1.2. 保存問題に関連する研究

保存問題に関連する研究は古くまでさかのぼることが出来るが, それを「保存問題」として統一的な枠組みで取り扱った文献として L. Molnár [36] がある. 筆者が保存問題に興味をもち, 取り組むきっかけとなったのは, Molnár による次の研究である.

本研究は科研費 (課題番号:15K04921, 16K05172) の助成を受けたものである.

2010 Mathematics Subject Classification: 46J10

キーワード: 可換 Banach 環, 荷重合成作用素, 関数環, 極大イデアル空間, 端点, 等距離写像, 保存問題, Choquet 境界, Shilov 境界

* 〒950-2181 新潟県新潟市西区五十嵐 2 の町 8050 新潟大学自然科学系 (理学部)

e-mail: miura@math.sc.niigata-u.ac.jp

Theorem (Molnár, [35]). 1. H を無限次元 Hilbert 空間とし, $S: B(H) \rightarrow B(H)$ を全射とする.

(a) 線形とは限らない全射 S が

$$\sigma(S(A)S(B)) = \sigma(AB) \quad (\forall A, B \in B(H))$$

をみたせば, 可逆作用素 $T \in B(H)$ が存在して

$$S(A) = TAT^{-1} \quad (\forall A \in B(H))$$

あるいは

$$S(A) = -TAT^{-1} \quad (\forall A \in B(H))$$

が成り立つ.

(b) B^* を $B \in B(H)$ の共役作用素とする. S が

$$\sigma(S(A)S(B)^*) = \sigma(AB^*) \quad (\forall A, B \in B(H))$$

をみたせば, ユニタリ作用素 $U, V \in B(H)$ が存在して

$$S(A) = UAV \quad (\forall A \in B(H))$$

が成り立つ.

2. X を第一可算公理をみたすコンパクト Hausdorff 空間とする. 全射 $S: C(X) \rightarrow C(X)$ が

$$\sigma(S(f)S(g)) = \sigma(fg) \quad (\forall f, g \in C(X)) \quad (1.1)$$

あるいは

$$\sigma(S(f)\overline{S(g)}) = \sigma(f\bar{g}) \quad (\forall f, g \in C(X)) \quad (1.2)$$

をみたせば, 連続関数 $u: X \rightarrow \mathbb{T}$ 及び同相写像 $\varphi: X \rightarrow X$ が存在して

$$S(f)(x) = u(x)f(\varphi(x)) \quad (\forall f \in C(X), \forall x \in X)$$

が成り立つ. ただし $\bar{g}(x) = \overline{g(x)}$ ($x \in X$) は $g(x)$ の共役複素数である.

筆者にとって, Molnár [35] の定理の驚くべき点は, 全射 S は線形性を仮定せずともスペクトルの意味で積を保存すれば, S は自動的に線形となり, さらに他の構造も保存されることであった. たとえば 2. で与えられた $S(f)(x) = u(x)f(\varphi(x))$ に対して, 一般に S 自身は積を保存しないが, $uS(fg) = S(f)S(g)$ であるから S は積の構造と密接な関連をしていて, 特に $S(1) = 1$ であれば積を保存することになる. さらに $\|S(f)\|_\infty = \|f\|_\infty$ であるから, S は距離構造さえも保存する.

Molnár の定理に衝撃を受け, 保存問題に興味をもった筆者は「線形性を仮定せず」に他の構造の保存性から「線形性が導かれる」ことを重視しこだわりを持っている. 一方で「線形写像が他の構造を保存するとき, その写像が決定され得る」という形の研究は 100 年以上前からなされている.

Theorem (Fröbenius, [13]). $M_n(\mathbb{C})$ を $n \times n$ 複素行列の全体, $I \in M_n(\mathbb{C})$ を単位行列とし, $\det(A)$ を $A \in M_n(\mathbb{C})$ の行列式とする. 全射線形写像 $S: M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ が $S(I) = I$ かつ

$$\det(S(A)) = \det(A) \quad (\forall A \in M_n(\mathbb{C}))$$

をみたせば, $S(A^2) = S(A)^2$ ($\forall A \in M_n(\mathbb{C})$) が成り立つ.

より正確には, $\det(PQ) = 1$ をみたす $P, Q \in M_n(\mathbb{C})$ が存在して

$$S(A) = PAQ \quad (\forall A \in M_n(\mathbb{C})) \quad \text{or} \quad S(A) = PA^T Q \quad (\forall A \in M_n(\mathbb{C}))$$

が成り立つ. ただし A^T は A の転置行列である.

1.3. 等距離写像

Definition 1. $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ をノルム空間とする. 線形とは限らない $S: E \rightarrow F$ が

$$\|S(a) - S(b)\|_F = \|a - b\| \quad (\forall a, b \in E)$$

をみたすとき, S を等距離写像という.

等距離写像の定義は, Banach [3, Chapter XI] にならい「線形性」を仮定していない. いくつかの(筆者の感覚では多くの)研究においては, 線形写像で $\|S(a)\|_F = \|a\|_E$ ($\forall a \in E$) をみたす S を等距離写像と呼んでいる. 本稿を通して, 等距離写像は線形性を仮定せず, 定理の条件などにおいて線形性が必要な場合, その仮定を記述することとする.

Theorem (Banach [3, Theorem 3 in Chapter XI]). X, Y をコンパクト距離空間とし $(C_{\mathbb{R}}(X), \|\cdot\|_{\infty}), (C_{\mathbb{R}}(Y), \|\cdot\|_{\infty})$ をそれぞれ X, Y 上の実数値連続関数全体のなす Banach 空間とする. このとき X と Y が同相であるための必要十分条件は, 全射等距離写像 $S: C_{\mathbb{R}}(X) \rightarrow C_{\mathbb{R}}(Y)$ が存在することである.

Banach は上の定理を証明するため, まず「全射等距離写像はアファインである」ことを示している ([3, Theorem 2 in Chapter XI] 参照). この結果は Mazur and Ulam [31] によって示された. Mazur-Ulam の定理の簡潔な証明が Väisälä [43] によって与えられている.

Theorem (Mazur and Ulam, [31]). $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ をノルム空間とする. (線形とは限らない) 全射 $S: E \rightarrow F$ が $S(0) = 0$ かつ

$$\|S(a) - S(b)\|_F = \|a - b\|_E \quad (\forall a, b \in E)$$

をみたせば, S は実線形写像である.

全射等距離写像 $S: E \rightarrow F$ に対して, $S - S(0): E \rightarrow F$ を $(S - S(0))(a) = S(a) - S(0)$ ($a \in E$) により定めれば, $S - S(0)$ も全射等距離写像であることが分かる. よって Mazur-Ulam の定理により $S - S(0)$ は実線形となる. このことから, 全射等距離写像の構造を調べる際, 全射実線形等距離写像が本質的である. Banach [3, Theorem 3 in Chapter XI] は, $S: C_{\mathbb{R}}(X) \rightarrow C_{\mathbb{R}}(Y)$ が全射等距離写像であるとき, 同相写像 $\varphi: Y \rightarrow X$ の存在を示し, さらに Remark において

$$S(f)(y) = u(y)f(\varphi(y)) \quad (\forall f \in C_{\mathbb{R}}(X) \quad \forall y \in Y)$$

が成り立つことを述べている．ただし u は $u: Y \rightarrow \{\pm 1\}$ であるような連続関数である．この定理の「 X, Y はコンパクト距離空間」である条件は，Stone [42, Theorem 83] によって弱められ「コンパクト Hausdorff 空間」に対して成り立つことが示されている．

Banach [3, Theorem 3 in Chapter XI], Stone [42, Theorem 83] の結果は実 Banach 空間 $C_{\mathbb{R}}(X), C_{\mathbb{R}}(Y)$ に対するものであったが，複素 Banach 空間 $C(X), C(Y)$ に対しても類似の結果が成り立つことが期待される．実際，次の結果は Banach-Stone の定理として知られているが，いつ誰がその証明を与えたのかを筆者は知らない．少なくとも Dunford and Schwartz [8] には，記号・用語の違いはあるものの，次のように書かれている．ただし， $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ である．この記号は本稿を通して使用する．

Theorem ([8, Theorem 8 in V.8]). $(C(X), \|\cdot\|_{\infty}), (C(Y), \|\cdot\|_{\infty})$ をそれぞれコンパクト Hausdorff 空間 X, Y 上の複素数値連続関数全体のなす複素 Banach 空間とする．全射複素線形等距離写像 $S: C(X) \rightarrow C(Y)$ に対して，連続関数 $u: Y \rightarrow \mathbb{T}$ 及び同相写像 $\varphi: Y \rightarrow X$ が存在して

$$S(f)(y) = u(y)f(\varphi(y)) \quad (\forall f \in C(X) \ \forall y \in Y)$$

が成り立つ．

Dunford and Schwartz [8] による Banach-Stone の定理の証明は， $C(K)$ の双対空間の単位球における端点を調べる手法を用いている．実際，端点が決定されると，全射複素線形等距離写像 S の共役作用素は端点を端点に写すことが分かり，このことから S の形を記述することが出来る．このように，等距離写像を解明する手法として端点を調べる方法が様々な空間で用いられており，この手法を **extreme point method** と呼ぶことがある．

等距離写像は様々な空間において，それぞれの空間に備えられた自然なノルムに関して，研究がなされ構造が解明されている．たとえば Nagasawa [37], deLeeuw, Rudin and Wermer [7] は，本稿で後に定義する関数環（ただし伝統的な流儀での意味）の上の全射複素線形等距離写像の形を決定している．Jarosz [16], Jarosz and Pathk [18] は，様々な空間上の全射複素線形等距離写像の構造を統一的な手法で解明している．Pathak [40] は，本稿で扱う $C^1([0, 1])$ を一般化した $C^n([0, 1])$ を考え，その上の全射複素線形等距離写像を決定している．Kawamura は，[20, 23] においてベクトル値関数空間，[21, 22] においてリーマン多様体上の C^1 空間，[25] では単位円周 $\mathbb{T}$ 上の C^1 空間を考え，その上の全射等距離写像を決定している．

関数環分野においては「関数空間」を次の意味で用いることがある．

Definition 2. X をコンパクト Hausdorff 空間とし， $C(X)$ を X 上の複素数値連続関数全体のなす最大値ノルム $\|\cdot\|_{\infty}$ に関する Banach 空間とする． $C(X)$ の線形部分空間 A に対して， A が次をみたすとき $(A, \|\cdot\|_{\infty})$ を X 上の関数空間と呼ぶ：

1. A は定数関数 1 を含む
2. A は X の点を分離する．つまり異なる 2 点 $x, y \in X$ に対して $f(x) \neq f(y)$ となる $f \in A$ が存在する．

Example 2. 1. $C(X)$ 自身は関数空間である.

2. $\mathbb{D}$ を複素平面の単位開円板とする. つまり $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ である. また $H(\mathbb{D})$ により, $\mathbb{D}$ 上で定義された正則関数全体の集合を表す. $\bar{\mathbb{D}}$ を $\mathbb{D}$ の閉包とする. $\{f \in C(\bar{\mathbb{D}}) : f|_{\mathbb{D}} \in H(\mathbb{D})\}$ は $\bar{\mathbb{D}}$ 上の関数空間である.

Definition 3. A をコンパクト Hausdorff 空間 X 上の関数空間とし, A_1^* を A の双対空間の閉単位球とする.

1. $\eta \in A_1^*$ が A_1^* の端点であるとは, $\eta = (\eta_1 + \eta_2)/2$ ($\eta_1, \eta_2 \in A_1^*$) ならばつねに $\eta = \eta_1 = \eta_2$ となるときをいう. A_1^* の端点全体の集合を $\text{ext}(A_1^*)$ で表す.
2. $x \in X$ に対して $\delta_x \in A_1^*$ を次で定める: $\delta_x(f) = f(x)$ ($f \in A$). このとき $\text{Ch}(A) = \{x \in X : \delta_x \in \text{ext}(A_1^*)\}$ を A の **Choquet 境界** と呼ぶ.

関数空間 A の Choquet 境界 $\text{Ch}(A)$ は A の境界であることが知られている ([10, Theorem 2.3.8] 参照). より正確には, 次が成り立つ: 任意の $f \in A$ に対して $|f(x_0)| = \|f\|_\infty$ をみたす $x_0 \in \text{Ch}(A)$ が存在する. このことから, $f, g \in A$ が $f = g$ on $\text{Ch}(A)$ をみたせば $f = g$ on X であることが導かれる. この意味で関数 $f \in A$ の振舞いは $\text{Ch}(A)$ 上で調べればある程度分かると考えられる.

Araujo and Font [1] は端点を用いずに, 異なる手法により関数空間上の全射複素線形等距離写像の構造を, Choquet 境界を含む集合上で解明した. extreme point method を用いれば, 彼らの結果の特別な場合として Choquet 境界上の振舞いを記述することは容易である.

Theorem (Araujo and Font [1, Theorem 4.1] の特別な場合). A, B をそれぞれコンパクト Hausdorff 空間 X, Y 上の関数空間とし, $S: A \rightarrow B$ を全射複素線形等距離写像とする. このとき連続関数 $u: \text{Ch}(B) \rightarrow \mathbb{T}$ 及び同相写像 $\varphi: \text{Ch}(B) \rightarrow \text{Ch}(A)$ が存在して

$$S(f)(y) = u(y)f(\varphi(y)) \quad (\forall f \in A \ \forall y \in \text{Ch}(B))$$

が成り立つ.

Mazur-Ulam の定理 [31] によれば, 全射等距離写像は実線形であると仮定して一般性を失わない. したがって Araujo and Font の定理 [1] の特別な場合も, 複素線形性を仮定せずとも, 全射等距離写像に対して類似の結果が得られると期待するのは早計であろうか. 実際, 関数空間ではなく, 関数環と呼ばれる対象に関しては, 全射等距離写像が決定されている.

Definition 4. X を局所コンパクト Hausdorff 空間とし, $C_0(X)$ により X 上の複素数値連続関数で無限遠点で 0 であるもの全体とする. ただし $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ が無限遠点で 0 であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対してコンパクト集合 $K \subset X$ が存在して, $|f(x)| < \varepsilon$ ($\forall x \in X \setminus K$) となることである. $C_0(X)$ の部分多元環 A が次をみたすとき, A を X 上の関数環と呼ぶ:

1. A は最大値ノルムに関して $C_0(X)$ の閉集合である.
2. A は X の点を分離する.

「関数環」は通常、上の定義での X が「コンパクト」であり、さらに「 A が定数関数 1 を含む」ものとして定義される。しかし具体的かつ重要な関数の集合を考えると、これらの条件を弱めた枠組みで議論したいときがある。通常の「関数環」の概念を含む対象に適切な用語がないため、本稿では上の定義をみたす対象も関数環と呼ぶことにする。

Theorem 1 (Hatori and M. [14]). A, B をそれぞれ局所コンパクト Hausdorff 空間 X, Y 上の関数環とし、 $S: A \rightarrow B$ を全射等距離写像とする。 $\text{Ch}(A) \subset X, \text{Ch}(B) \subset Y$ の閉包をそれぞれ $\partial A, \partial B$ で表す。このとき連続関数 $u: \partial B \rightarrow \mathbb{T}$, 開かつ閉集合 $K \subset \partial B$ 及び同相写像 $\phi: \partial B \rightarrow \partial A$ が存在して

$$S(f)(y) - S(0)(y) = \begin{cases} u(y)f(\phi(y)) & y \in K \\ \overline{u(y)f(\phi(y))} & y \in \partial B \setminus K \end{cases} \quad (\forall f \in A)$$

が成り立つ。

X, Y がコンパクトであり単位元の存在を仮定した場合、Theorem 1 は Ellis [9] によって示されている。Theorem 1 を見れば、全射等距離写像は荷重合成作用素 $f \mapsto u(f \circ \phi)$ と複素共役の組合わせしかないことが強く印象づけられるかもしれない。したがって関数空間に対しても全射等距離写像のこのような記述が可能であるように思われる。しかし次の簡単な空間において、荷重合成作用素と複素共役の上のような合成では記述されない全射等距離写像の例がある。

Example 3. $A = \{az + b \in C(\mathbb{T}) : a, b \in \mathbb{C}\}$ とする。このとき A は $\mathbb{T}$ 上の関数空間であり、 $\|az + b\|_\infty = |a| + |b|$ であることが分かる。したがって

$$S(az + b) = az + \bar{b} \quad (az + b \in A)$$

によって定まる $S: A \rightarrow A$ は全射実線形等距離写像であることが分かる。しかし S は荷重合成作用素でも、その複素共役でもない。

関数空間上の全射等距離写像を完全に特徴付けようとすれば、Example 3 のような等距離写像も含んだ形にならざるを得ない。それでは全射等距離写像の一般的な形はどのようなになっているのであろうか。

Problem. A, B を関数空間とする。全射等距離写像 $S: A \rightarrow B$ を特徴付けよ。

筆者はこの問題に取り組んでいるが、現在の所その解を知らない。Example 3 のような現象は、非常に限られた状況下でのみ起こるのではないかと考えている。このことを述べるため、全射等距離写像に対する標準形を次のように定義する。

Definition 5. 関数空間の間の全射等距離写像 $S: A \rightarrow B$ が標準形であるとは、連続関数 $u: \text{Ch}(B) \rightarrow \mathbb{T}$ と開かつ閉集合 $K \subset \text{Ch}(B)$ 及び同相写像 $\phi: \text{Ch}(B) \rightarrow \text{Ch}(A)$ が存在して

$$S(f)(y) - S(0)(y) = \begin{cases} u(y)f(\phi(y)) & y \in K \\ \overline{u(y)f(\phi(y))} & y \in \text{Ch}(B) \setminus K \end{cases} \quad (\forall f \in A)$$

が成り立つことをいう。

Example 3により非標準的な全射等距離写像の存在が示されている．Theorem 1は、関数環上の全射等距離写像はつねに標準的であることを述べている．非標準的な全射等距離写像は、次の性質を持つことが知られている．

Theorem 2 (M. [33]). $S: A \rightarrow A$ を関数空間上の非標準的全射等距離写像とする．このとき次が成り立つ．

1. $\text{Ch}(A)$ は単位円周 $\mathbb{T}$ と同相な集合 Γ を含む．
2. $g \in A$ が存在して、 $A|_{\Gamma}$ は $g|_{\Gamma}$ 及び定数関数 1 で生成される．

Theorem 2 から、関数空間上の全射等距離写像を解明するためには、Choquet 境界が円周を含むような空間を調べる必要が生じた．一般の関数空間を考察する前に、Choquet 境界が円周を含むような関数空間とその上の全射等距離写像を詳しく調べることで、問題の解決に繋がたいと考え、近年は具体的かつ扱いやすい関数空間上の全射等距離写像を調べている．

2. 種々の関数空間とその上の等距離写像

様々な空間上で、全射線形等距離写像の構造が調べられているが、Banach [3], Stone [42] の研究成果にも関わらず、線形性を仮定せずに等距離写像を考察する研究はなかなか見当たらない．Cambern [5], Rao and Roy [41] は、 $[0, 1]$ 上の複素数値連続微分可能関数全体のなす Banach 空間 $(C^1([0, 1]), \|\cdot\|_C)$, $(C^1([0, 1]), \|\cdot\|_{\Sigma})$ 上の全射複素線形等距離写像を決定している．ただし

$$\|f\|_C = \sup_{t \in [0, 1]} (|f(t)| + |f'(t)|), \quad \|f\|_{\Sigma} = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)| + \sup_{s \in [0, 1]} |f'(s)| \quad (f \in C^1([0, 1]))$$

である．これらのノルムを考えると $C^1([0, 1])$ は関数空間ではないが、証明の中で $C^1([0, 1])$ を別の空間に埋め込み、関数空間として表現し、等距離写像の構造を調べている．Cambern のアイディアは次の通りである． $U: C^1([0, 1]) \rightarrow C([0, 1] \times \mathbb{T})$ を

$$U(f)(t, z) = f(t) + zf'(t) \quad (\forall f \in C^1([0, 1]) \forall (t, z) \in [0, 1] \times \mathbb{T})$$

により定め、 $[0, 1] \times \mathbb{T}$ 上の関数空間 $U(C^1([0, 1]))$ 上の全射複素線形等距離写像を決定する． $\sup_{(t, z) \in [0, 1] \times \mathbb{T}} |U(f)(t, z)| = \|f\|_C$ であることから、 S が $C^1([0, 1])$ 上の全射複素線形等距離写像ならば、 USU^{-1} の形が分かり、つまり S が分かることになる．

$$\begin{array}{ccc} C^1([0, 1]) & \xrightarrow{S} & C^1([0, 1]) \\ \downarrow U & & \downarrow U \\ C([0, 1] \times \mathbb{T}) & \longrightarrow & C([0, 1] \times \mathbb{T}) \end{array}$$

特に、各 $t \in [0, 1]$ に対して、 $f(t) + zf'(t)$ は $\mathbb{T}$ 上の 1 次関数であるから、筆者がまさに調べたい対象の具体例となっている．Botelho and Jamison は有限次元の実または複素 Hilbert 空間 H に値をとる連続微分可能な写像の全体 $C^1([0, 1], H)$ に、 $\|\cdot\|_C$ の絶対値を H のノルムで置き換えたノルムを考え、このノルムに関する全射線形等距離写像を決定している．この結果から $(C^1([0, 1]), \|\cdot\|_C)$ 上の全射等距離写像が決定されていること

は、筑波大学の川村一宏先生にご指摘頂くまで筆者は気付いていなかった．この場を借りて川村先生にお礼申し上げます．

Rao and Roy [41] は $(C^1([0, 1]), \|\cdot\|_\Sigma)$ 上の全射複素線形等距離写像を特徴付けている．この結果は、Cambern [5] の定理と同じ空間 $C^1([0, 1])$ で、ノルムだけ少し変えたものとするべきではない．実際、Rao and Roy は Lipschitz 空間や絶対連続関数のなす空間上で等距離写像を考えていて、それらの空間で自然に用いられるノルムを $C^1([0, 1])$ に流用することで Cambern と類似の結果を得ている．その定理を全射等距離写像の場合に拡張したものが次の結果である．

Theorem 3 (M. and Takagi [34]). $S: C^1([0, 1]) \rightarrow C^1([0, 1])$ を $\|f\|_\Sigma = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ ($f \in C^1([0, 1])$) に関する全射等距離写像とし、 $S_0 = S - S(0)$ とする．このとき $c \in \mathbb{T}$ が存在して、次のいずれかが成り立つ．

$$\begin{aligned} S_0(f)(t) &= cf(t) & (\forall f \in C^1([0, 1]) \forall t \in [0, 1]), & \text{ or} \\ S_0(f)(t) &= cf(1-t) & (\forall f \in C^1([0, 1]) \forall t \in [0, 1]), & \text{ or} \\ S_0(f)(t) &= \overline{cf(t)} & (\forall f \in C^1([0, 1]) \forall t \in [0, 1]), & \text{ or} \\ S_0(f)(t) &= \overline{cf(1-t)} & (\forall f \in C^1([0, 1]) \forall t \in [0, 1]). \end{aligned}$$

以下では全射等距離写像 S に対して、特に断らなくとも $S_0 = S - S(0)$ と書くことにする． $C^1([0, 1])$ には様々なノルムが考えられ、それらのノルムに対して等距離写像は異なる振舞いをすることがある．実際、古清水 [28] は複素線形性を仮定した上で、次の結果を示している．

Theorem 4 (M. [33]). $S: C^1([0, 1]) \rightarrow C^1([0, 1])$ を $\|f\|_m = \max\{|f(0)|, \|f'\|_\infty\}$ ($f \in C^1([0, 1])$) に関する全射等距離写像とする．このとき $c \in \mathbb{T}$ 、連続関数 $u: [0, 1] \rightarrow \mathbb{T}$ 及び同相写像 $\phi: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ が存在して、次のいずれかが成り立つ．

$$\begin{aligned} S_0(f)(t) &= cf(0) + \int_0^t u(s)f'(\phi(s)) ds & (\forall f \in C^1([0, 1]) \forall t \in [0, 1]), & \text{ or} \\ S_0(f)(t) &= \overline{cf(0)} + \int_0^t u(s)f'(\phi(s)) ds & (\forall f \in C^1([0, 1]) \forall t \in [0, 1]), & \text{ or} \\ S_0(f)(t) &= cf(0) + \int_0^t \overline{u(s)f'(\phi(s))} ds & (\forall f \in C^1([0, 1]) \forall t \in [0, 1]), & \text{ or} \\ S_0(f)(t) &= \overline{cf(0)} + \int_0^t \overline{u(s)f'(\phi(s))} ds & (\forall f \in C^1([0, 1]) \forall t \in [0, 1]). \end{aligned}$$

Koshimizu [29] は $C^1([0, 1])$ 上の全射複素線形等距離写像を $\|f\|_\sigma = |f(0)| + \|f'\|_\infty$ ($f \in C^1([0, 1])$) に対して決定している． $C^1([0, 1])$ 上の等距離写像を調べる上で、ノルムを帰る度に異なる議論をしなければならないのであろうか．ノルムに依らず統一的な議論は出来ないだろうか．このような疑問に答えるため

$$\|f\|_C = \sup_{t \in [0, 1]} (|f(t)| + |f'(t)|), \quad \|f\|_\Sigma = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty, \quad \|f\|_\sigma = |f(0)| + \|f'\|_\infty$$

を統一的に扱う手法を考察した．

Theorem 5. [Kawamura, Koshimizu and M. [27]] $D \subset [0, 1] \times [0, 1]$ をコンパクト連結集合とし

$$\|f\|_{\langle D \rangle} = \sup_{(s,t) \in D} (|f(s)| + |f'(t)|) \quad (f \in C^1([0, 1]))$$

とする. $p_j: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ を第 j 成分への射影とし $p_1(D) = [a, b]$, $p_2(D) = [c, d]$ とする. $S: C^1([0, 1]) \rightarrow C^1([0, 1])$ が $\|\cdot\|_{\langle D \rangle}$ に関する全射等距離写像ならば, $u \in C^1([0, 1])$, $v: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ と C^1 級微分同相写像 $\phi: [a, b] \rightarrow [a, b]$ 及び同相写像 $\psi: [c, d] \rightarrow [c, d]$ が存在して次が成り立つ.

1. $[a, b]$ 上で $|u| = 1$ であり, $[c, d]$ 上では u は定数で, 次のどちらかが成り立つ.

$$\begin{aligned} S_0(f)(s) &= u(s)f(\phi(s)) & (\forall f \in C^1([0, 1]) \ \forall s \in [a, b]), \quad \text{or} \\ S_0(f)(s) &= u(s)\overline{f(\phi(s))} & (\forall f \in C^1([0, 1]) \ \forall s \in [a, b]). \end{aligned}$$

2. $[c, d]$ 上で $|v| = 1$ であり, 次のどちらかが成り立つ.

$$\begin{aligned} S_0(f)'(t) &= v(t)f'(\psi(t)) & (\forall f \in C^1([0, 1]) \ \forall t \in [c, d]), \quad \text{or} \\ S_0(f)'(t) &= v(t)\overline{f'(\psi(t))} & (\forall f \in C^1([0, 1]) \ \forall t \in [c, d]). \end{aligned}$$

3. もしさらに $a < b$ であれば, $[a, b] \cap [c, d]$ 上で $\phi = \psi$ である. また $\gamma \in \{\pm 1\}$ が存在して, $[a, b] \cap [c, d]$ 上で $\phi' \equiv \gamma$ かつ $v = \gamma u$ であり, 次のどちらかが成り立つ.

$$\begin{aligned} S_0(f)(s) &= u(s)f(\phi(s)) \quad \text{and} \quad S_0(f)'(t) = v(t)f'(\psi(t)) \\ &(\forall f \in C^1([0, 1]) \ \forall s \in [a, b] \ \forall t \in [c, d]), \quad \text{or} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_0(f)(s) &= u(s)\overline{f(\phi(s))} \quad \text{and} \quad S_0(f)'(t) = v(t)\overline{f'(\psi(t))} \\ &(\forall f \in C^1([0, 1]) \ \forall s \in [a, b] \ \forall t \in [c, d]). \end{aligned}$$

今後の研究

$C^1([0, 1])$ 上の全射等距離写像は, いくつかのノルムを統一的に扱うことによって, その形を決定することが出来たが, Botelho and Jamison [4] が示している有限次元 Hilbert 空間に値をとる C^1 空間は異なる世界の話となってしまった. 等距離写像の研究では, ベクトル値関数のなす空間上の等距離写像が盛んに調べられており, 筆者は特に「無限次元」の場合に興味を持っている. Hilbert 空間にこだわらなければ, 無限次元のベクトル空間に値をとる C^1 空間上でも等距離写像が決定出来るのではないかと考えこの問題に取り組んだ. その結果ベクトル空間として「関数環」を考えれば, 全射複素線形等距離写像の形が決定されることが分かった. 証明には Hatori, Oi and Takagi [15], Oi [39] の手法・アイデアを一部用いている. ただし, ここでは議論を簡略化するため「複素線形性」を仮定している. 全射等距離写像の構造も解明出来るのではないかと期待しているが, 筆者はその真偽を知らない. また Arens and Kelley [2] の定理を適用することにより, 端点の集合が決定されることは, 筆者の研究において非常に大きな役割を果たしている.

これまでは関数空間上の全射等距離写像解明のための具体例として、 $C^1([0, 1])$ を主な対象として研究を行ってきた。一方で微分構造を考慮するのであれば、たとえば単位開円板 $\mathbb{D}$ 上の正則関数全体 $H(\mathbb{D})$ を考え、正則関数のなす関数空間上の全射等距離写像を調べる問題が考えられる。実際、Novinger and Oberlin [38] は Hardy 空間 $H^p(\mathbb{D})$ に関連して、 $\mathcal{S}^p = \{f \in H(\mathbb{D}) : f' \in H^p(\mathbb{D})\}$ のノルムを $\|f\|_{\mathcal{S}^p} = |f(0)| + \|f'\|_{H^p(\mathbb{D})}$ で与え、その上の、全射とは限らない複素線形等距離写像を、 $1 \leq p < \infty$ に対して決定している。ただし $\|\cdot\|_{H^p(\mathbb{D})}$ は $H^p(\mathbb{D})$ の通常のノルムである。また $H^p(\mathbb{D})$ 上の全射とは限らない複素線形等距離写像は、 $0 < p < \infty$ に対して Forelli [12] がその形を決定している。 $\mathbb{D}$ 上の有界正則関数全体を $H^\infty(\mathbb{D})$ で表すとき、 $\mathcal{S}^\infty = \{f \in H(\mathbb{D}) : f' \in H^\infty(\mathbb{D})\}$ は Novinger and Oberlin が扱わなかった $p = \infty$ の場合となる。そこで $\mathcal{S}^\infty$ に $|f(0)| + \|f'\|_\infty$ をノルムとして与え、全射等距離写像を決定したい。また、 $C^1([0, 1])$ と同様に、 $\mathcal{S}^\infty$ には $\sup_{z \in \mathbb{D}} (|f(z)| + |f'(z)|)$ や $\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ など様々なノルムが考えられる。これらのノルムに関する等距離写像はどのような形をしているのであろうか。 $H^\infty(\mathbb{D})$ の関数は、 $\mathbb{D}$ の境界付近での挙動がよく分からず、筆者は全射等距離写像を決定出来ていない。そこで $C^1([0, 1])$ のように、境界での連続性を仮定した関数を考えるため、まずは $A = \{f \in H(\mathbb{D}) : f' \in A(\bar{\mathbb{D}})\}$ 上の全射等距離写像を調べたい。ただし $A(\bar{\mathbb{D}})$ は $H(\mathbb{D})$ の関数で $\mathbb{D}$ の閉包 $\bar{\mathbb{D}}$ へ連続的に拡張可能なもの全体である。これらの問題のいくつかについては、現在論文を執筆中あるいは論文を投稿中であり、本稿では詳細を控える。

参考文献

- [1] J. Araujo and J.J. Font, *Linear isometries between subspaces of continuous functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **349** (1997), 413–428.
- [2] R. Arens and J. Kelly, *Characterization of spaces of continuous functions over compact Hausdorff space*, Trans. Amer. Math. Soc. **62** (1947), 499–508.
- [3] S. Banach, *Theory of linear operations*, Translated by F. Jellet, Dover Publications, Inc. Mineola, New York, 2009.
- [4] F. Botelho and J. Jamison, *Surjective isometries on spaces of differentiable vector-valued functions*, Studia Math. **192** (2009), 39–50.
- [5] M. Cambern, *Isometries of certain Banach algebras*, Studia Math. **25** (1964-1965) 217–225.
- [6] J.A. Cima and W.R. Wogen, *On isometries of the Bloch space*, Illinois J. Math. **24** (1980), 313–316.
- [7] K. deLeeuw, W. Rudin and J. Wermer, *The isometries of some function spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **11** (1960), 694–698.
- [8] N. Dunford and J.T. Schwartz, *Linear operators. Part I. General theory*. With the assistance of William G. Bade and Robert G. Bartle. Reprint of the 1958 original. Wiley Classics Library. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1988.
- [9] A.J. Ellis, *Real characterizations of function algebras amongst function spaces*, Bull. London Math. Soc. **22** (1990), 381–385.
- [10] R. Fleming and J. Jamison, *Isometries on Banach spaces: function spaces*, Chapman & Hall/CRC Monogr. Surv. Pure Appl. Math. 129, Boca Raton, 2003.
- [11] R. Fleming and J. Jamison, *Isometries on Banach spaces Vol. 2. Vector-valued function spaces*, Chapman & Hall/CRC Monogr. Surv. Pure Appl. Math. 138, Boca Raton, 2008.
- [12] F. Forelli, *The isometries of H^p* , Canad J. Math. **16** (1964), 721–728.

- [13] G. Fröbenius, *Über die darstellung der endlichen gruppen durch lineare substitutionen*. Deutsch. Acad. Wiss. Berlin (1897), 994–1015.
- [14] O. Hatori and T. Miura, *Real linear isometries between function algebras. II*, Cent. Eur. J. Math. **11** (2013), 1838–1842.
- [15] O. Hatori, S. Oi, and H. Takagi, *Peculiar homomorphisms on algebras of vector-valued continuously differentiable maps*, Linear Nonlinear Anal. **3** (2017), no. 1, 101–109.
- [16] K. Jarosz, *Isometries in semisimple commutative Banach algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **94** (1985), 65–71.
- [17] K. Jarosz, *Any Banach space has an equivalent norm with trivial isometries*, Israel J. Math. **64** (1988), 49–56.
- [18] K. Jarosz and V.D. Pathak, *Isometries between function spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **305** (1988), 193–205.
- [19] M. Jerison, *The space of bounded maps into a Banach space*, Ann. of Math. (2) **52**, (1950), 309–327.
- [20] K. Kawamura, *Banach-Stone theorems for spaces of vector bundle continuous sections*, Topology Appl. **227** (2017), 118–134.
- [21] K. Kawamura, *Isometries of function spaces over Riemannian manifolds*, Acta Sci. Math. (Szeged) **83** (2017), 593–617.
- [22] K. Kawamura, *Banach-Stone type theorems for C^1 -function spaces over Riemannian manifolds*, Acta Sci. Math. (Szeged) **83** (2017), 551–591.
- [23] K. Kawamura, *Isometries of vector-valued function spaces preserving the kernel of a linear operator*, Publ. Math. Debrecen **92** (2018), 17–57.
- [24] K. Kawamura, *Perturbations of norms on C^1 -function spaces and associated isometry groups*, Topology Proc. **51** (2018), 169–196.
- [25] K. Kawamura, *A Banach-Stone type theorem for C^1 -function spaces over the circle*, Topology Proc. **53** (2019), 15–26.
- [26] K. Kawamura and T. Miura, *Real-linear surjective isometries between function spaces*, Topology Appl., **226** (2017), 66–85.
- [27] K. Kawamura, H. Koshimizu and T. Miura, *Norms on $C^1([0, 1])$ and their isometries*, Acta Sci. Math. (Szeged), **84** (2018), 239–261.
- [28] H. Koshimizu, *Finite codimensional linear isometries on spaces of differentiable and Lipschitz functions*, Cent. Eur. J. Math. **9** (2011) 139–146.
- [29] H. Koshimizu, *Linear isometries on spaces of continuously differentiable and Lipschitz continuous functions*, Nihonkai Math. J. **22** (2011), 73–90.
- [30] H. Koshimizu, T. Miura, H. Takagi and S.-E. Takahasi, *Real-linear isometries between subspaces of continuous functions*, J. Math. Anal. Appl. **413** (2014) 229–241.
- [31] S. Mazur and S. Ulam, *Sur les transformations isométriques d’espaces vectoriels normés*, C. R. Acad. Sci. Paris **194** (1932), 946–948.
- [32] T. Miura, *Real-linear isometries between function algebras*, Cent. Eur. J. Math. **9** (2011), 778–788.
- [33] T. Miura, *Surjective isometries between function spaces*, Contemp. Math. **645** (2015), 231–239.
- [34] T. Miura and H. Takagi, *Surjective isometries on the Banach space of continuously differentiable functions*, Contemp. Math. **687** (2017), 181–192.
- [35] L. Molnár, *Some characterizations of the automorphisms of $B(H)$ and $C(X)$* , Proc. Amer. Math. Soc., **130** (2002), 111–120.
- [36] L. Molnár, *Selected preserver problems on algebraic structures of linear operators and on function spaces*, Lecture Notes in Math. **vol 1895**, Springer (2006).

- [37] M. Nagasawa, *Isomorphisms between commutative Banach algebras with an application to rings of analytic functions*, Kōdai Math. Sem. Rep. **11** (1959), 182–188.
- [38] W.P. Novinger and D.M. Oberlin, *Linear isometries of some normed spaces of analytic functions*, Can. J. Math. **37** (1985), 62–74.
- [39] S. Oi, *Homomorphisms between algebras of Lipschitz functions with the values in function algebras*, J. Math. Anal. Appl. **444** (2016), 210–229.
- [40] V.D. Pathak, *Isometries of $C^{(n)}[0, 1]$* , Pacific J. Math. **94** (1981), 211–222.
- [41] N.V. Rao and A.K. Roy, *Linear isometries of some function spaces*, Pacific J. Math. **38** (1971), 177–192.
- [42] M.H. Stone, *Applications of the theory of Boolean rings to general topology*, Trans. Amer. Math. Soc. **41** (1937), 375–481.
- [43] J. Väisälä, *A proof of the Mazur-Ulam theorem*, Amer. Math. Monthly, **110-7** (2003), 633–635.