A RELATION BETWEEN REGULARITY STRUCTURES AND PARACONTROLLED CALCULUS

星野 壮登 (九大数理)

1. 導入：非適切な確率偏微分方程式の繰り込み

近年，非適切な非線形確率偏微分方程式 (SPDE) の繰り込みに関する理論が発展している．非適切な SPDE とは例えば Kardar-Parisi-Zhang (KPZ) 方程式 [25]

$$\partial_t h = \partial_x^2 h + (\partial_x h)^2 + \xi, \quad (t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}, \quad \xi \text{ は時空ホワイトノイズ} \tag{1.1}$$

のように，非線形項を "普通に" 計算すると計算結果が無限大になってしまい，解をうまく定義できないような SPDE のことである．実際，固定した t に対し KPZ 方程式の解が描く曲線 $h_t(x)$ は Brown 運動と同じ正則性 $\frac{1}{2} - \epsilon$ （$\epsilon > 0$ は任意）を持つ [14] が，このような曲線に対し非線形項 $(\partial_x h)^2$ は発散してしまう．KPZ 方程式は揺らぎを持って成長する界面モデルや非対称性のある無限個の粒子のランダムウォークのスケール極限に現れる重要なモデルである．しかしそのままでは解に意味を付けられないので，Cole-Hopf 変換を通して無理やり線形な SPDE に変形することで "Cole-Hopf 解" を定義してきた [5]．同様に非適切な SPDE の例として，Φ_d^4 モデル [30]

$$\partial_t \Phi = \Delta\Phi - \Phi^3 + \xi, \quad (t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^d, \quad \xi \text{ は時空ホワイトノイズ}$$

や 放物型 Anderson モデル (PAM)

$$\partial_t u = \Delta u + u\eta, \quad (t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^d, \quad \eta \text{ は空間ホワイトノイズ}$$

などがある．(d は 2 以上の整数.)

このような SPDE の解を "繰り込み" によって定義する次の 3 つの理論が最近登場した．

- Hairer による 正則構造理論 [21] （以下，Hairer 理論）．
- Gubinelli-Imkeller-Perkowski による パラコントロール解析 [18]（以下，GIP 理論）．
- Kupiainen による 繰り込み群 [26, 27] の方法.

これらの理論の帰結を KPZ 方程式 (1.1) の場合に説明すると次のようになる．$\epsilon \downarrow 0$ で ξ を近似する滑らかなノイズの族 ξ_ϵ を用意すると，(1.1) において ξ を ξ_ϵ に置き換えた方程式は古典的に解けるが，その解は $\epsilon \downarrow 0$ で爆発してしまう．しかし "繰り込み" を施した方程式

$$\partial_t h_\epsilon = \partial_x^2 h_\epsilon + (\partial_x h_\epsilon)^2 - C_\epsilon + \xi_\epsilon$$

を考えると，定数 $C_\epsilon = O(\frac{1}{\epsilon})$ を適切に選べば普遍的な関数 h に収束させられることが分かる[1]．このような繰り込みは Cole-Hopf 解の枠組みではすでに分かっていたが，Hairer 達はより包括的な枠組みで，Cole-Hopf 変換を経ずに繰り込み方程式を得ることに成功した [20, 19]．そして同様の繰り込みを，$d = 2,3$ 次元の Φ^4 モデル

$$\partial_t \Phi_\epsilon = \Delta\Phi_\epsilon - (\Phi_\epsilon^3 - C_\epsilon \Phi_\epsilon) + \xi_\epsilon$$

や $d = 2,3$ 次元 PAM

$$\partial_t u_\epsilon = \Delta u_\epsilon + u_\epsilon(\eta_\epsilon - C_\epsilon)$$

でも示した [21, 18, 9]．

３つの理論の内，ここでは Hairer 理論と GIP 理論に注目する．２つの理論は同じ結論を導くが，使っている道具が異なり，場面に応じて使い分けることができる．Hairer 理論では条件を満たす全ての SPDE の繰り込みを体系的に扱うことができる [23, 8, 10, 7] が，新しい概念や道具が多く，通常の実解析の議論と組み合わせにくい．一方 GIP 理論はまだ体系立ってはいないが，使っている道

[1] ここで述べる SPDE の繰り込みは全て周期境界条件の下で得られている．

具は既存のものである．[19, 32, 29, 24, 2, 17] などでは GIP 理論を使い，個別のモデルについて詳しい結果を得ることに成功している．本研究の目的は，２つの理論を組み合わせ，Hairer 理論のように体系立っているが，GIP 理論のように簡単な道具で展開できる理論を構築することである．そのためにまずは２つの理論が同値であること，つまり理論の運び方に互いに対応が付けられることを示すのを目標とする．

２つの理論の同値性を示すのに何が必要かを説明するために，SDE

$$dX_t^j = \sigma_i^j(X_t)dB_t^i \quad \Leftrightarrow \quad X_t^j = X_0^j + \int_0^t \sigma_i^j(X_s)dB_s^i, \quad (B^i)_{i=1}^d \text{ は } d \text{ 次元 Brown 運動} \tag{1.2}$$

を例に Hairer 理論と GIP 理論の違いを説明する．基本的にはどちらも SDE における ラフパス理論 [28, 15] の SPDE への拡張となっている．ラフパス理論の基本原理は次の可換図式に集約される．

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{B} \arrow[r, "\text{解写像（連続）}"] & \mathbf{X} \arrow[d, "\text{射影（連続）}"] \\
B \arrow[u, "\text{持ち上げ}"] \arrow[r, "\text{解写像（不連続）}"'] & X
\end{tikzcd}$$

我々が考えるのは $B \mapsto X$ という解写像だが，これは well-posed ではない．すなわち，適当な連続写像 F を以って $X = F(B)$ という形で表示することができない．しかしラフパス理論によれば，B, X に新情報を加えた $\mathbf{B}, \mathbf{X}$ という “拡張された” パスを考えると，連続写像 $\mathbf{F}$ を以って $\mathbf{X} = \mathbf{F}(\mathbf{B})$ と表示できる．ここで $\mathbf{B}$ は B に反復積分 $\int_0^{\cdot} B_s^i dB_s^j$ を付け加えたもので，ある非線形空間 $\mathfrak{C}$ の元になっている．また $\mathbf{X}$ は X と $X' =$ “$\frac{dX}{dB}$” の組で，$\mathbf{B}$ に依存するある線形空間 $\mathcal{D}_{\mathbf{B}}$ の元である．つまり多様体 $\mathfrak{C}$ の各点 $\mathbf{B}$ にファイバー $\mathcal{D}_{\mathbf{B}}$ が張り付いているようなイメージである．一部の情報を取り出すだけの写像 $\mathbf{X} \mapsto X$ が連続なので，結果として写像 $\tilde{F} : \mathbf{B} \mapsto X$ は連続であることが分かる．

残る問題は $\mathbf{B}$ をどのように構成するかである．１つの方法は B を十分正則なパス $(B_\epsilon)_{\epsilon \in (0,1]}$（例えば折れ線）で近似し，$B_\epsilon$ を自然に持ち上げた $\mathbf{B}_\epsilon$ がどこに収束するかを見ることである．一般には $\mathbf{B}_\epsilon$ は Stratonovich 積分の方に収束する．これと $\tilde{F}$ の連続性を合わせれば，近似 SDE の解 X_ϵ が Stratonovich 型 SDE の解に収束するという Wong-Zakai [33] の有名な結果を直ちに導くことができる．伊藤型に収束させるには $\mathbf{B}_\epsilon$ に補正項を加える必要があり，これが $\tilde{F}$ によって SDE まで遺伝し，補正された SDE が現れる．この補正が Stratonovich 型から伊藤型への変換公式と一致していることは簡単に確かめられる．

Hairer 理論と GIP 理論は SPDE を扱う “ラフパス理論” である．スタートは時空（または空間）ホワイトノイズ，ゴールは SPDE の解であるが，このような写像は一般には不連続どころか定義すらできない．そのため $\mathbf{B}$ や $\mathbf{X}$ といった拡張概念を持ち出す必要があるが，その定義が２つの理論で異なっている．簡単にまとめると次の表のようになる[2]．

<table>
<tr><th></th><th>B</th><th>$\mathbf{B}$</th><th>$\mathbf{B}$ の補正</th><th>$\mathbf{X}$</th><th>X</th></tr>
<tr><td>RP 理論</td><td>Brown 運動</td><td>Brownian RP</td><td>伊藤型へ</td><td>被制御パス</td><td>SDE の解</td></tr>
<tr><td>Hairer 理論</td><td rowspan="2">ホワイトノイズ</td><td>モデル</td><td rowspan="2">繰り込み</td><td>被モデル超関数</td><td rowspan="2">SPDE の解</td></tr>
<tr><td>GIP 理論</td><td>駆動項の族[3]</td><td>パラ被制御超関数</td></tr>
</table>

SPDE の場合もホワイトノイズ ξ の滑らかな近似 $(\xi_\epsilon)_{\epsilon \in (0,1]}$ を自然に持ち上げた拡張ノイズ $\mathbf{\Xi}_\epsilon$ を考えるのだが，今回は $\mathbf{\Xi}_\epsilon$ は収束しないばかりか発散してしまう．そこで SDE の場合に $\mathbf{B}$ を Stratonovich 型から伊藤型に補正したように，この発散部分を相殺する補正項を付け加えて新たな拡張ノイズ $\hat{\mathbf{\Xi}}_\epsilon$ を定義する．この $\hat{\mathbf{\Xi}}_\epsilon$ の非自明な極限を見つけられれば，対応する SPDE の世界では方程式を繰り込んで解を見つけているように見えるのである．

従って当初の目標のためには，２つの理論における $\mathbf{B}$ や $\mathbf{X}$ がどう対応付けられるかを見れば良い．２章と３章で，Hairer 理論や GIP 理論で $\mathbf{B}$ や $\mathbf{X}$ をどう具体的に定義，構成するかを概説する．

---

[2]Hairer 理論や GIP 理論における用語の訳は今の所定まっていない．

[3]定まった名称はない．

2. Hairer 理論

2.1. **ラフパス理論.** Hairer 理論はラフパス理論の直接の一般化であるから，まずラフパス理論について復習する．詳細は [13, 12] を参照されたい．

ラフパス理論の元となるのが Chen による反復積分の理論である．$(B^i)_{i=1}^d : [0,1] \to \mathbb{R}^d$ を滑らかなパスとすると，反復積分

$$B_{st}^{i_1\dots i_k} := \int_s^t \left(\int_s^{s_k} \left(\dots \int_s^{s_2} dB_{s_1}^{i_1} \dots \right) dB_{s_{k-1}}^{i_{k-1}} \right) dB_{s_k}^{i_k}, \quad 0 \le s \le t \le 1 \tag{2.1}$$

が定義できる．このような成分を持つテンソル代数値の二変数関数が満たす性質を抽象化したものがラフパスである．

$p \in \mathbb{N}$ に対し，$T^{(p)}(\mathbb{R}^d) = \bigoplus_{k=0}^p (\mathbb{R}^d)^{\otimes k}$ を p 階テンソル代数とする．$\{e_i\}_{i=1}^d$ を $\mathbb{R}^d$ の標準基底とすれば，$e_{i_1\dots i_k} := e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k}$ を $(\mathbb{R}^d)^{\otimes k}$ の基底として取ることができる．$\langle \cdot, \cdot \rangle$ を $T^{(p)}(\mathbb{R}^d)$ の標準内積とすれば，$\{e_w\}_{w \in W^{(p)}}$ は $T^{(p)}(\mathbb{R}^d)$ の正規直交基底となる．ここで $W^{(p)}$ は $1, \dots, d$ を重複を許して並べた長さ p 以下の文字列全体の集合とする．特に空集合 $\emptyset$ は長さ 0 の文字列とし，$e_\emptyset = 1$ は $(\mathbb{R}^d)^{\otimes 0} = \mathbb{R}$ の単位元とする．長さ k の文字列 w に対して $|w| = k$ とする．

定義 2.1. $\alpha \in (\frac{1}{p+1}, \frac{1}{p}]$ とする．二変数関数 $\mathbf{B} : [0,1]^2 \to T^{(p)}(\mathbb{R}^d)$ が

(1) $\mathbf{B}_{st} = \mathbf{B}_{su} \otimes \mathbf{B}_{ut}, \quad s, u, t \in [0,1]$ *(Chen の関係式)*
(2) $|\langle \mathbf{B}_{st}, e_w \rangle| \lesssim |t-s|^{|w|\alpha}, \quad w \in W^{(p)}$ *(Hölder 連続性)*

を満たすとき，$\mathbf{B}$ を *α-Hölder ラフパス (rough path)* という．

$(B^i)_{i=1}^d : [0,1] \to \mathbb{R}^d$ が十分正則なパスのときは，(2.1) で定義される自然な持ち上げ $\mathbf{B}_{st} = \sum_{w \in W^{(p)}} B_{st}^w e_w$ は確かに Chen の関係式と Hölder 連続性を満たしている．このようなラフパスを滑らかなラフパスという．応用上は滑らかなラフパス全体の集合の閉包に話を限れば十分であるが，このようなラフパスはある Lie 群に値を取っていることが分かる．

文字列 $w_1 = i_1 \dots i_k$, $w_2 = j_1 \dots j_l$ に対し，w_1, w_2 内部での順番は変えずに $i + j$ 個の文字を並べ直した全ての文字列 w に対して e_w の総和をとったものをシャッフル積 $e_{w_1 \sqcup\!\sqcup w_2}$ という．例えば

$$e_{ij \sqcup\!\sqcup k} = e_{ijk} + e_{ikj} + e_{kij}$$

である．$G^{(p)}(\mathbb{R}^d)$ を $T^{(p)}(\mathbb{R}^d)$ の 0 でない元 $\mathbf{B}$ で

$$\langle \mathbf{B}, e_{w_1} \rangle \langle \mathbf{B}, e_{w_2} \rangle = \langle \mathbf{B}, e_{w_1 \sqcup\!\sqcup w_2} \rangle, \quad w_1, w_2 \in W^{(p)}$$

を満たすもの全体とする．$G^{(p)}(\mathbb{R}^d)$ は $T^{(p)}(\mathbb{R}^d)$ 上の p 階自由冪零群と同じものになっている．

定義 2.2. 関数 $\mathbf{B} : [0,1] \to G^{(p)}(\mathbb{R}^d)$ に対し $\mathbf{B}_{st} := \mathbf{B}_s^{-1} \otimes \mathbf{B}_t$ が *α-Hölder* ラフパスであるとき．$\mathbf{B}$ を *α-Hölder 幾何ラフパス (geometric rough path)*[4] という．

与えられた幾何ラフパス $\mathbf{X}$ について SDE(1.2) を解くことを考える．B^i が Brown 運動ならば $\alpha = \frac{1}{2} - \epsilon$（$\epsilon > 0$ は任意）と取れるから $p = 2$ まで考えれば十分だが，ここでは一般の p について考える．考えるべきことは

(1) どのようなパス X について線積分 $\int_0^t X_s dB_s^i$ が定義できるか，
(2) (1) のようなパスのクラス $\mathcal{D}_\mathbf{B}$ は合成 $X \mapsto \sigma_i^j(X)$ について閉じているか，

である．(1) については，ある程度滑らかな関数 $\sigma : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ に対して線積分 $\int_0^t \sigma(B_s) dB_s^i$ が定義できることが分かっている [28]．この理由を少し説明する．Taylor 展開を $\sigma_w := \partial_w \sigma$（文字列 $w = i_1 \dots i_k$ に対し $\partial_w := \partial_{i_1} \cdots \partial_{i_k}$）に適用すると，$|w| \le p-1$ なる文字列に対し

$$\sigma_w(B_t) = \sum_{k=0}^{p-1-|w|} \sum_{i_1,\dots,i_k} \frac{1}{k!} \sigma_{i_1\dots i_k w}(B_s)(B_t^{i_1} - B_s^{i_1}) \cdots (B_t^{i_k} - B_s^{i_k}) + O(|t-s|^{(p-|w|)\alpha})$$

[4]正確には滑らかなラフパス全体の集合の閉包を幾何ラフパスの集合といい，定義 2.2 のようなラフパスは弱幾何ラフパス (weakly geometric rough path) という．しかし両者に大きな違いはないことが分かる．([12, Proposition 2.5])

を得る．ここで $\mathbf{B}$ の幾何性から

$$\prod_{l=1}^{k}(B_t^{i_l}-B_s^{i_l})=\prod_{l=1}^{k}\langle \mathbf{B}_{st}, e_{i_l}\rangle=\langle \mathbf{B}_{st}, ⧢_{l=1}^{k} e_{i_l}\rangle=\sum_{\tau\in S_k}\langle \mathbf{B}_{st}, e_{i_{\tau(1)}\dots i_{\tau(k)}}\rangle$$

（S_k は k 次の置換群）となるから

$$\sigma_w(B_t)=\sum_{|v|\le p-1-|w|}\sigma_{vw}(B_s)B_{st}^{v}+O(|t-s|^{(p-|w|)\alpha}) \tag{2.2}$$

とまとめられる．特に $w=\emptyset$ の場合を $\int_s^t \sigma(B_u)dB_u^i$ に形式的に代入すると

$$\int_s^t \sigma(B_u)dB_u^i=\sum_{|w|\le p-1}\sigma_w(B_s)B_{st}^{wi}+O(|t-s|^{(p+1)\alpha}) \tag{2.3}$$

を得る．右辺の第 1 項は拡張された Riemann 和となっており，$[s,t]$ の分割 $s=s_0<s_1<\cdots<s_N=t$ に沿って和を取って $\sup|s_{k+1}-s_k|\to 0$ とすると収束することが分かる．

この $\sigma(B)$ の性質を抽象化して，B の関数の形で書けないパス X に対しても線積分 $\int_0^t X_s dB_s^i$ を定義できるようにしたのが Gubinelli [15] による被制御パスの概念である．式 (2.2) の $\sigma_w(B)$ を X^w と抽象的に置き直し，$X=\sum_{|w|\le p-1}X^w e_w$ が満たす条件を書き出してみよう．

定義 2.3. $\mathbf{B}$ を α-*Hölder* 幾何ラフパスとする．関数 $X:[0,1]\to T^{(p-1)}(\mathbb{R}^d)$ が *Hölder* 連続性

$$|\langle e_w, X_t\rangle-\langle \mathbf{B}_{st}\otimes e_w, X_s\rangle|\le C|t-s|^{(p-|w|)\alpha} \tag{2.4}$$

を満たしているとき[5]，X を $\mathbf{B}$ によって 制御されるパス *(controlled path)* という．

$X=\sigma(B)$ という形でない被制御パス X に対しても Riemann 和 (2.3) は収束する．

命題 2.1 ([15])**.** $\mathbf{B}$ を α-*Hölder* 幾何ラフパスとする．X が $\mathbf{B}$ によって制御されるとき，*Riemann* 和

$$\sum_{s=t_0<t_1<\cdots<t_N=t}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{|w|\le p-1}\langle e_w, X_{t_k}\rangle\langle e_w\otimes e_i, \mathbf{B}_{t_k t_{k+1}}\rangle$$

は $\sup|t_{k+1}-t_k|\to 0$ において収束する．この極限を $\int_s^t X_s dB_s^i$ と表す．

これで (1) については解決した．(2) の合成については割愛するが，被制御パス X と十分正則な関数 $\sigma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ に対し $\sigma(X)^\emptyset=\sigma(X^\emptyset)$ を満たす被制御パスが構成できることが知られている．以上定義された全ての演算は局所 Lipshitz 連続[6]であり，後は ODE を解く通常の議論で連続な解写像 $\tilde{F}:\mathbf{B}\mapsto X$ を作ることができる．

2.2. ラフパス理論から Hairer 理論へ.

ラフパス理論の代数的な側面を一般化する．ここで有効な道具になるのが Hopf 代数の概念である [31]．まず $H=T^{(p)}(\mathbb{R}^d)$ はシャッフル積 ⧢ について代数を成しているが，その双対 H^* もテンソル積について代数を成している．このとき，互いに積の双対

$$⧢: H\otimes H\to H \quad\Leftrightarrow\quad ⧢^*: H^*\to H^*\otimes H^*,$$
$$\otimes: H^*\otimes H^*\to H^* \quad\Leftrightarrow\quad \Delta: H\to H\otimes H$$

を定義できる．このような 3 つ組 $(H,⧢,\Delta),(H^*,\otimes,⧢^*)$ は双代数 (bialgebra) をなしている．

また H は次数付きである．すなわち $H_n=\langle e_w\rangle_{|w|=n}$ とおくと $H=\bigoplus_{n=0}^{p}H_n$ と分解され，

$$H_nH_m\subset H_{n+m},\quad \Delta H_n\subset\bigoplus_{\alpha+\beta=n}H_\alpha\otimes H_\beta \tag{2.5}$$

が満たされている．後半の条件は

$$\Delta(i_1\dots i_k)=(i_1\dots i_k)\otimes\mathbf{1}+\sum_{l=1}^{k-1}(i_1\dots i_l)\otimes(i_{l+1}\dots i_k)+\mathbf{1}\otimes(i_1\dots i_k)$$

[5] (2.4) の条件は (2.2) を書き直したものになっている．
[6] ここでは "任意の有界集合上で Lipshitz 連続" の意味.

であることから分かる．特に $H_0=\mathbb{R}$ であるから，このとき [1] の一般論によって H は Hopf 代数をなすことが分かる．$G=G^{(p)}(\mathbb{R}^d)$ は内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ によって $H=T^{(p)}(\mathbb{R}^d)$ の双対 H^* に含まれるが，幾何性の仮定から G は H 上の 0 でない準同型（指標）全体とも見なせる．G がテンソル積 $\otimes$ について群を成すことは Hopf 代数の一般論から従う．

また $T=T^{(p-1)}(\mathbb{R}^d)$ の双対 T^* には H^* がテンソル積 $\otimes:H^*\otimes T^*\to T^*$ によって作用しているが，この余積 $\Delta':T\to H\otimes T$ によって T は左余加群 (comodule) となる．

以上を一般化して，次の定義をおこう．

定義 2.4. 次を満たす (T,G) の組を 正則構造 *(regularity structure)* という[7]．

(1) G はある *Hopf* 代数 $(H,\cdot,\Delta,\mathbf{1},\mathcal{A})$ 上の指標群であり，$(T,\Delta':T\to T\otimes H)$ は H 上の右余加群[8]である．H は積 $\cdot$ について可換である．
(2) H,T は次数付きである．つまり有限集合 $A\subset\mathbb{R}_{\geq 0}$ が存在して $H=\bigoplus_{\alpha\in A}H_\alpha$ と分解され，(2.5) の条件が成り立つ．$A\ni 0$ であり，$H_0=\langle\mathbf{1}\rangle$ である．T にも同様の仮定をおくが，A は負の数を含むことを許し，条件 $T_\alpha T_\beta\subset T_{\alpha+\beta}$ は積が定義できる場合に限る．
(3) $\tau\in T_\alpha$ に対して $\Delta'\tau\in\tau\otimes\mathbf{1}+\bigoplus_{\beta<\alpha}T_\beta\otimes H_{\alpha-\beta}$ と分解される．

T の次数に負の数も許すのは，超関数を表現するためである．一方 H の元は Taylor 展開に現れる差分に対応しているため，0 以上の次数しか現れない．例えば超関数 ξ の y での値が x での値を使って

$$\xi(y)=\sum_\tau\xi_\tau(x)\tau(y,x)+O(|y-x|^{|\xi|})$$

という形で表されるとき，ξ や ξ_τ は T の元が表す超関数であり，１点の周りである評価を満たす．一方 τ は H の元が表す差分で $|\tau(y,x)|\lesssim|y-x|^{|\tau|}$ $(|\tau|>0)$ と評価される．

定義 2.5. 次を満たす $(\mathbf{\Pi},g)$ の組を (T,G) 上のモデルという[9]．

(1) $\mathbf{\Pi}:T\to\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ は線形作用素，$g=(g_x)_{x\in\mathbb{R}^d}$ は G の元の族である．
(2) $\Pi_x:=(\mathbf{\Pi}\otimes g_x^{-1})\Delta':T\to\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ とおくと，$\tau\in T_\alpha$ に対し $\Pi_x\tau$ は x の周りで C^α 級である．すなわちテスト関数 $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ と $\lambda\in(0,1]$ に対し $\varphi_x^\lambda(y):=\frac{1}{\lambda^d}\varphi(\frac{y-x}{\lambda})$ とおくと，$|\langle\Pi_x\tau,\varphi_x^\lambda\rangle|\lesssim\lambda^\alpha$ が成り立つ．
(3) $\gamma_{yx}:=(g_y\otimes g_x^{-1})\Delta:H\to\mathbb{R}$ とおくと，$\tau\in H_\alpha$ に対し $|\gamma_{yx}(\tau)|\lesssim|y-x|^\alpha$ が成り立つ．

ラフパス理論の例では $(\mathbf{\Pi}\tau)(y)=g_y(\tau)=\mathbf{B}_y$ となっている[10]．一般には $\mathbf{\Pi}\tau$ は超関数なので，Hölder 連続性の条件が (2) と (3) の条件に分かれるのである．

被制御パスの概念を正則構造上に拡張しよう．分かりやすいようにテンソル積を $m:H^*\otimes T^*\to T^*$ と書くと，(2.4) の左辺第２項は

$${}_{T^*}\langle m(\mathbf{B}_{st}\otimes e_w),X_s\rangle_T={}_{H^*\otimes T^*}\langle\mathbf{B}_{st}\otimes e_w,\Delta'X_s\rangle_{H\otimes T}={}_{T^*}\langle e_w,(\mathbf{B}_{st}\otimes\mathrm{Id})(\Delta'X_s)\rangle_T$$

と書き直せる．最後の式では $\mathbb{R}\otimes T$ を T と同一視している．

定義 2.6. $\gamma\in\mathbb{R}$ とする．関数 $f:\mathbb{R}^d\to T$ が任意の $\tau\in T_\alpha$ に対し

$$|\mathcal{Q}_\tau(f(y)-(\mathrm{Id}\otimes\gamma_{yx})\Delta f(x))|\lesssim|y-x|^{\gamma-\alpha}$$

を満たすとき，f を $(\mathbf{\Pi},g)$ の 被モデル関数 *(modelled distribution)* という．($\mathcal{Q}_\tau$ は τ 成分への射影を表す.）このような関数全体を $\mathcal{D}^\gamma$ と表す．

正則構造 (T,G) では負の次数も許すので，ラフパス理論と違い 0 次の項がパスの本当の姿を示してはいない．そのため次の 再構成作用素 (reconstruction operator) が必要である．

定理 2.2 ([21, Theorem 3.10])**.** $\gamma\in\mathbb{R}$ とする．このとき連続線形作用素 $\mathcal{R}:\mathcal{D}^\gamma\to\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ で

$$|\langle\mathcal{R}f-\Pi_xf(x),\varphi_x^\lambda\rangle|\lesssim\lambda^\gamma$$

[7] [21] の定義よりも特殊な定義になっている．しかし応用上はこのような正則構造のみが使われている．
[8] 些細な差だが，ラフパス理論の例と左右が逆になっていることに注意.
[9] これも [21] の定義より一般性は低いが，応用上はこれで十分である.
[10] ここでも積の左右が逆になっていることに注意.

を任意の $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \lambda \in (0,1], f \in \mathcal{D}^\gamma$ に対し満たすものが存在する．$\gamma > 0$ ならばこのような作用素は一意に定まる．

それでは具体的な問題に対して，どのように Hopf 代数 H や余加群 T を構成すれば良いだろうか．まず SDE(1.2) に話を戻すと，この SDE は $X_0 = 0$ とすれば写像

$$F(X)_t = \int_0^t \sigma_i(X_s) dB_s^i$$

の不動点問題と見ることができる．もう少し具体的に

$$F(X)_t = \sigma_i(0)B_t^i + \partial_j\sigma_i(0)\int_0^t X_s^j dB_s^i + \frac{1}{2}\partial_{jk}\sigma_i(0)\int_0^t X_s^j X_s^k dB_s^i + \cdots$$

と分解しよう．$X^{(0)} = 0$ から始めて Picard の逐次近似を行うと，

$$\begin{aligned} X^{(1)}:&\quad B^i \\ X^{(2)}:&\quad B^i, \quad \int B^j dB^i, \quad \int B^j B^k dB^i, \quad \ldots \end{aligned}$$

が現れる．しかし B 同士の積については幾何性の仮定から $B^jB^k = \int B^j dB^k + \int B^k dB^j$ が得られるから，結局 (2.1) の形の反復積分のみに帰着される．そのため幾何ラフパスの理論では長さ p 以下の文字列 $i_1 \ldots i_k$ のみが基底ベクトルだった．

それでは幾何性を仮定しないと何が起きるだろうか．その場合積 B^jB^k は分解されず，独立したベクトルとして扱われなければならない．これを

$$\int B^j B^k dB_i = \overset{j\bullet\;\bullet k}{\underset{\bullet i}{\vee}}$$

のように表示する．このような“根付き木 (rooted tree)”（ループのない有限連結グラフで，“根”と呼ばれる 1 点を持つ）全体で生成される自由可換代数を考えよう．ここで根付き木同士の積は，それらを単に並べるだけの可換な森積 (forest product) を用いる．

$$\overset{j\bullet\;\bullet k}{\underset{\bullet i}{\vee}} \cdot \bullet i := \overset{j\bullet\;\bullet k}{\underset{\bullet i}{\vee}} \quad \bullet i$$

このとき空グラフ $\emptyset$ が単位元となるから，これを $\mathbf{1}$ で表す．

余積 Δ はどのように定義されるだろうか．幾何ラフパスは $1, \ldots, d$ を並べた文字列で生成されたが，これを

$$(ji) = \overset{\bullet j}{\underset{\bullet i}{|}}$$

などと表示すれば，余積 Δ は

$$\Delta \overset{\bullet j}{\underset{\bullet i}{|}} = \overset{\bullet j}{\underset{\bullet i}{|}} \otimes \mathbf{1} + \bullet j \otimes \bullet i + \mathbf{1} \otimes \overset{\bullet j}{\underset{\bullet i}{|}}$$

となる．これを拡張し，根付き木 τ に対しても

$$\Delta\tau = \sum_{\sigma \subset \tau} (\tau \setminus \sigma) \otimes \sigma$$

と定義しよう．ここで σ は空グラフか，τ と同じ根を有する全ての部分根付き木に渡る．また $\tau \setminus \sigma$ はグラフ τ から σ の全ての辺と端点を除いて構成されるグラフである．例えば

$$\Delta \overset{j\bullet\;\bullet k}{\underset{\bullet i}{\vee}} = \overset{j\bullet\;\bullet k}{\underset{\bullet i}{\vee}} \otimes \mathbf{1} + \bullet j \;\bullet k \otimes \bullet i + \bullet j \otimes \overset{\bullet k}{\underset{\bullet i}{|}} + \bullet k \otimes \overset{\bullet j}{\underset{\bullet i}{|}} + \mathbf{1} \otimes \overset{j\bullet\;\bullet k}{\underset{\bullet i}{\vee}}$$

である．この新たな Hopf 代数は特に Connes-Kreimer 代数 [11] と呼ばれ，この代数上で定義されるラフパスを分枝ラフパス (Branched rough path) という．詳しくは [16, 22] を参照されたい．

SPDE に対しても H や T を同じように構成できる．例えば Φ^4 モデルの場合は $P(t,x)$ を熱核として方程式を

$$\Phi(t,x)=\int P(t-s,x-y)(-\Phi(s,y)^3+\xi(s,y))dsdy$$

と書き直し，SDE の場合と同様に Picard の逐次近似を行う．基本的には Connes-Kreimer 代数のような根付き木の成す代数となるが，新たに "多項式構造" と "熱核の微分" を考える必要が出てくる．詳細は割愛するが，ラフパスと違って正則性が 1 を越える場合が出てくるためである．そこで一般には，根付き木 τ の辺集合 $e(\tau)$ と頂点集合 $n(\tau)$ に 3 つの写像

- $\mathfrak{t}:e(\tau)\to\{+,-\}$（$\mathfrak{t}(e)=+$ なる辺は熱核，$\mathfrak{t}(e)=-$ なる辺はノイズを表す.）
- $\mathfrak{n}:n(\tau)\to\mathbb{N}^d$（$\mathfrak{n}(n)=\alpha$ なる点は多項式 X^α を表す.）
- $\mathfrak{e}:e(\tau)\to\mathbb{N}^d$（$\mathfrak{e}(e)=k$ なる辺は微分 ∂^k を表す.）

を備えた "飾り付き木 (decorated tree)" を考える．Bruned-Hairer-Zambotti [8] は飾り付き木全体のなす "普遍的な"Hopf 代数を定義し，個々の SPDE に対応した Hopf 代数は全てその部分代数であるという大理論を展開した．Chandra-Hairer [10] はその普遍的な Hopf 代数上で繰り込み群を解析し，Bruned-Chandra-Chevyrev-Haire [7] で個々の SPDE の繰り込みは全てその系として理解できることが示された．このような包括的な枠組みは，多くの SPDE に成り立つ普遍的な性質を示すのに適している．Hairer-Mattingly [23] では SPDE の解の強 Feller 性が示されている．

3. GIP 理論

GIP 理論は Hairer 理論よりも手探りで展開される．

3.1. **パラコントロール解析**. 主結果を述べる際にも重要となるいくつかの演算子を定義する．詳細は [3, 18] を参照されたい．ラフパス理論や Hairer 理論では 2 点間の差分を評価していたが，GIP 理論では Bony のパラプロダクトという非局所的な演算子が使われる．

$(\rho_i)_{i=-1}^\infty$ を 1 の 2 進分解とする．すなわち $\rho_i:\mathbb{R}^d\to[0,1]$ は C^∞ 級の球対称関数で,

- $\mathrm{supp}(\rho_{-1})\subset\{x\in\mathbb{R}^d;|x|<\frac{4}{3}\}$, $\mathrm{supp}(\rho_0)\subset\{x\in\mathbb{R}^d;\frac{3}{4}<|x|<\frac{8}{3}\}$,
- $\rho_i(x)=\rho(2^{-i}x)$, $i\ge 0$,
- $\sum_{i=-1}^\infty\rho_i=1$

を満たす．$f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ に対し，作用素 Δ_i を $\Delta_i f=\rho_i(\sqrt{-\Delta})f$ と定義する．この作用素により，$\alpha\in\mathbb{R}$ に対し $C^\alpha=B^\alpha_{\infty,\infty}$ を

$$C^\alpha=\{f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d);\|f\|_{C^\alpha}:=\sup_{i\ge-1}2^{\alpha i}\|\Delta_i f\|_{L^\infty}<\infty\}$$

と定義する．

命題 3.1 ([6], [3, Theorems 2.82 and 2.85]). $f,g\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ に対し，<u>パラプロダクト</u>$f\varolessthan g$ と<u>レゾナント</u>$f\odot g$ を

$$f\varolessthan g=\sum_{i\le j-2}\Delta_i f\Delta_j g,\quad f\odot g=\sum_{|i-j|\le1}\Delta_i f\Delta_j g$$

と（収束すれば）定義する．このとき次の評価が成り立つ．

(1) $\beta\in\mathbb{R}$ に対し $\|f\varolessthan g\|_{C^\beta}\lesssim\|f\|_{L^\infty}\|g\|_{C^\beta}$.
(2) $\alpha<0,\beta\in\mathbb{R}$ に対し $\|f\varolessthan g\|_{C^{\alpha+\beta}}\lesssim\|f\|_{C^\alpha}\|g\|_{C^\beta}$.
(3) $\alpha+\beta>0$ ならば $\|f\odot g\|_{C^{\alpha+\beta}}\lesssim\|f\|_{C^\alpha}\|g\|_{C^\beta}$.

また <u>*Bony* の分解</u>

$$fg=f\varolessthan g+f\odot g+f\varogreaterthan g$$

により，$\alpha+\beta>0$ なら積 fg が *well-defined* であることが分かる．

パラコントロール解析で重要なのが，次の <u>交換子 (commutator) 評価</u> である．

命題 3.2 ([18, Lemma 2.4])**.** $\alpha \in (0,1)$, $\beta+\gamma<0$, $\alpha+\beta+\gamma>0$ とする．$f,g,h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に対し $C(f,g,h) = (f \olessthan g) \odot h - f(g \odot h)$ とおくと，

$$\|C(f,g,h)\|_{C^{\alpha+\beta+\gamma}} \lesssim \|f\|_{C^\alpha}\|g\|_{C^\beta}\|h\|_{C^\gamma}$$

が成り立つ．これにより，C を 3 重有界線形写像 $C : C^\alpha \times C^\beta \times C^\gamma \to C^{\alpha+\beta+\gamma}$ に一意に拡張できる．

3.2. **SDE への応用.** パラコントロール解析を使って SDE(1.2) を解く．簡単のために $d=1$ とする．$\alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ を固定する．方程式を

$$\dot{X}_t = \sigma(X_s)\dot{B}_s$$

と読み替えると，$X, B \in C^\alpha$ に対しては右辺の積が定義できない．そこで Bony の分解を利用して

$$\dot{X} = \sigma(X) \olessthan \dot{B} + \sigma(X)(\odot + \ogreaterthan)\dot{B}$$

と分解すると，右辺第 2 項は（定義できれば）$C^{2\alpha-1}$ に属するはずである．そこで X に

$$X = X' \olessthan B + X^{\#}, \quad X' \in C^\alpha, \quad X^{\#} \in C^{2\alpha} \tag{3.1}$$

という形を仮定しよう[11]．ここで X' は X の通常の意味の微分ではなく，単なる係数として置いている．このような X に対しては積 $\sigma(X)\dot{B}$ が定義できることを説明する．まず Bony のパラ線形化 (paralinearization) と呼ばれる次の命題を使う．

命題 3.3 ([3, Theorem 2.92])**.** $\alpha \in (0,1)$ とする．$\sigma \in C_b^2$ とすると，局所 *Lipshitz* な写像 $R_\sigma : C^\alpha \to C^{2\alpha}$ で任意の $f \in C^\alpha$ に対し

$$\sigma(f) = \sigma'(f) \olessthan f + R_\sigma(f)$$

となるものが存在する．

Bony のパラ線形化と交換子評価により

$$\sigma(X) \odot \dot{B} = \sigma'(X)(X \odot B) + C(\sigma'(X), X, \dot{B}) + R_\sigma(X) \odot \dot{B}$$

と分解できる．α の条件から右辺の第 2 項，第 3 項は well-defined で，$C^{3\alpha-1}$ に含まれることが分かる．第 1 項については尚も ill-defined だが，(3.1) の仮定を使うと再び交換子評価により

$$X \odot B = X'(B \odot \dot{B}) + C(X', B, \dot{B}) + X^{\#} \odot \dot{B}$$

を得る．以上の計算から積 $\sigma(X)\dot{B}$ は

$$\sigma(X)\dot{B} = \sigma(X) \olessthan \dot{B} + \sigma'(X)X'(B \odot \dot{B}) + (C^{2\alpha-1})$$

とまとめられる．ここで右辺の $(C^{2\alpha-1})$ は $(X, X', X^{\#})$ や B のみの well-defined な関数になっている．第 2 項の $B \odot \dot{B} \in C^{2\alpha-1}$ の部分だけが ill-defined であるが，最初の SDE(1.2) と違うのは式の ill-defined な部分から未知関数 X が排除されていることである．これは $\mathbf{B} = (B, B \odot \dot{B})$ が与えられていれば，積 $\sigma(X)\dot{B}$ を上式によって定義できることを意味している．あとは

$$X = \int \sigma(X)\dot{B}, \quad X' = \sigma(X)$$

を不動点問題に翻訳すれば，通常の議論で SDE(1.2) を解くことができる[12]．

[11] パラプロダクトは Leibniz 則を満たすので，$\int X' \olessthan \dot{B} - X' \olessthan B \in C^{2\alpha}$ が分かる．よって $\dot{X} = X' \olessthan \dot{B} + (C^{2\alpha})$ を積分して $X = \int X' \olessthan \dot{B} + (C^{2\alpha}) = X' \olessthan B + (C^{2\alpha})$ を得る．

[12] パラプロダクトは非局所的な演算なので，局所解を求めるには工夫が必要である．詳しくは [18, Section 3] を参照．

3.3. **SPDE への応用.** Gubinelli らは (3.1) の形の仮定を使い，KPZ 方程式や Φ_3^4 モデルなどを解くことに成功した．GIP 理論の利点は既存の PDE の議論と結びつけやすい点にあり，これまでに KPZ 方程式の大域的適切性 [19]，$P(\Phi)_2$ モデルの平衡測度の一意性 [32]，Φ_3^4 モデルの $\mathbb{T}^3$ での大域的適切性 [29, 2]，$\mathbb{R}^3$ での大域的適切性 [17]，複素 GL 方程式の $\mathbb{T}^3$ での大域的適切性 [24] などが示されている．

しかし (3.1) の形の仮定は全ての SPDE を解くには十分ではない．Hairer 理論では解けているのに，GIP 理論では解けない SPDE があるのである．この理由を $\alpha < \frac{1}{3}$ の場合の SDE を例に説明しよう．4.2 節では積 $\sigma(X)\dot{B}$ を分解する際，well-defined で正則性の良い項

$$C(X', B, \dot{B}), \quad X^{\#} \odot \dot{B}, \quad C(\sigma'(X), X, \dot{B}), \quad R_\sigma(X) \odot \dot{B}$$

が現れたが，$\alpha < \frac{1}{3}$ のときはこれら全てが ill-defined になる．この問題を解決するには，X' や $X^{\#}$ にも "パラコントロールされる" という新たな仮定が必要である．すなわち，

$$\begin{cases} X = X_1 \otimes B_1 + X_2 \otimes B_2 + X^{\#}, \quad X_1 \in C^\alpha, \quad X_2 \in C^\alpha, \quad X^{\#} \in C^{3\alpha}, \\ X_1 = X_{11} \otimes B_1 + X_1^{\#}, \quad X_{11} \in C^\alpha, \quad X_1^{\#} \in C^{2\alpha} \end{cases} \tag{3.2}$$

という仮定をするのが適切である．ここで $B_1 = B$，$B_2 = \int B(\odot + \otimes)\dot{B}$ である．しかし $\alpha < \frac{1}{4}$ となるとこの仮定も十分ではなく，3 階までの分解を仮定する必要がある．このようなパラプロダクトによる分解を必要な階数続けるやり方を高階パラコントロール解析といい，Bailleul-Bernicot [4] による研究が進んでいる．しかし上の例でも分かるように，交換子の交換子... という風に評価すべき項が累乗的に増えていき，計算は非常に煩雑である．現在のところ，SDE の場合でも高階パラコントロール解析を体系的に記述した文献はない．

4. 主結果

この研究の目的は

(1) Hairer 理論の代数を移植し，GIP 理論の煩雑な部分を Hairer 理論のアイデアで補いながら体系的に理論を展開できるようにすること，
(2) 最終的には GIP 理論だけで議論を完結させられるようにすること，

である．

4.1. **Hairer 理論から GIP 理論へ.**

4.1.1. 主結果の紹介．主結果を述べるために正則構造 (T, G) に以下の仮定をおく．この仮定は "飾り付き木" の Hopf 代数など応用上現れる代数ではいつも満たされている．

仮定 4.1. (1) H, T は有限集合 $\mathcal{F}^+, \mathcal{F}$ で張られる．各々の元には次数 $|\cdot|$ が定義されており，それが H, T の次数を定義する．
(2) $\tau \in H_\alpha$ に対し，$\Delta\tau \in H \otimes H$ は

$$\Delta\tau \in \tau \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \tau + \bigoplus_{0<\beta<\alpha} H_\beta \otimes H_{\alpha-\beta}$$

と分解される．

任意の $\tau, \sigma \in \mathcal{F}^+$ (or $\mathcal{F}$) に対し $\tau/\sigma \in H$ を

$$\Delta\tau = \sum_{\sigma \in \mathcal{F}^+ \text{ (or } \mathcal{F})} \sigma \otimes (\tau/\sigma).$$

で定める．飾り付き木のイメージで言えば，τ/σ はグラフ τ において部分グラフ σ を一点に潰して得られるグラフである．まず次の結果が成り立つ．

定理 4.1 (H)**.** $(\mathbf{\Pi}, g)$ を正則構造 (T, G) 上のモデルとする．

(1) 線形作用素 $[\cdot]: T \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ が C^∞ の差を除いて一意に定まり，$\tau \in T_\alpha$ に対して $[\tau] \in C^\alpha$ であり，

$$\mathbf{\Pi}\tau = \sum_{\sigma \in \mathcal{F}, |\sigma| < |\tau|} g.(\tau/\sigma) \oslash [\sigma] + [\tau]. \tag{4.1}$$

が成り立つ．

(2) 線形作用素 $[\cdot]: H \to C(\mathbb{R}^d)$ が C^∞ の差を除いて一意に定まり，$\tau \in H_\alpha$ に対して $[\tau] \in C^\alpha$ であり，

$$g.(\tau) = \sum_{\sigma \in \mathcal{F}^+, 0 < |\sigma| < |\tau|} g.(\tau/\sigma) \oslash [\sigma] + [\tau].$$

が成り立つ．

この定理では，モデル $(\mathbf{\Pi}, g)$ に関する情報が，２点間の差分の評価ではなく関数の族 $\{[\tau]\}_{\tau \in \mathcal{F}, \mathcal{F}^+}$ に集約されている．ラフパス理論の場合，文字列 ij に対応したモデルは $\mathbf{\Pi}(ij) = \int B^i dB^j$ で与えられたが，この関数は C^α に属し，文字列の次数 2α と正則性が一致しなかった．2α という次数は余剰項

$$\Pi_s(ij)(t) = \int_s^t (B_u^i - B_u^i) dB_u^j = \int_0^t B^i dB^j - \int_0^s B^i dB^j - B_s^i (B_t^j - B_s^j)$$

から来るものである．例えば B の折れ線近似 B^ϵ に対応したモデル $(\mathbf{\Pi}^\epsilon, g^\epsilon)$ が収束するかを調べるには上のような差分が $\epsilon \downarrow 0$ で収束していることを示さなければならないが，このような展開をいつも書き出すのは不便である．一方

$$\int_0^t B^i dB^j = (B^i \oslash B^j)_t + [(ij)]_t, \quad [(ij)] \in C^{2\alpha}$$

という分解を知っていれば，左辺の繰り込みを考える際に $[(ij)]_t$ という項だけ考えれば良いことが分かる．

次に被モデル超関数から (3.2) のような解の表現を取り出す結果を紹介する．

定理 4.2 (H)**.** $\gamma > 0$ とする．被モデル超関数 $f = \sum_{|\tau| < \gamma} f_\tau \tau \in \mathcal{D}^\gamma$ に対し，$\{f_\tau\}_\tau$ 同士の関係式

$$f_\sigma = \sum_{|\sigma| < |\tau| < \gamma} f_\tau \oslash [\tau/\sigma] + (C^{\gamma - |\sigma|}), \quad |\sigma| < \gamma \tag{4.2}$$

を得る．また再構成作用素との関係式

$$\mathcal{R}f = \sum_{|\tau| < \gamma} f_\tau \oslash [\tau] + (C^\gamma)$$

を得る．

これは高階パラコントロール解析 (3.2) の背景にある代数構造を浮き彫りにしている．例えば $p = 3$ の場合のラフパス理論では被制御関数は

$$X_t = X_t^\emptyset + X_t^i e_i + X_t^{ij} e_{ij} \in T^{(2)}(\mathbb{R}^d)$$

という形をしているが，定理 4.2 を使うと

$$\begin{cases} X^\emptyset = X^i \oslash [e_i] + X^{ij} \oslash [e_{ij}] + (X^\emptyset)^\#, \quad (X^\emptyset)^\# \in C^{3\alpha}, \\ X^i = X^{ij} \oslash [e_j] + (X^i)^\#, \quad (X^i)^\# \in C^{2\alpha}, \\ X^{ij} \in C^\alpha \end{cases}$$

という関係式が得られる．3.3 節では駆動関数 B_1, B_2 は方程式の両辺の比較から同定されたが，この式では $[e_i]$ や $[e_{ij}]$ は代数構造のみを使って記述できる．

4.1.2. 証明の準備．3.1 節で用意した作用素 Δ_i に対応する積分核を K_i とする．つまりパラプロダクト $f \varolessthan g$ は

$$f \varolessthan g(x) = \sum_{i \le j-2} \iint K_i(x-y) K_j(x-z) f(y) g(z) dy dz$$

と表示できる．これを一般化し，二変数関数 $F(y,z)$ に対する積分作用素

$$\mathcal{K}F(x) = \sum_{i \le j-2} \iint K_i(x-y) K_j(x-z) F(y,z) dy dz$$

を定義する．

補題 4.3. $\gamma > 0$ とする．関数 $F \in C(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ が $|F(y,z)| \lesssim |y-z|^\gamma$ を満たすならば，$\mathcal{K}F \in C^\gamma$ である．

次に $f, g, h \in C(\mathbb{R}^d)$ に対し，修正子 (corrector)

$$R(f,g,h) = f \varolessthan (g \varolessthan h) - (fg) \varolessthan h$$

を定義する．任意の $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ に対し $f - 1 \varolessthan f \in C^\infty$ であるから，特に $R(1,f,g) \in C^\infty$ である．

補題 4.4. $\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}$ とする．$f \in C(\mathbb{R}^d)$ が有限個の関数の族 $\{a_n, b_n\} \subset C(\mathbb{R}^d)$ を使って

$$f(y) = f(x) + \sum a_n(x)(b_n(y) - b_n(x)) + O(|y-x|^\alpha)$$

と展開できるならば，任意の $g \in C^\beta$ に対し

$$R(1,f,g) - \sum R(a_n, b_n, g) \in C^{\alpha+\beta}$$

を得る．特に $\sum R(a_n, b_n, g) \in C^{\alpha+\beta}$ である．

4.1.3. 証明の概略．ここでは定理 4.1-(2) を証明するが，他の定理の証明もほぼ同じである．本質的には $F(y,z) = \gamma_{zy}(\tau)$ に $\mathcal{K}$ を作用させるのだが，パラプロダクト $\varolessthan$ を引き出すために y, z の変数分離形に持ち込む必要がある．

補題 4.5. $\tau \in \mathcal{F}^+$ に対し

$$\gamma_{zy}(\tau) = g_z(\tau) - g_y(\tau) - \sum_{0<|\sigma|<|\tau|} g_y(\tau/\sigma)\gamma_{zy}(\sigma)$$

が成り立つ．この展開を $\gamma_{zy}(\sigma)$ についても繰り返して，結局

$$\begin{aligned}\gamma_{zy}(\tau) &= g_z(\tau) - g_y(\tau) \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \sum_{0<|\sigma_n|<\cdots<|\sigma_1|<|\tau|} (g_{\sigma_1}^\tau \cdots g_{\sigma_n}^{\sigma_{n-1}})(y)(g_z(\sigma_n) - g_y(\sigma_n))\end{aligned}$$

を得る．ここで $g_\sigma^\tau(z) := g_z(\tau/\sigma)$ とした．

これに $\mathcal{K}$ を作用させると

$$(C^{|\tau|}) = g_\cdot(\tau) - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \sum_{0<|\sigma_n|<\cdots<|\sigma_1|<|\tau|} (g_{\sigma_1}^\tau \cdots g_{\sigma_n}^{\sigma_{n-1}}) \varolessthan g_\cdot(\sigma_n)$$

となる．帰納的に $g_\cdot(\sigma_n) = \sum_{0<|\sigma_{n+1}|<|\sigma_n|} g_{\sigma_{n+1}}^{\sigma_n} \varolessthan [\sigma_{n+1}] + [\sigma_n]$ を仮定すると，

$$\begin{aligned}g_\cdot(\tau) &= (C^{|\tau|}) + \sum_{0<|\sigma|<|\tau|} g_\sigma^\tau \varolessthan [\sigma] \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \sum_{0<|\sigma|<|\sigma_n|<\cdots<|\sigma_1|<|\tau|} R(g_{\sigma_1}^\tau \cdots g_{\sigma_n}^{\sigma_{n-1}}, g_\sigma^{\sigma_n}, [\sigma]),\end{aligned}$$

を得る．補題 4.5 と同様にして

$$\gamma_{zy}(\tau/\sigma) = g_\sigma^\tau(z) - g_\sigma^\tau(y)$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sum_{|\sigma|<|\sigma_n|<\cdots<|\sigma_1|<|\tau|}(g_{\sigma_1}^{\tau}\cdots g_{\sigma_n}^{\sigma_{n-1}})(y)(g_{\sigma}^{\sigma_n}(z)-g_{\sigma}^{\sigma_n}(y))$$

が分かるから，補題 4.4 から R の項は $C^{|\tau|}$ に吸収される．

4.2. **GIP 理論から Hairer 理論へ.** 次の問題は，

(1) 関数の族 $\{[\tau]\}_\tau$ が与えられたとき，定理 4.1 の公式を使って $(\mathbf{\Pi},g)$ を定義すると，これはモデルの条件を満たすか？
(2) モデルは与えられているとする．式 (4.2) を満たす $\{f_\tau\}_\tau$ が与えられたとき，$f=\sum f_\tau\tau$ は被モデル超関数であるか？

の 2 つである．

4.2.1. モデルの再構成．まず (1) について考えるために，次の仮定を H,T に課す．些か分かりにくいが，この仮定は SPDE を解く際には自然なものである．$\mathbf{X}_i$ は多項式を表し，$\mathcal{J}_k$ は熱核の k 階微分を表す．$\tau\in T_\alpha$ に対し，$|\tau|=\alpha$ とおく．

仮定 4.2. (1) $s_i\ge 1$ なるベクトル $(s_i)_{i=1}^d$ が与えられているとし，任意の $m\in\mathbb{N}^d$ に対し $|m|_s=\sum_{i=1}^d s_im_i$ とおく．$\theta>0$ とする．H は

$$\mathcal{G}=\{\mathbf{X}_i\}_{i=1}^d\cup\{\mathcal{J}_k\tau\}_{\tau\in\mathcal{F},k\in\mathbb{N}^d,|\tau|+\theta-|k|_s>0}$$

という形の集合で生成される．

(2) 余積 Δ は $\Delta\mathbf{X}_i=\mathbf{X}_i\otimes\mathbf{1}+\mathbf{1}\otimes\mathbf{X}_i$ と

$$\Delta\mathcal{J}_k\tau=(\mathcal{J}_k\otimes\mathrm{Id})\Delta'\tau+\sum_l\frac{\mathbf{X}^l}{l!}\otimes\mathcal{J}_{k+l}\tau$$

で与えられる[13]．ここで $l\in\mathbb{N}^d$ に対し $\mathbf{X}^l=\mathbf{X}_1^{l_1}\cdots\mathbf{X}_d^{l_d}$ と略記している．

(3) $\tau\in\mathcal{F}$ と $\tau/\sigma\neq 0$ である $\sigma\in\mathcal{F}$ に対し，τ/σ は

$$\mathbf{X}^n(\mathcal{J}_{k_1}\eta_1)\cdots(\mathcal{J}_{k_m}\eta_m),\quad n,k_1,\dots,k_m\in\mathbb{N}^d,\quad |\eta_1|,\dots,|\eta_m|<|\tau|$$

という形の元の線形結合である．

熱核 $P(t,x)$ との畳み込みは，超関数の正則性を 2 上げる．このように畳み込みによって超関数の正則性を θ 上げるような積分核を “θ-正則化積分核” という（詳しくは [21, Section 5] 参照）．

定義 4.1. $P:\mathbb{R}^d\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ を θ-正則化積分核とする．モデル $(\mathbf{\Pi},g)$ が

$$g_x(\mathbf{X}_i)=x_i,\quad g_x(\mathcal{J}_0\tau)=(P*\mathbf{\Pi}\tau)(x)$$

を満たすとき，これを 許される *(admissible)* モデル[14]という．

以上の仮定の下で考えると，モデル $(\mathbf{\Pi},g)$ に関する情報は $|\tau|\le 0$ なる $\tau\in\mathcal{F}$ に対する $\mathbf{\Pi}\tau$ から完全に復元できることが分かる．これはラフパス理論における Lyons の拡張定理 [28] の Hairer 理論版と見ることができる．

補題 4.6 ([21, Proposition 3.31])**.** $\alpha>0$ とする．$T_\alpha^-:=\bigoplus_{\beta<\alpha}T_\beta$ 上で許されるモデル $(\mathbf{\Pi},g)$ が定義されていれば，$|\tau|=\alpha$ なる $\tau\in\mathcal{F}$ に対してもモデル $(\mathbf{\Pi},g)$ は一意に拡張される．

証明. $\Pi_x\tau$ の評価を示すには

$$|\langle\mathbf{\Pi}\tau-\sum_{|\sigma|<|\tau|}g_\cdot(\tau/\sigma)\mathbf{\Pi}\sigma,\varphi_x^\lambda\rangle|\lesssim\lambda^\alpha$$

を示せばよい．モデルの定義から $\boldsymbol{\tau}=\sum g_\cdot(\tau/\sigma)\sigma$ は $\mathcal{D}^\alpha$ に属する被モデル超関数であるから，再構成定理 [21, Theorem 3.10] により $\mathbf{\Pi}\tau=\mathcal{R}\boldsymbol{\tau}$ が一意に定まることが分かる．

[13] この仮定から $k\neq 0$ に対する $g_x(\mathcal{J}_k\tau)$ の値は $g_x(\mathcal{J}_0\tau)$ から決定される．
[14] この言葉は [21] の定義よりもかなり緩い意味で使っている．

$\gamma_{yx}(\mathcal{J}_k\tau)$ の評価を示すには，(H,G) を正則構造と見て

$$\mathcal{J}\boldsymbol{\tau} := \sum_{|k|<|\tau|+\theta} g_\cdot(\mathcal{J}_k\tau)\frac{\mathbf{X}^k}{k!} + \sum_{|\sigma|<|\tau|} g_\cdot(\tau/\sigma)\mathcal{J}\sigma$$

が $\mathcal{D}^{\alpha+\theta}$ に属することを言えばよい．これは Hairer 理論の多層 Schauder 評価 [21, Theorem 5.12] から従う． □

この命題から，$\{[\tau]\}_{|\tau|\le 0}$ が与えられればモデル $(\mathbf{\Pi},g)$ を構成できると予想できる．これを示す．

定理 4.7 (H)**.** $|\tau|\le 0$ なる任意の $\tau\in\mathcal{F}$ に対し $[\tau]\in C^{|\tau|}$ が与えられているとする．式 (4.1) と定義 *4.1* の仮定によって帰納的に $(\mathbf{\Pi},g)$ を定義する．この $(\mathbf{\Pi},g)$ は許されるモデルの定義を満たしている．

証明. ほぼ補題 4.6 と同様に証明される．$\alpha\le 0$ の場合は再構成 $\mathcal{R}\boldsymbol{\tau}$ は一意でなく，C^α の分だけ任意性がある．その任意性が $[\tau]$ に込められている．また多層 Schauder 評価を $\alpha\le 0$ である $\mathcal{D}^\alpha$ に拡張する必要があるが，これは容易である． □

4.2.2. 被モデル超関数の再構成．これで問題 (1) は解決できたが，(2) は尚も容易ではない．実際，そのままの意味では (2) は正しくない．

“多項式構造”$H=H_0\oplus H_1=\langle\mathbf{1}\rangle\oplus\langle\mathbf{X}_1,\dots,\mathbf{X}_d\rangle$ とその上の許されるモデルを考える．任意の $\boldsymbol{f}=f_{\mathbf{1}}\mathbf{1}+\sum f_i\mathbf{X}_i\in\mathcal{D}^\alpha$ $(\alpha\in(1,2))$ に対し定理 4.2 を適用すると

$$f_{\mathbf{1}}=\sum f_i \varolessthan [\mathbf{X}_i]+f_{\mathbf{1}}^{\#},\quad f_{\mathbf{1}}^{\#}\in C^\alpha,\quad f_i\in C^{\alpha-1}$$

となる．しかし $(\mathbf{\Pi}\mathbf{X}_i)(x)=x_i$ が C^∞ 級であるから $[\mathbf{X}_i]$ も C^∞ 級であり，上の式は

$$f_{\mathbf{1}}\in C^\alpha,\quad f_i\in C^{\alpha-1}$$

と同値になってしまう．この式から $\boldsymbol{f}=f_{\mathbf{1}}\mathbf{1}+\sum f_i\mathbf{X}_i\in\mathcal{D}^\alpha$ を示すのは一般には不可能である．実際，$\mathcal{D}^\alpha$ の定義から $f_i=\nabla f_{\mathbf{1}}$ となっていなければならないからである．

この例から分かるのは，被モデル超関数 $\sum f_\tau\tau$ の係数の内，独立なのは一部だけだということである．今の所は次の予想を立てているが，まだ解決には至っていない．

予想 4.1. “飾り付き木”からなる正則構造 (T,G) を考える．多項式飾り $\mathfrak{n}$ が全ての点で 0 となるような飾り付き木は純粋であるという．２つの被モデル超関数 $f_1,f_2\in\mathcal{D}^\gamma$ *(*$\gamma>0$*)* があり，純粋な木 τ における成分が一致しているならば $f_1=f_2$ となる．

この予想はさて置く．式 (4.2) から被モデル超関数に戻る際に必要なのは，パラプロダクトを何回も施した

$$f_1\varolessthan f_2\varolessthan\cdots\varolessthan f_n := (\dots((f_1\varolessthan f_2)\varolessthan f_3)\dots\varolessthan f_{n-1})\varolessthan f_n$$

という形の関数の，２点間における差分の評価である．本稿の残りのページで，この差分評価とそれを良く記述する Hopf 代数についての結果を紹介する．

$(\Delta_i)_{i\ge -1}$ を 3.1 節のような Littlewood-Paley 作用素とする．簡単のため，

$$f_i=\Delta_i f,\quad f_{i-}=\sum_{j\le i-2} f_j$$

と表す．このときパラプロダクトは

$$f\varolessthan g=\sum_i f_{i-}g_i$$

と表される．これを利用し，関数 $f^1,\dots,f^n$ に対し $(f^1,\dots,f^n)$ を帰納的に

$$(f^1,\dots,f^n)=\sum_i (f^1,\dots,f^n)_i,\quad (f^1,\dots,f^n)_i=(f^1,\dots,f^{n-1})_{i-}(f^n)_i$$

と定義する．$(f,g)=f\varolessthan g$ であるが，(f,g,h) と $(f\varolessthan g)\varolessthan h$ は等しくないことに注意がいる．しかしこのような関数に対する評価も，次の評価と本質的には変わらないと予想している．

定理 4.8 (H)**.** $\alpha_1,\dots,\alpha_n>0$ とする．

(1) $f^1 \in C^{\alpha_1}$ に対し

$$\Delta_{yx} f^1 = f^1(y) - \sum_{|k|<\alpha_1} \frac{(y-x)^k}{k!} \partial^k f^1(x)$$

とおくと，$\beta < \alpha_1$ に対し $|\Delta_{yx} f^1| \lesssim |y-x|^\beta$ が成り立つ．

(2) $f^1 \in C^{\alpha_1}, f^2 \in C^{\alpha_2}$ に対し

$$\Delta_{yx}(f^1, f^2) = (f^1, f^2)(y) - \sum_{|k|<\alpha_1+\alpha_2} \frac{(y-x)^k}{k!} \partial_*^k (f^1, f^2)(x) - \sum_{|l|<\alpha_1} \frac{(y-x)^l}{l!} \partial^l f^1(x) \Delta_{yx} f^2$$

とおく．ここで

$$\partial_*^k (f^1, f^2) = \partial^k (f^1, f^2) - \sum_{k=l+m, |l|<\alpha_1, |m|\geq\alpha_2} \frac{k!}{l!m!} (\partial^l f^1)(\partial^m f^2)$$

である．このとき，$\beta < \alpha_1 + \alpha_2$ に対し $|\Delta_{yx}(f^1, f^2)| \lesssim |y-x|^\beta$ が成り立つ．

(3) $f^1 \in C^{\alpha_1}, f^2 \in C^{\alpha_2}, f^3 \in C^{\alpha_3}$ に対し

$$\begin{aligned}\Delta_{yx}(f^1, f^2, f^3) = (f^1, f^2, f^3)(y) - &\sum_{|k|<\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} \frac{(y-x)^k}{k!} \partial_*^k (f^1, f^2, f^3)(x) \\ - \sum_{|l|<\alpha_1+\alpha_2} \frac{(y-x)^l}{l!} \partial_*^l (f^1, f^2)(x) \Delta_{yx} f^3 &- \sum_{|m|<\alpha_1} \frac{(y-x)^m}{m!} \partial^m f^1(x) \Delta_{yx}(f_2, f_3)\end{aligned}$$

とおく．ここで $\partial_*^k (f^1, f^2, f^3)$ は *(2)* と同様，f^1, f^2, f^3 から決まる関数である．このとき，$\beta < \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ に対し $|\Delta_{yx}(f^1, f^2, f^3)| \lesssim |y-x|^\beta$ が成り立つ．

(4) $f^i \in C^{\alpha_i}$，$i = 1, \ldots, n$ に対し

$$\begin{aligned}\Delta_{yx}(f^1, \ldots, f^n) = (f^1, \ldots, f^n)(y) - &\sum_{|k|<\alpha_1+\cdots+\alpha_n} \frac{(y-x)^k}{k!} \partial_*^k (f^1, \ldots, f^n)(x) \\ - &\sum_{m=1}^{n-1} \sum_{|l|<\alpha_1+\cdots+\alpha_m} \frac{(y-x)^l}{l!} \partial_*^l (f^1, \ldots, f^m)(x) \Delta_{yx}(f^{m+1}, \ldots, f^n)\end{aligned}$$

とおく．ここで $\partial_*^k (f^1, \ldots, f^n)$ も *(2)* と同様，$f^1, \ldots, f^n$ から決まる関数である．このとき，$\beta < \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ に対し $|\Delta_{yx}(f^1, \ldots, f^n)| \lesssim |y-x|^\beta$ が成り立つ．

(1) はよく知られた結果である．(2)-(4) は "拡張された Taylor 展開" に関する差分評価と言えるものである．このような差分を上手く記述する Hopf 代数を考えたい．まず $W = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{1, \ldots, n\}^k$ を $1, \ldots, n$ を並べた文字列全体とし，$\mathcal{W}$ を W で生成される自由可換代数とする．$\mathcal{W}$ に余積を

$$\mathring{\Delta}(i_1 \ldots i_k) = (i_1 \ldots i_k) \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes (i_1 \ldots i_k) + \sum_{l=1}^{k-1} (i_{l+1} \ldots i_k) \otimes (i_1 \ldots i_l)$$

と定義する．ラフパス理論の時と同様，$\mathcal{W}$ は Hopf 代数であることが分かる．

$\tilde{W} = W \times \mathbb{N}^d$ を "微分" も備えた文字列全体とする．すなわち $\tau_m := (\tau, m) \in \tilde{W}$ は τ の m 階微分と考える．微分写像 $\partial_i : \tilde{W} \to \tilde{W}$ を $\partial_i \tau_m = \tau_{m+e_i}$ と定義し，余積 $\mathring{\Delta}$ を

$$\mathring{\Delta} \partial_i = (\partial_i \otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \otimes \partial_i) \mathring{\Delta}$$

によって $\tilde{W}$ にも拡張する．また $\{\mathbf{X}_i\}_{i=1}^d$ を "多項式" を表す文字とし，余積 $\mathring{\Delta}$ を

$$\mathring{\Delta} \mathbf{X}_i = \mathbf{X}_i \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{X}_i$$

によって定義する．$\mathcal{H}$ を $\tilde{W} \cup \{\mathbf{X}_i\}_{i=1}^d$ から生成される自由可換代数とすると，$(\mathcal{H}, \mathring{\Delta})$ は Hopf 代数である．更に新しい余積 Δ を

$$\Delta = \exp\left(\sum_{i=1}^d \mathbf{X}_i \otimes \partial_i\right) \mathring{\Delta}$$

で定義する．ここで $\partial_i \mathbf{X}_j = 0$ とし，$\mathbf{X}_i$ は $\tau \mapsto \mathbf{X}_i\tau$ なる写像とする．このとき，$(\mathcal{H}, \Delta)$ は再び Hopf 代数になることが分かる．

$\beta_1, \ldots, \beta_n > 0$ を固定する．$\mathcal{H}$ に次数を

$$|(i_1 \ldots i_k)_m| = \beta_{i_1} + \cdots + \beta_{i_k} - |m|, \quad |\mathbf{X}_i| = 1$$

によって定義する．ここで $|m| = \sum_{i=1}^d m_i$ とする．このとき Hopf 代数 $\mathcal{H}$ は次数付きとなるが，負の次数を含んでしまう．そのため $|\tau_m| < 0$ となる文字列 τ_m は全て 0 に変換する準同型 J を以って

$$\mathcal{H}_+ = \mathcal{H}/\mathrm{Ker}J$$

と制限する．このとき指標群 G との組は正則構造 $(\mathcal{H}_+, G)$ をなす．この正則構造上で，定理 4.8 は次のように書き換えられる．

定理 4.9 (H)**.** $\alpha_i > \beta_i$，$i = 1, \ldots, n$ を固定する．

(1) 与えられた $f^i \in C^{\alpha_i}$，$i = 1, \ldots, n$ に対し，$(\mathbf{\Pi}, g)$ を

$$\mathbf{\Pi}(i_1 \ldots i_k)_m = g.((i_1 \ldots i_k)_m) = \partial_*^m(f^{i_1}, \ldots, f^{i_k})$$

で定義する．このとき $(\mathbf{\Pi}, g)$ は $(\mathcal{H}_+, G)$ 上のモデルである．

(2) $\beta > 0,\, g \in C^\beta$ とする．$\mathcal{H}_+$ 値関数を

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g} = &\sum_{|k| < \beta + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n} \partial_*^k(g, f^1, \ldots, f^n) \frac{\mathbf{X}^k}{k!} \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{|k_i| < \beta + \alpha_1 + \cdots + \alpha_i} \partial_*^{k_i}(g, f^1, \ldots, f^i) \frac{\mathbf{X}^{k_i}}{k_i!}((i+1)\ldots n) \\ &+ \sum_{|m| < \beta + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n} (\partial^m g) \frac{\mathbf{X}^m}{m!}(1 \ldots n)\end{aligned}$$

で定義すると，$\boldsymbol{g} \in \mathcal{D}^{\beta + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n}$ となる．

定理 4.8 の証明の概略を説明する．簡単のため (2) のみ考え，$\alpha_1, \alpha_2 \in (0,1)$ かつ $\alpha_1 + \alpha_2 > 1$ とする．

補題 4.10. $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d), \theta \in (0, \infty) \setminus \mathbb{N}$ に対し

$$T_{yx}^\theta f = f(y) - \sum_{|k| < \theta} \frac{(y-x)^k}{k!} \partial^k f(x)$$

とおく．$\alpha > 0, f \in C^\alpha$ ならば $\theta' \in [[\theta], [\theta]+1]$ に対し $|T_{yx}^\theta f_i| \lesssim 2^{-i(\alpha - \theta')}|y-x|^{\theta'}$ が成り立つ．

$T_{yx}^{\alpha_1+\alpha_2}(f^1, f^2)_i$ を次のように展開する．

$$\begin{aligned}T_{yx}^{\alpha_1+\alpha_2}(f^1, f^2)_i &= (f_{i-}^1 f_i^2)(y) - (f_{i-}^1 f_i^2)(x) - (y-x) \cdot \nabla (f_{i-}^1 f_i^2)(x) \\ &= (f_{i-}^1(y) - f_{i-}^1(x) - (y-x) \cdot \nabla f_{i-}^1(x)) f_i^2(y) \\ &\quad + f_{i-}^1(x)(f_i^2(y) - f_i^2(x) - (y-x) \cdot \nabla f_i^2(x)) \\ &\quad + (y-x) \cdot \nabla f_{i-}^1(x)(f_i^2(y) - f_i^2(x)) =: (\mathrm{I}) + (\mathrm{II}) + (\mathrm{III}).\end{aligned}$$

$\|f_i^2\|_{L^\infty} \lesssim 2^{-i\alpha_2}, \|\nabla f_{i-}^1\|_{L^\infty} \lesssim 2^{-i(\alpha_1 - 1)}$ であるから，(I) と (III) については任意の $\beta < \alpha_1 + \alpha_2$ について

$$|(\mathrm{I})| + |(\mathrm{III})| \lesssim 2^{-i(\alpha_1 + \alpha_2 - \beta)}|y-x|^\beta$$

が分かる．(II) についてはそのままでは良い評価にならないから，補正を加えて

$$\begin{aligned}\Delta_{yx}^{\alpha_1+\alpha_2}(f^1, f^2)_i &:= T_{yx}^{\alpha_1+\alpha_2}(f^1, f^2)_i - f^1(x)(f_i^2(y) - f_i^2(x) - (y-x) \cdot \nabla f_i^2(x)) \\ &= (\mathrm{I}) + (\mathrm{III}) - f_{i+}^1(x)(f_i^2(y) - f_i^2(x) - (y-x) \cdot \nabla f_i^2(x)) \\ &=: (\mathrm{I}) + (\mathrm{III}) - (\mathrm{II})'\end{aligned}$$

とする．ここで $f_{i+}^1 := f^1 - f_{i-}^1$ である．このとき $\|f_{i+}^1\|_{L^\infty} \lesssim 2^{-\alpha_1}$ であるから，任意の $\beta < \alpha_1 + \alpha_2$ について

$$|\Delta_{yx}^{\alpha_1+\alpha_2}(f^1, f^2)_i| \lesssim 2^{-i(\alpha_1+\alpha_2-\beta)}|y-x|^\beta$$

を得る．後は i について左辺の総和をとれば良いが，その前に $\Delta_{yx}^{\alpha_1+\alpha_2}(f^1, f^2)_i$ を整理すると

$$\begin{aligned}
&\Delta_{yx}^{\alpha_1+\alpha_2}(f^1, f^2)_i \\
&= (f_{i-}^1 f_i^2)(y) - (f_{i-}^1 f_i^2)(x) - (y-x)\cdot\nabla(f_{i-}^1 f_i^2)(x) - f^1(x)(f_i^2(y) - f_i^2(x) - (y-x)\cdot\nabla f_i^2(x)) \\
&= (f_{i-}^1 f_i^2)(y) - (f_{i-}^1 f_i^2)(x) - f^1(x)(f_i^2(y) - f_i^2(x)) - (y-x)\cdot(\nabla(f_{i-}^1 f_i^2) - f^1\nabla f_i^2)(x)
\end{aligned}$$

となり，この総和をとれば定理 4.8-(2) のような展開式を得る．

References

[1] E. Abe, *Hopf algebras*, Translated from the Japanese by Hisae Kinoshita and Hiroko Tanaka, Cambridge Tracts in Mathematics, **74**. Cambridge University Press, Cambridge-New York, 1980.

[2] S. Albeverio and S. Kusuoka, *The invariant measure and the flow associated to the Φ_3^4-quantum field model*, arXiv:1711.07108.

[3] H. Bahouri, J.-Y. Chemin, and R. Danchin, *Fourier analysis and nonlinear partial differential equations*, Springer, Heidelberg, 2011.

[4] I. Bailleul and F. Bernicot, *Higher order paracontrolled calculus*, arXiv:1609.06966.

[5] L. Bertini and G. Giacomin, *Stochastic Burgers and KPZ equations from particle systems*, Comm. Math. Phys. **183**. (1977), no. 3, 571-607.

[6] J.-M. Bony, *Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **14** (1981), no. 2, 209-246.

[7] Y. Bruned, A. Chanda, I. Chevyrev, and M. Hairer, *Renormalising SPDEs in regularity structures*, arXiv:1711.10239.

[8] Y. Bruned, M. Hairer, and L. Zambotti, *Algebraic renormalization of regularity structures*, arXiv:1610.08468.

[9] R. Catellier and K. Chouk, *Paracontrolled Distributions and the 3-dimensional Stochastic Quantization Equation*, arXiv:1310.6869.

[10] A. Chandra and M. Hairer, An analytic BPHZ theorem for Regularity Structures, arXiv:1612.08138.

[11] A. Connes and D. Kreimer, *Hopf algebras, renormalization and noncommutative geometry*, Comm. Math. Phys. **199**, no. 1, (1998), 203-242.

[12] P. Friz and M. Hairer, A Course on Rough Paths: With an Introduction to Regularity Structures, Universitext. Springer, Cham, 2014.

[13] P. Friz and N. B. Victoir, *Multidimensional stochastic processes as rough paths. Theory and applications*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **120**. Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[14] T. Funaki and J. Quastel, *KPZ equation, its renormalization and invariant measures*, Stoch. Partial Differ. Equ. Anal. Comput. **3** (2015), no. 2, 159-220.

[15] M. Gubinelli, *Controlling rough paths*, J. Funct. Anal. **216**, no. 1, (2004), 86-140.

[16] M. Gubinelli, *Ramification of rough paths*, J. Differential Equations **248**, no. 4, (2010), 693-721.

[17] M. Gubinelli and M. Hofmanová, *Global solutions to elliptic and parabolic Φ^4 models in Euclidean space*, arXiv:1804.11253.

[18] M. Gubinelli, P. Imkeller, and N. Perkowski, *Paracontrolled distributions and singular PDEs*, Forum Math. Pi **3** (2015), e6, 75pp.

[19] M. Gubinelli and N. Perkowski, *KPZ reloaded*, Comm. Math. Phys. **349** (2017), no. 1, 165-269.

[20] M. Hairer, *Solving the KPZ equation*, Ann. Math, **178** (2013), 559-664.

[21] M. Hairer, *A theory of regularity structures*, Invent. Math. **198** (2014), no. 2, 269-504.

[22] M. Hairer and D. Kelly, *Geometric versus non-geometric rough paths*, Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. **51** (2015), no. 1, 207-251.

[23] M. Hairer and J. Mattingly, *The strong Feller property for singular stochastic PDEs*, Ann. Inst. Henri Poincaré Probably. Stat. **54** (2018), no. 3, 1314-1340.

[24] M. Hoshino, *Global well-posedness of complex Ginzburg-Landau equation with a space-time white noise*, arXiv:1704.04396.

[25] M. Kardar, G. Parisi, and Y.-C. Zhang, *Dynamic scaling of growing interfaces*, Phys. Rev. Lett. **56** (1986) 889–892.

[26] A. Kupiainen, *Renormalization group and stochastic PDEs*, Ann. Henri Poincaé **17** (2-16), no. 3, 497-535.

[27] A. Kupiainen and M. Marcozzi, *Renormalization of Generalized KPZ Equation*, J. Stat. Phys. **166** (2017), no. 3-4, 876-902.

[28] T. J. Lyons, *Differential equations driven by rough signals*, Rev. Mat. Iberoamericana **14**, no. 2, (1998), 215-310.

[29] J.-C. Mourrat and H. Weber, *The dynamic Φ^4_3 model comes down from infinity*, Comm. Math. Phys. **356** (2017), no. 3, 673-753.

[30] G. Parisi and Y. S. Wu, *Perturbation theory without gauge fixing*, Sci. Sinica **24** (1981), no. 4, 483-496.

[31] M. E. Sweedler, *Hopf algebras*, Mathematics Lecture Note Series. W. A. Benjamin, Inc., New York, 1969.

[32] P. Tsatsoulis and H. Weber, *Spectral gap for the stochastic quantization equation on the* 2*-dimensional torus*, Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. **54** (2018), no. 3, 1204-1249.

[33] E. Wong and M. Zakai, *On the relation between ordinary and stochastic differential equations*, Internat. J. Engrg. Sci. 3, (1965), 213-229.