対称マルコフ過程における加法的汎関数の大偏差原理

土田　兼治　(防衛大学校)*

1. 序

本講演では，対称マルコフ過程から生成される加法的汎関数の大偏差原理について，これまでの結果と最近のZhen-Qing Chen氏(University of Washington)との共同研究([6])について述べる．ここで扱う加法的汎関数は，ある滑らかな測度にルヴューズ(Revuz)対応する連続加法的汎関数と有界な関数から生成される純不連続加法的汎関数である．これらの加法的汎関数には，マルコフ過程の局所時間やコンパクト集合の滞在時間，そして二つの互いに素なコンパクト集合間のジャンプの回数などが含まれる．したがって，加法的汎関数の極限挙動である大偏差原理を研究することは，マルコフ過程の性質を調べる上で大きな役割を果たすと考えられる．本講演では，これら加法的汎関数の単独または結合した確率過程の大偏差原理を述べることを主眼とする．

大偏差原理の証明において重要となるのが，ゲルトナー・エリス(Gärtner-Ellis)の定理である．ゲルトナー・エリスの定理は，ある確率過程の対数モーメント母関数が存在し微分可能であれば，その確率過程の大偏差原理が成り立つことを主張している．しかし，対数モーメント母関数の微分可能性を直接的に証明することは一般には難しい．そこで，マルコフ過程の生成作用素$\mathcal{L}$に，加法的汎関数を生成する測度μまたは関数Fによる摂動を加えたシュレディンガー作用素$\mathcal{L}^{\theta_1\mu,\theta_2 F}$ $(\theta_1,\theta_2\in\mathbb{R})$に関する半群のスペクトル半径の$L^p$-独立性(その半群を$L^p$から$L^p$への作用素と考えたとき，そのスペクトル半径が$p$に依存しないこと)を用いると，対数モーメント母関数が$-\inf\sigma(\mathcal{L}^{\theta_1\mu,\theta_2 F})$に等しくなることがわかる．ここで，$\sigma(\mathcal{L}^{\theta_1\mu,\theta_2 F})$はシュレディンガー作用素$\mathcal{L}^{\theta_1\mu,\theta_2 F}$のスペクトルを表す．この関数をスペクトル関数と呼ぶことにすると，L^p-独立性が成り立てばスペクトル関数と対数モーメント母関数が等しくなることがわかる．スペクトル関数を考えることにより，ディリクレ形式の理論([2], [8])と解析的摂動論([9])を用いてその挙動を解析することが可能になる．したがって，本講演ではL^p-独立性を維持する対称マルコフ過程とその加法的汎関数のクラスに的を絞る．

これまでの研究においては，対数モーメント母関数(スペクトル関数)の微分可能性を直接的に証明することによって大偏差原理を得てきた．そのために，ファインマン・カッツ汎関数の可積分性(ゲージアビリティ，条件付きゲージアビリティ)，シュレディンガー作用素の臨界性(グリーン関数は存在しないが，調和関数は存在すること)，マルコフ過程に対する楕円型ハルナック不等式，ハリスの意味で再帰的な対称マルコフ過程に対する大島の不等式，そして解析的摂動論を用いた．具体的な例として，ここでは連続加法的汎関数についてだけ結果を述べる．基礎となる対称マルコフ過程が，$\mathbb{R}^d$上のブラウン運動$(d\le 4)$，対称安定過程$(d\le 2\alpha)$，相対論的安定過程$(d\le 4)$などの場合で，連続加法的汎関数を生成する測度がグリーン緊密性を持つ加藤クラスに属す

本研究は科研費(課題番号:17K05309(C))の助成を受けたものである．
2010 Mathematics Subject Classification: 60F10, 60J55, 31C25
キーワード：大偏差原理, 加法的汎関数, スペクトル関数
* 〒239-8686 神奈川県横須賀市走水1-10-20　防衛大学校 総合教育学群 数学教育室
e-mail: tsuchida@nda.ac.jp

る場合において，対数モーメント母関数の微分可能性を示し，加法的汎関数の大偏差原理が成り立つことを証明した．対称マルコフ過程の状態空間の次元に制限があるのは，臨界的シュレディンガー作用素の調和関数の無限遠方での漸近挙動 (対応するマルコフ過程のグリーン関数の挙動と同じとなる) に関係する．つまりこの方法では，比較的低い次元の対称マルコフ過程の場合でしか大偏差原理を証明できない．しかも，例えば対称安定過程で $d > 2\alpha$ の場合，対数モーメント母関数は微分不可能であることも証明した．けれども，ゲルトナー・エリスの定理は大偏差原理が成り立つための十分条件を与えているだけなので，対数モーメント母関数が微分不可能だからといって大偏差原理が成り立たないというわけではない．しかし，最近まで高次元の場合の対称マルコフ過程 (ブラウン運動を除く) に関する加法的汎関数の大偏差原理が成り立つのかはわからなかった．

さて，最近 Chen 氏との共同研究 ([6]) において，一般的な設定において加法的汎関数の大偏差原理を証明した．特に対称マルコフ過程の状態空間がユークリッド空間である必要すらないことに注意しておく．この結果の詳しい内容については本講演の後半で述べる．

2. 設定

E をルジン空間，すなわち E はあるコンパクト距離空間のあるボレル部分集合と同相であるとする．m を E 上の σ-有限な $\mathrm{supp}[m] = E$ となる測度とする．
$X = (\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \{X_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P}_x, \theta_t, \zeta)$ を E 上の m-対称ボレル右過程とする．ここで ζ は X の生存時間である．X は推移密度関数 $p(t,x,y)$ を持つと仮定し，$\{P_t\}_{t\geq 0}$ を $\mathbf{M}$ の半群，すなわち

$$P_t f(x) = \mathbb{E}_x[f(X_t)] = \int_E p(t,x,y) f(y) m(dy)$$

とする．$(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ を X に関するディリクレ形式とする．すなわち，

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(u,u) &= \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t} (u - P_t u, u)_{L^2} \\ \mathcal{F} &= \left\{ u \in L^2(E,m) : \mathcal{E}(u,u) < \infty \right\} \end{aligned}$$

である．そのとき，$(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ は準正則 (quasi-regular) なディリクレ形式となる．$(\mathcal{F}_e, \mathcal{E})$ を $(\mathcal{F}, \mathcal{E})$ に関する拡大ディリクレ空間とする．

準同相表現 (quasi homeomorphism representation)([5]) により，E は局所コンパクト可分距離空間，m を E 上の正のラドン測度で $\mathrm{supp}[m] = E$ となるもの，X は E 上の m-対称ハント過程，そして $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ を $L^2(E;m)$ 上の正則ディリクレ形式として一般性を失わないので，以下はその設定で考える．$(N(x,dy), H_t)$ を X のレヴィ系とする．よって，ディリクレ形式 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ の飛躍測度，消滅測度はそれぞれ，

$$J(dx,dy) = \frac{1}{2} N(x,dy) \mu_H(dx), \quad \kappa(dx) = N(x, \{\partial\}) \mu_H(dx) \tag{1}$$

となる．ここで，μ_H は加法的汎関数 H_t のルヴューズ測度とする (定理 2.3 を参照).

R_α を X の α-レゾルベント ($\alpha \geq 0$)，すなわち

$$R_\alpha f(x) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} P_t f(x) dt$$

とし，X が過渡的である場合 R_0 を R とおく．

定義 2.1 ([8]). 確率過程 $\{A_t(\omega)\}_{t\geq 0}$ が X の (狭義) 加法的汎関数であるとは，次の性質を満たすときにいう．

(A.1) 各 $t \geq 0$ に対して，$A_t(\cdot)$ は $\mathcal{F}_t$-可測．

(A.2) 定義集合 $\Lambda \in \mathcal{F}_\infty$ が存在して，

$$\mathbb{P}_x(\Lambda) = 1,\ \forall x \in E, \quad \theta_t\Lambda \subset \Lambda,\ \forall t > 0$$

を満たす．さらに，任意の $\omega \in \Lambda$ に対して，$A_\cdot(\omega)$ は $[0,\infty)$ 上で右連続，$(0,\zeta(\omega))$ 上で左極限を持ち，

- $A_0(\omega) = 0$
- $|A_t(\omega)| < \infty,\ (\forall t < \zeta(\omega))$
- $A_t(\omega) = A_{\zeta(\omega)}(\omega),\ (\forall t \geq \zeta(\omega))$

を満たす．さらに，加法性

$$A_{t+s}(\omega) = A_t(\omega) + A_s(\theta_t\omega), \quad \forall t, s \geq 0$$

を持つ．

注意 2.2. 加法的汎関数を定義する際，定義 2.1 の (A.2) における定義集合の満たすべき条件は，“適切除外集合 $N \subset E$ が存在して，$\mathbb{P}_x(\Lambda) = 1,\ \forall E \setminus N$” とするべきところである．しかし，以下で定義する本講演で中心的な役割を果たすクラス $\mathcal{K}_\infty$ に属する測度は，ラドン測度でありそのポテンシャルは有界なので狭い意味で滑らかな測度である．狭い意味で滑らかな測度に対応する加法的汎関数は狭義であるから，適切除外集合を空集合としてよい．

$\mathcal{S}(X)$ を X に関する狭い意味で滑らかな正のボレル測度全体の集合とする．

定理 2.3 (ルヴューズ (Revuz) 対応). $\mu \in \mathcal{S}(X)$ に対して正の加法的汎関数 A^μ_t が以下のように一対一に対応する：$f \in \mathcal{B}^+(E)$ と γ-超過関数 h $(\gamma \geq 0,\ e^{-\gamma t}P_t h \leq h)$ に対し，

$$\int_E f(x)h(x)\mu(dx) = \lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}\int_E \mathbb{E}_x\left[\int_0^t f(X_s)dA^\mu_s\right]h(x)m(dx).$$

逆に，μ を A^μ_t に対するルヴューズ測度という．

ここで，本講演で中心的な役割を果たす測度のクラスを定義する．以下では μ は符号付き測度で，$\mu = \mu^+ - \mu^- \in \mathcal{S}(X) - \mathcal{S}(X)$ であるとする．

定義 2.4. (i) 測度 μ が加藤クラス $\mathcal{K}$ に属するとは，

$$\lim_{t\to 0}\sup_{x\in E}\mathbb{E}_x[A^{|\mu|}_t] = 0 \tag{2}$$

が成り立つときにいう．μ の任意のコンパクト集合 K への制限 $\mu_K(\cdot) = \mu(K \cap \cdot)$ が $\mathcal{K}$ に属するとき $\mu \in \mathcal{K}_{\mathrm{loc}}$ と表す．

(ii) 測度μが$\mathcal{K}_\infty(X^{(1)})$に属するとは，任意の$\epsilon > 0$に対して，コンパクト集合$K$と$\delta > 0$が存在して，$|\mu|(B) < \delta$を満たす任意のボレル集合$B \subset K$で

$$\sup_{x \in E} R_1(1_{K^c \cup B}|\mu|)(x) \le \epsilon \tag{3}$$

が成り立つときにいう．Xが過渡的な場合はR_1をRとして(3)が成り立つ測度の集合を$\mathcal{K}_\infty(X)$と記す．

以下では，特に断らない限り$\mathcal{K}_\infty$によって，再帰的な場合は$\mathcal{K}_\infty(X^{(1)})$を，過渡的な場合は$\mathcal{K}_\infty(X)$を意味するものとする．

次に不連続な加法的汎関数を定義するための関数のクラスを定義する．

定義 2.5. $E \times E$上の有界なボレル関数Fで，任意の$x, y \in E$に対し$F(x,y) = F(y,x)$, $F(x,x) = 0$を満たすとする．Fがクラス$\mathcal{J}_\infty$に属するとは，

$$\mu_{|F|} := \left(\int_E |F(x,y)| N(x,dy) \right) \mu_H(dx) \in \mathcal{K}_\infty$$

であるときにいう．

$F \in \mathcal{J}_\infty$に対して，A_t^Fを

$$A_t^F = \sum_{0 < s \le t} F(X_{s-}, X_s) 1_{\{s < \zeta\}}$$

と定義すると，これはXの純不連続加法的汎関数となる．さらに$F \ge 0$に対して，

$$\mathbb{E}_x \left[\sum_{0 < s \le t} F(X_{s-}, X_s); t < \zeta \right] = \mathbb{E}_x \left[\int_0^t \int_E F(X_s, y) N(X_s, dy) dH_s \right]$$

が成り立つ．

$\mu \in \mathcal{K}_\infty$かつ$F \in \mathcal{J}_\infty$とする．以下のような非局所的ファインマン・カッツ汎関数

$$e_{A^\mu + F}(t) := \exp(A_t^\mu + A_t^F)$$

を考える．そのとき，ファインマン・カッツ半群

$$T_t^{\mu,F} f(x) := \mathbb{E}_x[e_{A^\mu + F} f(X_t)]$$

は$L^p(E;m)$ $(1 \le p \le \infty)$上で強連続な対称半群となることが知られている．したがって，極限

$$\lambda_p(X; \mu, F) := -\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \log \|T_t^{\mu,F}\|_{p,p}$$

が存在する．これを半群$\{T_t^{\mu,F}\}$のL^p-スペクトル半径と呼ぶ．$\mathcal{E}^{\mu,F}$が半群$\{T_t^{\mu,F}\}$に関する$L^2(E;m)$上の二次形式であるとすると，

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}^{\mu,F}(u,u) &= \mathcal{E}(u,u) - \int_E u(x)^2 \mu(dx) - \iint_{E \times E \setminus d} u(x)u(y) \left(e^{F(x,y)} - 1\right) N(x,dy)\mu_H(dx) \\
&= \mathcal{E}^c(u,u) + \iint_{E \times E \setminus d} (u(x) - u(y))^2 e^{F(x,y)} J(dx,dy) + \int_E u(x)^2 \kappa(dx) \\
&\quad - \int_E u(x)^2 \mu(dx) - \int_E u(x)^2 \nu_F(dx)
\end{aligned} \tag{4}$$

となる．ここで，$J(dx,dy)$, $\kappa(dx)$ はそれぞれ (1) で定義されたディリクレ形式の飛躍測度，消滅測度であり，$\nu_F(dx)=\left(\int_E(e^{F(x,y)}-1)N(x,dy)\right)\mu_H(dx)$ である．形式的には，半群 $\{T_t^{\mu,F}\}$ の L^2-生成作用素は

$$\mathcal{L}^{\mu,F}:=\mathcal{L}+\mu_H\mathbf{F}+\mu$$

と表される．ここで，$\mathcal{L}$ は X の生成作用素であり，形式的な作用素 $\mu_H\mathbf{F}$ は

$$\mu_H\mathbf{F}f(dx):=\left(\int_E\left(e^{F(x,y)}-1\right)f(y)N(x,dy)\right)\mu_H(dx)$$

と定義される．

3. ゲルトナー・エリスの定理

$(\mathbb{P}_x^Z,Z_t)$ を $\mathbb{R}^d$-値確率過程とする．

定義 3.1. $\theta\in\mathbb{R}^d$ とする．極限

$$\Lambda(\theta)=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\mathbb{E}_x^Z[\exp(\langle\theta,Z_t\rangle)] \tag{5}$$

が存在するならば，$\Lambda(\theta)$ を Z_t の対数モーメント母関数という．ここで，$\langle\theta,Z_t\rangle$ は θ と Z_t のユークリッド内積を表す．

では，大偏差原理を証明するために有用であるゲルトナー・エリス (Gärtner-Ellis) の定理を述べる．

定理 3.2 ([7, Theorem 2.3.6])**.** 対数モーメント母関数 (5) が存在し，微分可能であれば，以下の大偏差原理が成り立つ．

(I) 閉集合 $F\subset\mathbb{R}^d$ に対して，

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\mathbb{P}_x^Z\left(\frac{Z_t}{t}\in F\right)\le-\inf_{\lambda\in F}I(\lambda). \tag{6}$$

(II) 開集合 $G\subset\mathbb{R}^d$ に対して，

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\mathbb{P}_x^Z\left(\frac{Z_t}{t}\in G\right)\ge-\inf_{\lambda\in G}I(\lambda) \tag{7}$$

ここで，$I(\lambda)$ はレート関数であり，対数モーメント母関数 $\Lambda(\theta)$ のルジャンドル変換

$$I(\lambda)=\sup_{\theta\in\mathbb{R}^d}(\langle\theta,\lambda\rangle-\Lambda(\theta)),\quad(\lambda\in\mathbb{R}^d)$$

によって与えられる．

注意 3.3.

1. 大偏差原理の上からの評価 (6) は，極限 (5) が存在すれば成立する．
2. さらに，対数モーメント母関数の微分可能であれば，大偏差原理の下からの評価 (7) が成立する．

本講演では，上の定理を $d=1$ または 2 の場合に対して用いる．

4. 対数モーメント母関数について

本節では，ある特定の条件の下で対数モーメント母関数はファインマン・カッツ半群のL^2-スペクトル半径で表現できることを述べる．まずはシュレディンガー半群のスペクトル半径のL^p-独立性についての研究を紹介する．

定理 4.1 ([1, Theorem 5.4(i)])**.** μは符号付き測度で，$\mu^+ \in \mathcal{K}_\infty$かつ$R_1\mu^-$が有界であり，$F \in \mathcal{J}_\infty$とする．$\lambda_2(X;\mu,F) \leq 0$ならば，$\lambda_p(X;\mu,F)$は$p \in [1,\infty]$とは独立である．

注意 4.2. L^p-独立性について，ここでは[1]を引用したが，ファインマン・カッツ半群のスペクトル半径のL^p-独立性についての研究は数多くある．[12]において強フェラー性をもつ保存的なフェラー過程に対して$\lambda_p(X;\mu,0)$のL^p-独立性が示され，[16]では同じ条件の下で$\lambda_p(X;0,F)$の場合のL^p-独立性が示されている．定理4.1は現在のところ，[3]においてさらに広いクラスのμ, Fに対し，そして福島分解におけるエネルギーゼロの加法的汎関数を加えた場合も含めて一般化されている．

定理4.1を用いると，(A_t^μ, A_t^F)の対数モーメント母関数がL^2-スペクトル表示されることがわかる．

定理 4.3 ([6, Theorem 5.2])**.** $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$とする．$\mu \in \mathcal{K}_\infty$と$F \in \mathcal{J}_\infty$に対して，$\lambda_2(X;\theta_1\mu, \theta_2 F) \leq 0$であるとき，

$$\begin{aligned}
\Lambda(\theta) &= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{E}_x[\exp(\theta_1 A_t^\mu + \theta_2 A_t^F); t < \zeta] \\
&= -\lambda_2(X;\theta_1\mu, \theta_2 F) \\
&= -\inf\left\{\mathcal{E}^{\theta_1\mu,\theta_2 F}(u,u) : u \in \mathcal{F},\ \int_E u^2 dm = 1\right\}, \quad x \in E
\end{aligned}$$

が成り立つ．

5. スペクトル関数の微分可能性

本節では主に[11, 13, 14, 15, 19, 20]の結果を紹介する．$E = \mathbb{R}^d$とし，$\theta_1 \in \mathbb{R}$とする．そのとき，$\mu \in \mathcal{K}_\infty$としてスペクトル関数$C_1(\theta_1)$を以下のように定義する：

$$C_1(\theta_1) = -\lambda_2(X;\theta_1\mu, 0) = -\inf\left\{\mathcal{E}(u,u) - \theta_1 \int_{\mathbb{R}^d} u^2 d\mu : u \in \mathcal{F},\ \int_{\mathbb{R}^d} u^2 dx = 1\right\}.$$

定理 5.1 ([11, 13])**.** Xを$\mathbb{R}^d$上のブラウン運動とする．$d \leq 4$のとき，$C_1(\theta_1)$は微分可能である．

定理 5.2 ([14])**.** Xを対称α-安定過程とする．$d \leq 2\alpha$のとき，$C_1(\theta_1)$は微分可能である．また，$d > 2\alpha$のとき$C_1(\theta_1)$は微分不可能である．

定理 5.3 ([19])**.** Xを相対論的α-安定過程とする．$d \leq 4$のとき，$C_1(\theta_1)$は微分可能である．

注意 5.4.
1. 微分不可能性については定理5.2だけで述べたが，$d \geq 5$におけるブラウン運動，相対論的α-安定過程に対しても成り立つ．
2. 過渡的な場合，定理5.1，5.2，5.3は，証明において条件付きゲージアビリティの議論を用いるため，条件付きゲージアビリティを判定する条件が使える測度のク

ラスである $\mathcal{S}_\infty(\subset \mathcal{K}_\infty)$ において定理を証明する．しかし，ブラウン運動，対称 α-安定過程においては，$3G$-不等式と呼ばれるグリーン関数に対する不等式から $\mathcal{S}_\infty = \mathcal{K}_\infty$ であることがわかる．相対論的 α-安定過程に対しては，[19] において $\mathcal{S}_\infty$ のクラスでしか証明できていなかった．しかし，最近 [10] において $\mathcal{K}_\infty = \mathcal{S}_\infty$ であることが示されたので，$\mathcal{K}_\infty$ のクラスで微分可能性が成り立つことがわかった．

3. 正の測度 μ がクラス $\mathcal{K}_\infty$ に属するとする．過渡的な場合において，定理 5.3([19]) では当初，埋め込み $\mathcal{F}_e \to L^2(\mu)$ がコンパクトであることを仮定した．しかし，Chen 氏との共同研究 ([6]) においてこの仮定をはずすことができた．

4. [17] において，シンボルが対称 α-安定過程に近い形の擬微分作用素から生成されるマルコフ過程に対する大偏差原理を証明し，自明でない例を構成した．[20] において $C_1(\theta_1)$ が微分可能になるための十分条件を与えた．

上の定理 5.1，5.2，5.3 の場合，つまり，X が $\mathbb{R}^d$ 上のブラウン運動，対称 α-安定過程，相対論的 α-安定過程において，それらのマルコフ過程は保存的であり，定理 4.3 の仮定を満足することが知られている．よって，$\zeta = \infty$ としてスペクトル関数は対数モーメント母関数と等しくなる．したがって，これらの場合スペクトル関数が微分可能であるならば，ゲルトナー・エリスの定理より以下の大偏差原理が成立する．

定理 5.5. (I) 任意の閉集合 $F \subset \mathbb{R}$ に対して，

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{P}_x \left(\frac{A_t^\mu}{t} \in F \right) \leq \inf_{\lambda \in F} I(\lambda).$$

(II) 任意の開集合 $G \subset \mathbb{R}$ に対して，

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{P}_x \left(\frac{A_t^\mu}{t} \in G \right) \geq \inf_{\lambda \in G} I(\lambda).$$

ここで，$I(\lambda)$ は $C_1(\theta_1)$ のルジャンドル変換

$$I(\lambda) = \sup_{\theta_1 \in \mathbb{R}} (\theta_1 \lambda - C_1(\theta_1)), \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

である．

本節最後では，不連続型加法的汎関数の大偏差原理についての結果を述べる．X は $\mathbb{R}^d$ 上の対称 α-安定過程，$F \geq 0$ とする．

定義 5.6. $d > \alpha$ であるとき (すなわち，X が過渡的であるとき)，$F \in \mathcal{J}_\infty$ が $\mathcal{A}_\infty$ に属するとは，任意の $\epsilon > 0$ に対して，ある μ_F-測度有限のボレル集合 K とある定数 $\delta > 0$ が存在して任意の $\mu_F(B) < \delta$ を満たす可測集合 $B \subset K$ に対して，

$$\sup_{(x,w)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\setminus d} \iint_{((K\setminus B)\times(K\setminus B))^c} \frac{G(x,y)F(y,z)G(z,w)}{G(x,w)} N(x,dy)dz \leq \epsilon$$

が成り立つときをいう．ここで，$G(x,y)$ は X のグリーン関数である．

$\theta_2 \in \mathbb{R}$ とする．スペクトル関数 $C_2(\theta_2)$ を

$$C_2(\theta_2) = -\lambda_2(X; 0, \theta_2 F) = -\inf\left\{\mathcal{E}^{\theta_2 F}(u,u) : u \in \mathcal{F},\ \int_{\mathbb{R}^d} u^2 dx = 1\right\} \tag{8}$$

と定義する．

定理 5.7 ([15, Theorem 1.1])**.** $d \le \alpha$ のとき $F \in \mathcal{J}_\infty$，$\alpha < d \le 2\alpha$ のとき $F \in \mathcal{A}_\infty$ とする．そのとき，定理5.5において A_t^μ を $A_t^F (= \sum_{0<s\le t} F(X_{s-}, X_s))$，$I(\lambda)$ を $C_2(\theta_2)$ のルジャンドル変換とおきかえても大偏差原理が成立する．

定理5.7の証明の方針を簡単に述べる．まず，この場合も定理4.3の仮定を満たすので，スペクトル関数 $C_2(\theta_2)$ は A_t^F の対数モーメント母関数となる．よって，A_t^μ の場合と同様に $C_2(\theta_2)$ の微分可能性を示すことにより大偏差原理を証明できる．加法的汎関数がジャンプ型なので非局所的摂動を考えなければならない．そこで，飛躍型のギルサノフ変換を通して，非局所的摂動から局所的摂動に変換することで定理5.2の場合に帰着させて証明することがキーポイントである．

例 5.8. コンパクト集合 $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^d$, $(K_1 \cap K_2 = \emptyset,\ d \le 2\alpha)$ に対して，

$$F(x,y) = 1_{K_1}(x)1_{K_2}(y) + 1_{K_2}(x)1_{K_1}(y)$$

とおく．そのとき，F は定理5.7の条件を満たし，対応する加法的汎関数 A_t^F は

$$A_t^F = \sum_{0<s\le t} F(X_{s-}, X_s) = \sharp\{s : 0 < s \le t,\ X_{s-} \in K_i,\ X_s \in K_j,\ i \ne j,\ i,j = 1,2\}$$

である．つまり，時刻 t までに対称 α-安定過程がコンパクト集合 K_1, K_2 間をジャンプした回数を表す．

6. 一般的な設定における大偏差原理

本節では Chen 氏との共同研究 ([6]) について述べる．前節で述べたように，これまで X は保存的かつ $\mathbb{R}^d$ 上の比較的小さい d における対称マルコフ過程で，不連続型加法的汎関数の場合は $F \ge 0$ でしか大偏差原理は証明できていなかったが，本研究においてこれらの条件はすべて除くことができた．また，$\theta \in \mathbb{R}$ として $C(\theta) = -\lambda_2(X; \theta\mu, 0)$ または $-\lambda_2(X; 0, \theta F)$ のように連続または不連続の一方だけに対する加法的汎関数の大偏差原理しか扱っていなかったが，$\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$ として $C(\theta) = -\lambda(X; \theta_1\mu, \theta_2 F)$ のように連続と不連続との結合 (A_t^μ, A_t^F) についての大偏差原理を得た．

§2の設定に戻る．つまり，E は局所コンパクト可分距離空間，m を E 上のラドン測度で $\mathrm{supp}[m] = E$ となるもの，X を E 上の m-対称ハント過程とする．$(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ を X に関するディリクレ形式とする．X は推移密度関数 $p(t,x,y)$ を持つものと仮定する．

$\theta := (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$ に対して，$\mathcal{L}^{\theta_1\mu, \theta_2 F}$ のスペクトル関数 $C(\theta)$ を

$$C(\theta) := -\lambda_2(X; \theta_1\mu, \theta_2 F) = -\inf\left\{\mathcal{E}^{\theta_1\mu, \theta_2 F}(u,u) : u \in \mathcal{F},\ \int_E u(x)^2 m(dx) = 1\right\}$$

と定義する．ここで，$\mathcal{E}^{\theta_1\mu, \theta_2 F}$ は (4) と同様に定義される．

まずは，状態空間 E の m-全測度が有限の場合についての結果を述べる．$C(\theta) = C(\theta_1, \theta_2)$ のルジャンドル変換 I を

$$I(\lambda_1, \lambda_2) = \sup_{(\theta_1,\theta_2)\in\mathbb{R}^2} (\lambda_1\theta_1 + \lambda_2\theta_2 - C(\theta_1, \theta_2)), \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

によって定義する．

定理 6.1. $m(E) < \infty$ とする．X はある $t = t_0 > 0$ に対して $E \times E$ 上で有界である推移密度関数 $p(t, x, y)$ を持つとする．$\mu \in \mathcal{K}_\infty$ かつ $F \in \mathcal{J}_\infty$ とする．そのとき，すべての $x \in E$ とすべてのボレル集合 $E_0 \subset \mathbb{R}^2$ に対して，

$$\begin{aligned} -\inf_{(\lambda_1,\lambda_2)\in E_0^o} I(\lambda_1, \lambda_2) &\leq \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{P}_x \left(\left(\frac{A_t^\mu}{t}, \frac{A_t^F}{t} \right) \in E_0^o; t < \zeta \right) \\ &\leq \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{P}_x \left(\left(\frac{A_t^\mu}{t}, \frac{A_t^F}{t} \right) \in \overline{E}_0; t < \zeta \right) \\ &\leq -\inf_{(\lambda_1,\lambda_2)\in\overline{E}_0} I(\lambda_1, \lambda_2) \end{aligned}$$

が成り立つ．ここで，$E_0^o, \overline{E}_0$ はそれぞれ E_0 の内部，閉包を表す．

定理6.1の証明のキーポイントは，$d = 2$ に対してゲルトナー・エリスの定理を用いることである．まず $m(E) < \infty$ より，すべての $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$ に対して，シュレディンガー半群のスペクトル半径の L^p-独立性の議論より，$\lambda_2(X; \theta_1\mu, \theta_2 F) = \lambda_\infty(X; \theta_1\mu, \theta_2 F)$ が成り立つことに注目する．よって，$C(\theta) = C(\theta_1, \theta_2)$ は結合過程 (A_t^μ, A_t^F) の対数モーメント母関数となる．すなわち，

$$C(\theta) = C(\theta_1, \theta_2) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{E}_x \left[\exp(\theta_1 A_t^\mu + \theta_2 A_t^F); t < \zeta \right]$$

が成り立つ．ある $t_0 > 0$ に対して $E \times E$ 上で $p(t_0, x, y)$ は有界であり，$m(E) < \infty$ なので，すべての $t \geq t_0$ と $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$ に対してシュレディンガー半群 $T_t^{\theta_1\mu,\theta_2 F}$ はコンパクトである．したがって，$T_t^{\theta_1\mu,\theta_2 F}$ は離散スペクトルを持つ．ゆえに，$C(\theta_1, \theta_2)$ は解析的摂動論 ([9]) より微分可能となる．これより，定理6.1を得る．

次に $m(E) < \infty$ の仮定をはずしたい．$\{F_k,\ k \geq 1\}$ を E のコンパクト集合からなるその和集合が $\mathcal{E}$-q.e. で E になるような $\mathcal{E}$-ネストとする．

$$C^k(\theta_1, \theta_2) = -\inf \left\{ \mathcal{E}^{\theta_1\mu,\theta_2 F}(u, u) : u \in \mathcal{F}^{F_k},\ \int_{F_k} u^2 dm = 1 \right\}$$

と定義する．ここで，

$$\mathcal{F}^{F_k} = \{u \in \mathcal{F} : u = 0 \text{ q.e. on } E \setminus F_k\}$$

である．I^k を C^k のルジャンドル変換とする．$C^k(\theta)$ が $\mathbb{R}^2$ 上で凸であることは容易に示されるので，ミニ・マックス型定理 [18, Theorem 2] を用いると次の定理を得る．

定理 6.2. すべての $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ に対し，

$$\inf_{k\geq 1} I^k(x_1, x_2) = \lim_{k\to\infty} I^k(x_1, x_2) = I(x_1, x_2)$$

が成り立つ．

定理6.2が$m(E)<\infty$の仮定をはずすためのキーポイントとなる．

注意 6.3. 定義よりC^kはkに関して単調増大なので，I^kはkに関して単調減少となる．よって，I^kの極限は存在するが，それが全空間E上のスペクトル関数$C(\theta)$に対するルジャンドル変換になっていることを定理6.2は示している．

では，主結果を述べる．

定理 6.4. すべての$k\geq 1$に対してEのコンパクトな部分集合からなる$\mathcal{E}$-ネスト$\{F_k, k\geq 1\}$が存在し，推移密度関数$p(t,x,y)$はすべての$k\geq 1$に対してある$t=t_0$において$F_k\times F_k$上有界であるとする．$\mu\in\mathcal{K}_\infty$かつ$F\in\mathcal{J}_\infty$であるとする．さらに，すべての$(\theta_1,\theta_2)\in\mathbb{R}^2$に対して$\lambda_2(X;\theta_1\mu,\theta_2 F)=\lambda_\infty(X;\theta_1\mu,\theta_2 F)$を仮定する．そのとき，すべての$x\in E$とすべてのボレル集合$F\subset\mathbb{R}^2$に対して，

$$\begin{aligned}
-\inf_{(\lambda_1,\lambda_2)\in F^o} I(\lambda_1,\lambda_2) &\leq \liminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\mathbb{P}_x\left(\left(\frac{A_t^\mu}{t},\frac{A_t^F}{t}\right)\in F^o; t<\zeta\right)\\
&\leq \limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\mathbb{P}_x\left(\left(\frac{A_t^\mu}{t},\frac{A_t^F}{t}\right)\in \overline{F}; t<\zeta\right)\\
&\leq -\inf_{(\lambda_1,\lambda_2)\in\overline{F}} I(\lambda_1,\lambda_2)
\end{aligned}$$

が成り立つ．

定理6.4の証明の方針を述べる．大偏差原理の上からの評価はゲルトナー・エリスの定理をそのまま用いればよい．問題は下からの評価である．まずはXをF_kに制限した部分過程X^{F_k}(XがF_kを脱出するとき消滅する過程)に対しては，仮定と定理6.1より大偏差原理が成り立つ．つまり，Oを$\mathbb{R}^2$の任意の開集合とすると，

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\mathbb{P}_x\left(\left(\frac{A_t^\mu}{t},\frac{A_t^F}{t}\right)\in O; t<\tau_{F_k}\right)\geq -\inf_{(\lambda_1,\lambda_2)\in O} I^k(\lambda_1,\lambda_2)$$

が成り立つ．そのとき，定理6.2より

$$\begin{aligned}
&\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\mathbb{P}_x\left(\left(\frac{A_t^\mu}{t},\frac{A_t^F}{t}\right)\in O; t<\zeta\right)\\
\geq\ &\sup_{k\geq 1}\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\mathbb{P}_x\left(\left(\frac{A_t^\mu}{t},\frac{A_t^F}{t}\right)\in O; t<\tau_{F_k}\right)\\
\geq\ &\sup_{k\geq 1}\left(-\inf_{(\lambda_1,\lambda_2)\in O} I^k(\lambda_1,\lambda_2)\right)\\
=\ &-\inf_{(\lambda_1,\lambda_2)\in O}\left(\inf_{k\geq 1} I^k(\lambda_1,\lambda_2)\right)\\
=\ &-\inf_{(\lambda_1,\lambda_2)\in O} I(\lambda_1,\lambda_2)
\end{aligned}$$

を得る．

最後に定理6.4の仮定を満たす対称マルコフ過程Xの例を挙げる．

例 6.5. 1. $d\geq 1$とし，Xを$\mathbb{R}^d$上の飛躍型マルコフ過程でそのディリクレ形式の飛躍測度の核が

$$J(x,y)=\frac{c(x,y)}{|x-y|^d\phi(|x-y|)} \tag{9}$$

で与えられているものとする．ここで，$c(x,y)$はあるc_1,c_2が存在して$c_1 \le c(x,y) \le c_2$となる対称な関数で，ϕは次の条件を満たす増加関数である：$\phi(0)=0,\ \phi(1)=1$であり，ある定数$c_3,c_4>0$と$0<\alpha\le\beta<2$が存在して，

$$c_3\left(\frac{R}{r}\right)^{\alpha} \le \frac{\phi(R)}{\phi(r)} \le c_4\left(\frac{R}{r}\right)^{\beta}, \quad (0<r\le R<\infty). \tag{10}$$

これを混合安定型過程(mixed stable-like process)([4])という．
$\alpha=\beta$，$c(x,y)=$ "ある定数" であるときXは対称α-安定過程である．ここでは，安定過程のオーダーが変動し，ジャンプ核が$|x-y|$だけではなくx,yに依存する場合も許す．例えば，(9)を満たす例としては

$$J(x,y)=\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{c(\alpha,x,y)}{|x-y|^{d+\alpha}}\nu(d\alpha)$$

がある．ここで，νは$[\alpha_1,\alpha_2]\subset(0,2)$上の確率測度，$c(\alpha,x,y)$は可測で$(x,y)$に関して対称で，$c_5,c_6>0$に対して，$c_5\le c(\alpha,x,y)\le c_6$を満たすものとする．[4, Theorem 1.2]より，Xは保存的な強フェラー性をもつフェラー過程であり，定理6.4の仮定を満たすことがわかる．

2. $d\ge 1$とし，Xを$\mathbb{R}^d$上の飛躍型マルコフ過程でそのディリクレ形式の飛躍測度の核が(9)における$c(x,y)$と$\phi(x,y)$に対して，あるr_0が存在し，

$$J(x,y)\begin{cases} = \frac{c(x,y)}{|x-y|^d\phi(|x-y|)} & |x-y|\le r_0, \\ \le \frac{c(x,y)}{|x-y|^d\phi(|x-y|)} & |x-y|>r_0 \end{cases} \tag{11}$$

を満たすとする．この場合も[4]によりXは強フェラー性を持つフェラー過程になることが知られている．そして，定理6.4の仮定も満たすことがわかる．(11)を満たすXの例としては相対論的混合安定型過程(relativistic mixed stable-like process)や有界な大きさのジャンプしか許さない有限レンジ混合安定型過程(finite range mixed stable-like process)などがある．

以上に述べた研究で，グリーン緊密な加藤クラスの測度と関数から生成される連続，不連続な加法的汎関数の結合に対する大偏差原理をかなり一般的な設定で証明できた．さらに広いクラスの加法的汎関数を込めた形での大偏差原理を証明することが今後の課題となる．

参考文献

[1] Z.-Q. Chen, Uniform integrability of exponential martingales and spectral bounds of non-local Feynman-Kac semigroups. In *Stochatic Analysis and Applications to Finance*, Essays in Honor of Jia-an Yan (Eds by T. Zhang and X. Zhou), 2012. pp.55-75.

[2] Z.-Q. Chen and M. Fukushima, *Symmetric Markov Processes, Time Change, and Boundary Theory.* Princeton Univ. Press, 2012.

[3] Z.-Q. Chen, D. Kim and K. Kuwae, L^p-independence of spectral radius for generalized Feynman-Kac semigroups. preprint.

[4] Z.-Q. Chen and T. Kumagai, Heat kernel estimates for jump processes of mixed types on metric measure spaces. *Probab. Theory Relat. Fields* **140** (2008), 277-317.

[5] Z.-Q. Chen, Z.-M. Ma and M. Röckner, Quasi-homeomorphism of Dirichlet forms. *Nagoya J. Math.* **136** (1994), 1-15.

[6] Z.-Q. Chen and K. Tsuchida, Large deviation, compact embedding and differentiability of spectral functions. preprint.

[7] A. Dembo and O. Zeitouni, *Large Deviations Techniques and Applications*, Second edition, Applications of Mathematics, **38**, Springer-Verlag, New York, 1998.

[8] M. Fukushima, Y. Oshima and M. Takeda, *Dirichlet Forms and Symmetric Markov Processes*, Second edition, de Druyter, 2011.

[9] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*. Springer-Verlag, Berling-Heidelberg-New York, 1984.

[10] D. Kim and K. Kuwae, Analytic characterization of gaugeability for generalized Feynman-Kac functionals. *Trans. Amer. Math. Soc.* **369** (2017), 4545-4596.

[11] M. Takeda, Large deviation principle for additive functionals of Brownian motion corresponding to Kato measures. *Potential Anal.* **19** (2003), 51-67.

[12] M. Takeda, L^p-independence of spectral bounds of Schrödinger type semigroups. *J. Funct. Anal.* **252** (2007), 550-565.

[13] M. Takeda and K. Tsuchida, Ciriticality of generalized Schrödinger operators and differentiability of spectral functions. Advanced Studies in Pure Mathematics **41**. Math. Soc. of Japan, Tokyo, (2004), 333-350.

[14] M. Takeda and K. Tsuchida, Differentiability of spectral functions for symmetric α-stable processes. *Trans. Amer. Math. Soc.* **359** (2007), 4031-4054.

[15] M. Takeda and K. Tsuchida, Large deviation for discontinuous additive functionals of symmetric stable processes. Math. Nachr. **284** (2011), 1148-1171.

[16] Y. Tawara, L^p-independence of spectral bounds of Schrödinger type operators with non-local potentials. *J. Math. Soc. Japan* **62** (2010), 767-788.

[17] Y. Tawara and K. Tsuchida, Differentiability of spectral functions for nearly stable processes and large deviations. *Inf. Dim. Anal. Quan. Probab.* **17** (2014), 1450017, 15pages.

[18] F. Terkelsen, Some minimax theorems. *Math. Scand.* **31** (1972), 405-413.

[19] K. Tsuchida, Differentiability of spectral functions for relativistic α-stable processes with application to large deviations. *Potential Anal.* **28** (2008), 17-33.

[20] K. Tsuchida, On a sufficient condition for large deviations of additive functional. *Stoc. and Dyn.* **11** (2011), 157-181.