総体積保存則に拘束される偏微分方程式と発展方程式による抽象論的接近

深尾 武史　(京都教育大学・教育学部)*

概　要

本講演では, 力学的あるいは動的境界条件と呼ばれる境界上に未知関数の時間微分を含む境界条件下での Cahn–Hilliard 方程式系の適切性について考察する. 力学的境界条件下の放物型方程式には総体積保存則と呼ばれる特徴的な保存則の構造が潜んでいる. この総体積保存則を効果的に利用し, 抽象発展方程式の枠組みから適切性を論じる. また, その結果をもとにして退化放物型方程式への接近を試みる.

1. 導入

時間と空間変数を独立変数に持つ, スカラー値関数を求める放物型偏微分方程式において, 空間領域が有界もしくは境界をもつ場合, 初期条件と境界条件を補助的に課した初期値境界値問題を考察する場合がある. 例えば Dirichlet(ディリクレ), Neumann(ノイマン), Robin(ロビン, ロバン) 境界条件が代表的であり, それぞれを第1種, 第2種, 第3種境界条件とも呼ぶことからもこれらの条件が非常に一般的で様々な問題において古くからの研究対象となってきた補助条件であることが分かる.

近年, dynamic(力学的あるいは動的) 境界条件と呼ばれる条件を含む問題の研究が盛んに行われ始めた. これは境界条件に未知関数の時間微分を含む様な境界条件であり, 領域内部の主たる方程式と比較して境界上でも同様の方程式を考察することもできる. もやは力学的境界条件は主たる方程式を解くための補助条件では無く, この場合, 境界値問題は領域内部の方程式と境界上の方程式の system(連立系) あるいは transmission problem(接合問題) と見なすこともできる.

2. 力学的境界条件下での Cahn–Hilliard 方程式系

$0 < T < +\infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d (d = 2, 3)$ は十分滑らかな境界 $\Gamma := \partial\Omega$ をもつ有界領域とする. Cahn–Hilliard(カーン–ヒリアード) 方程式系 [7] はスピノーダル分解と呼ばれる2種の合金の相分離現象を記述する偏微分方程式としてよく知られている (例えば, Milanville[43] を参照):

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta\mu = 0 \quad \text{in } Q := (0, T) \times \Omega, \tag{1}$$

$$\mu = -\Delta u + \mathcal{W}'(u) - f \quad \text{in } Q, \tag{2}$$

方程式を特徴付ける非線形項 $\mathcal{W}'$ について, $\mathcal{W}$ はそのグラフの形状から二重井戸型ポテンシャルと呼ばれており, 例えば $\mathcal{W}(r) = (1/4)(r^2 - 1)$, つまり $\mathcal{W}'(r) = r^3 - r$ が原型のポテンシャルとしてよく取り扱われる. また, 秩序変数もしくはオーダーパラメータと呼ばれる相の状況を記述する関数 $u := u(t, x)$ が未知関数の1つであり, 例えば $u = 1$ ならば全て金属A, $u = -1$ ならば全て金属B, $u = 0$ ならば両金属が五分五分といった

Supported by JSPS KAKENHI Grant Number 17K05321.

* e-mail: fukao@kyokyo-u.ac.jp

解釈ができる．ここで, $\partial_{\boldsymbol{\nu}}$ を外向き単位法線 $\boldsymbol{\nu}$ 方向への微分とおくと, 現象論からすれば化学ポテンシャル $\mu := \mu(t,x)$ に課す境界条件として斉次 Neumann 境界条件

$$\partial_{\boldsymbol{\nu}}\mu = 0 \quad \text{on } \Sigma := (0,T) \times \Sigma$$

は u が体積保存則を満たす, すなわち次の保存則を満たすという視点からも妥当な境界条件であると考えられる:

$$\int_\Omega u(t)dx = \int_\Omega u(0)dx \quad \text{for all } t \in [0,T].$$

さらに u にも初期条件と共に斉次 Neumann 境界条件を課せは初期値境界値問題が考察できる．このとき, 自由エネルギー

$$E_{\mathrm{CH}}(z) := \int_\Omega \left\{ \frac{1}{2}|\nabla z|^2 dx + \mathcal{W}(z) \right\} dx$$

に対して,

$$\frac{d}{dt}E_{\mathrm{CH}}\bigl(u(t)\bigr) + \int_\Omega \bigl|\nabla \mu(t)\bigr|^2 dx = 0 \quad \text{for all } t \in [0,T].$$

を満たしながら系は発展していくことが分かる．

近年, Gal[28] や Goldstein–Miranville–Schimperna[31] らによって, 領域の内部と境界でそれぞれ Cahn–Hilliard 方程式系を考察する新しいモデルが提唱された:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \partial_{\boldsymbol{\nu}}\mu - \Delta_\Gamma \mu = 0 \quad \text{on } \Sigma, \tag{3}$$

$$\mu = \partial_{\boldsymbol{\nu}}u - \Delta_\Gamma u + \mathcal{W}_\Gamma'(u) - f_\Gamma \quad \text{on } \Sigma. \tag{4}$$

境界条件 (3) には時間微分を含むことから前述の (1), (2) と合わせて (1)–(4) は力学的境界条件下での Cahn–Hilliard 方程式系となる．この場合, (1) と (3) に注目すれば

$$\int_\Omega u(t)dx + \int_\Gamma u(t)d\Gamma = \int_\Omega u(0)dx + \int_\Gamma u(0)d\Gamma \quad \text{for all } t \in [0,T]$$

という特徴的な保存則が導出できる． 以後, これを総体積保存則と呼ぶことにする．(1)–(4) では

$$E_{\mathrm{GMS}}(z) := \int_\Omega \left\{ \frac{1}{2}|\nabla z|^2 dx + \mathcal{W}(z) \right\} dx + \int_\Gamma \left\{ \frac{1}{2}|\nabla_\Gamma z|^2 d\Gamma + \mathcal{W}_\Gamma(z) \right\} d\Gamma$$

に対して,

$$\frac{d}{dt}E_{\mathrm{GMS}}\bigl(u(t)\bigr) + \int_\Omega \bigl|\nabla \mu(t)\bigr|^2 dx + \int_\Gamma \bigl|\nabla_\Gamma \mu(t)\bigr|^2 d\Gamma = 0 \quad \text{for all } t \in [0,T].$$

を満たしながら系は発展していく．

3. 発展方程式による抽象論的接近

ここでは, (1)–(4) の適切性を論じるにあたり, 発展方程式による抽象論的接近を試みる. そのために, 以後対象とする問題 (GMS) を明確にしておく. 未知関数を $u, \mu : Q \to \mathbb{R}$ と $u_\Gamma, \mu_\Gamma : \Sigma \to \mathbb{R}$ とし, 次の系を考察する:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta \mu = 0 \quad \text{a.e. in } Q, \tag{5}$$

$$\mu = -\Delta u + \xi + \pi(u) - f, \quad \xi \in \beta(u) \quad \text{a.e. in } Q, \tag{6}$$

$$u_\Gamma = u_{|_\Gamma}, \quad \mu_\Gamma = \mu_{|_\Gamma}, \quad \frac{\partial u_\Gamma}{\partial t} + \partial_{\boldsymbol{\nu}} \mu - \Delta_\Gamma \mu_\Gamma = 0 \quad \text{a.e. on } \Sigma, \tag{7}$$

$$\mu_\Gamma = \partial_{\boldsymbol{\nu}} u - \Delta_\Gamma u_\Gamma + \xi_\Gamma + \pi_\Gamma(u_\Gamma) - f_\Gamma, \quad \xi_\Gamma \in \beta_\Gamma(u_\Gamma) \quad \text{a.e. on } \Sigma, \tag{8}$$

$$u(0) = u_0 \quad \text{a.e. in } \Omega, \quad u_\Gamma(0) = u_{0\Gamma} \quad \text{a.e. on } \Gamma, \tag{9}$$

ただし, $u_{|_\Gamma}$ は u のトレース, Δ_Γ は Γ 上の Laplace–Beltrami 作用素を意味する (例えば, Grigor'yan[32] を参照). また, $\mathcal{W}' := \beta + \pi$, すなわち β の原始関数 $\hat{\beta}$ を $\mathcal{W}$ の凸部分, π の原始関数 $\hat{\pi}$ を $\mathcal{W}$ の非凸部分と表現し, より広い二重井戸型ポテンシャル $\mathcal{W} = \hat{\beta} + \hat{\pi}$ まで取り扱うため, β, β_Γ を $\mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$ と, 多価写像まで広げて可解性を論じる.

- $\beta(r) = r^3$, $\pi(r) = -r$, $D(\beta) = \mathbb{R}$ の場合, $\mathcal{W}$ は次の原型の二重井戸型ポテンシャル

$$\mathcal{W}(r) = \frac{1}{4}(r^2 - 1)^2;$$

- $\beta(r) = \ln((1+r)/(1-r))$, $\pi(r) = -2cr$, $D(\beta) = (-1, 1)$ の場合, $\mathcal{W}$ は次の log 型ポテンシャル

$$\mathcal{W}(r) = \big((1+r)\ln(1+r) + (1-r)\ln(1-r)\big) - cr^2,$$

  ただし, $c > 0$ は凸性を崩す (二重井戸構造を作る) 十分大きな定数;

- $\beta(r) = \partial I_{[-1,1]}(r)$, $\pi(r) = -r$, $D(\beta) = [-1, 1]$ の場合, $\mathcal{W}$ は次の特異型ポテンシャル

$$\mathcal{W}(r) = I_{[-1,1]}(r) - \frac{1}{2}r^2,$$

  ここで, $I_{[-1,1]}$ は閉区間 $[-1, 1]$ 上の指示関数, すなわち

$$I_{[-1,1]}(r) = \begin{cases} 0 & \text{if } r \in [-1, 1], \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

  また, $\partial I_{[-1,1]}$ は $I_{[-1,1]}$ の劣微分を意味する (例えば, Barbu[6] を参照).

以後, 次の表記を用いる: $H := L^2(\Omega)$, $V := H^1(\Omega)$, $W := H^2(\Omega)$ $H_\Gamma := L^2(\Gamma)$, $V_\Gamma := H^1(\Gamma)$, $W_\Gamma := H^2(\Gamma)$, $\boldsymbol{H} := H \times H_\Gamma$, $\boldsymbol{V} := \big\{ \boldsymbol{z} := (z, z_\Gamma) \in V \times V_\Gamma : z_\Gamma = z_{|_\Gamma} \text{ a.e. on } \Gamma \big\}$, $\boldsymbol{W} := (W \times W_\Gamma) \cap \boldsymbol{V}$. また, 総体積保存則の効果的な利用から次の関数空間を用意する: $\boldsymbol{H}_0 := \{ \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{H} : m(\boldsymbol{z}) = 0 \}$, ここで, $m : \boldsymbol{H} \to \mathbb{R}$ は

$$m(\boldsymbol{z}) := \frac{1}{|\Omega| + |\Gamma|} \left\{ \int_\Omega z dx + \int_\Gamma z_\Gamma d\Gamma \right\} \quad \text{for all } \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{H}$$

と定義し, さらに簡単のため $m_0 := m(\boldsymbol{u}_0)$ とおく．ただし, $\boldsymbol{u}_0 := (u_0, u_{0\Gamma})$．また, $\boldsymbol{V}_0 := \boldsymbol{V} \cap \boldsymbol{H}_0$ とおく．それぞれの関数空間は通常のノルムを備えているが, $\boldsymbol{V}_0$ のノルムについては, Poincaré–Wirtinger の不等式により $|\boldsymbol{z}|_{\boldsymbol{V}_0} := a(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z})^{1/2}$ $(\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{V}_0)$ を採用する．また, 双線形形式 $a(\cdot, \cdot) : \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{V} \to \mathbb{R}$ を

$$a(\boldsymbol{z}, \tilde{\boldsymbol{z}}) := \int_\Omega \nabla z \cdot \nabla \tilde{z} dx + \int_\Gamma \nabla_\Gamma z_\Gamma \cdot \nabla_\Gamma \tilde{z}_\Gamma d\Gamma \quad \text{for all } \boldsymbol{z}, \tilde{\boldsymbol{z}} \in \boldsymbol{V},$$

で定義しておく．実際, $\boldsymbol{V}_0$ からその共役空間 $\boldsymbol{V}_0^*$ への写像 $\boldsymbol{F}$ を

$$\langle \boldsymbol{F}\boldsymbol{z}, \tilde{\boldsymbol{z}} \rangle_{\boldsymbol{V}_0^*, \boldsymbol{V}_0} := a(\boldsymbol{z}, \tilde{\boldsymbol{z}}) \quad \text{for all } \boldsymbol{z}, \tilde{\boldsymbol{z}} \in \boldsymbol{V}_0$$

と定義すれば $\boldsymbol{F} : \boldsymbol{V}_0 \to \boldsymbol{V}_0^*$ は双対写像となり, さらにある定数 $C_{\mathrm{P}} > 0$ が存在して

$$C_{\mathrm{P}} |\boldsymbol{z}|_{\boldsymbol{V}}^2 \le \langle \boldsymbol{F}\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z} \rangle_{\boldsymbol{V}_0^*, \boldsymbol{V}_0} = |\boldsymbol{z}|_{\boldsymbol{V}_0}^2 \quad \text{for all } \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{V}_0$$

を満たす．また, $\boldsymbol{V}_0 \hookrightarrow\hookrightarrow \boldsymbol{H}_0 \hookrightarrow\hookrightarrow \boldsymbol{V}_0^*$ なる稠密かつコンパクトな埋め込みが成立する (Colli–F[11, Appendix] を参照).

以上の設定の下, Kenmochi–Niezgódka–Pawłow[38] (他, [37, 39] も参照) による発展方程式の抽象理論による接近の着想に倣い適切性を論じることができる．そこで, 次の変数変換を用意する: $\boldsymbol{v} := (v, v_\Gamma) := (u - m_0, u_\Gamma - m_0)$, $\boldsymbol{v}_0 := (v_0, v_{0\Gamma}) := (u_0 - m_0, u_{0\Gamma} - m_0)$. また, 次の表記を用いる: $\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{z}) := (\beta(z), \beta_\Gamma(z_\Gamma))$, $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{z}) := (\pi(z), \pi_\Gamma(z_\Gamma))$.

以後, 以下を仮定する:

(A1) β, β_Γ: $\mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$ は極大単調で, ある適正下半連続凸関数 $\hat{\beta}, \hat{\beta}_\Gamma : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ で $\hat{\beta}(0) = \hat{\beta}_\Gamma(0) = 0$ を満たすものによって $\beta = \partial\hat{\beta}$, $\beta_\Gamma = \partial\hat{\beta}_\Gamma$ と劣微分で表現されている;

(A2) π, $\pi_\Gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は Lipshitz 連続;

(A3) $D(\beta_\Gamma) \subset D(\beta)$ で, さらにある定数 $\varrho, c_0 > 0$ が存在して

$$\left|\beta^\circ(r)\right| \le \varrho \left|\beta_\Gamma^\circ(r)\right| + c_0 \quad \text{for all } r \in D(\beta_\Gamma),$$

ここで, $\beta^\circ(r) := \{r^* \in \beta(r) : |r^*| = \min_{s \in \beta(r)} |s|\}$;

(A4) $m_0 \in \mathrm{int} D(\beta_\Gamma)$ でさらに $\hat{\beta}(u_0) \in L^1(\Omega)$, $\hat{\beta}(u_{0\Gamma}) \in L^1(\Gamma)$ が成立する;

(A5) $\boldsymbol{f} := (f, f_\Gamma) \in W^{1,1}(0, T; \boldsymbol{H})$ または $\boldsymbol{f} \in L^2(0, T; \boldsymbol{V})$, $\boldsymbol{u}_0 \in \boldsymbol{V}$.

β が一価写像であればもちろん $\beta^\circ = \beta$ である．また $\beta = \beta_\Gamma$ の場合には (A3) の仮定は必要ない．すなわち, (A3) は内部と境界で異なるポテンシャルを取るための条件で, β は (A3) の意味で β_Γ に支配されている (Calatroni–Colli[8]).

このとき, 以下の解の存在定理が成立する:

定理 2.1.[11, Theorem 2.2]

(A1)–(A5) の下, ある組み $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\xi})$ が次のクラス

$$\boldsymbol{v} \in H^1(0,T;\boldsymbol{V}_0^*) \cap L^\infty(0,T;\boldsymbol{V}_0) \cap L^2(0,T;\boldsymbol{W}),$$
$$\boldsymbol{\mu} \in L^2(0,T;\boldsymbol{V}), \quad \boldsymbol{\xi} \in L^2(0,T;\boldsymbol{H}),$$
$$\xi \in \beta(v+m_0) \ \textit{a.e. in } Q, \quad \xi_\Gamma \in \beta_\Gamma(v_\Gamma + m_0) \ \textit{a.e. on } \Sigma,$$

に存在して

$$\big\langle \boldsymbol{v}'(t), \boldsymbol{z} \big\rangle_{\boldsymbol{V}_0^*, \boldsymbol{V}_0} + a\big(\boldsymbol{\mu}(t), \boldsymbol{z}\big) = 0 \quad \textit{for all } \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{V}_0,$$
$$\big(\boldsymbol{\mu}(t), \boldsymbol{z}\big)_{\boldsymbol{H}} = a\big(\boldsymbol{v}(t), \boldsymbol{z}\big) + \big(\boldsymbol{\xi}(t) + \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{v}(t) + m_0\boldsymbol{1}) - \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{z}\big)_{\boldsymbol{H}} \quad \textit{for all } \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{V},$$

for a.a. $t \in (0,T)$ で, さらに $\boldsymbol{v}(0) = \boldsymbol{v}_0$ *in* $\boldsymbol{H}_0$ を満たす.

次の仮定の下では強解の存在が証明できる:

(A5)' $\boldsymbol{f} \in H^1(0,T;\boldsymbol{H})$, $\boldsymbol{f}(0) \in \boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{u}_0 \in \boldsymbol{V} \cap (H^3(\Omega) \times H^3(\Gamma))$, $\boldsymbol{\beta}^\circ(\boldsymbol{u}_0) \in \boldsymbol{V}$.

定理 2.2.[11, Theorem 4.2]

(A1)–(A4), (A5)' の下, ある組み $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\xi})$ が次のクラス

$$\boldsymbol{u} \in W^{1,\infty}(0,T;\boldsymbol{V}^*) \cap H^1(0,T;\boldsymbol{V}) \cap L^\infty(0,T;\boldsymbol{W}),$$
$$\boldsymbol{\mu} \in L^\infty(0,T;\boldsymbol{V}) \cap L^2(0,T;\boldsymbol{W}), \quad \boldsymbol{\xi} \in L^\infty(0,T;\boldsymbol{H}),$$
$$\xi \in \beta(u) \ \textit{a.e. in } Q, \quad \xi_\Gamma \in \beta_\Gamma(u_\Gamma) \ \textit{a.e. on } \Sigma,$$

に存在して (5)–(9) を満たす.

弱解の存在定理の証明の本質的な着想は, 次の抽象発展方程式の初期値問題とその近似解に対する一様評価の工夫にある:

$$\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{v}'(t) + \partial\varphi\big(\boldsymbol{v}(t)\big) = \boldsymbol{P}\big(-\boldsymbol{\xi}(t) - \boldsymbol{\pi}\big(\boldsymbol{v}(t) + m_0\boldsymbol{1}\big) + \boldsymbol{f}(t)\big) \quad \text{in } \boldsymbol{H}_0,$$
$$\boldsymbol{\xi}(t) \in \boldsymbol{\beta}\big(\boldsymbol{v}(t) + m_0\boldsymbol{1}\big) \quad \text{in } \boldsymbol{H}, \quad \text{for a.a. } t \in (0,T),$$
$$\boldsymbol{v}(0) = \boldsymbol{v}_0 \quad \text{in } \boldsymbol{H}_0.$$

ここで, $\varphi : \boldsymbol{H}_0 \to [0, +\infty]$ は次の適正下半連続凸関数

$$\varphi(\boldsymbol{z}) := \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega |\nabla z|^2 dx + \dfrac{1}{2}\int_\Gamma |\nabla_\Gamma z_\Gamma|^2 d\Gamma & \text{if } \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{V}_0, \\ +\infty & \text{if } \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{H}_0 \setminus \boldsymbol{V}_0. \end{cases}$$

また, $\boldsymbol{P} : \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}_0$ は $\boldsymbol{P}\boldsymbol{z} := \boldsymbol{z} - m(\boldsymbol{z})\boldsymbol{1}$, ただし $\boldsymbol{1} := (1,1)$. このとき, 楕円型正則性と Δz の評価を有効に使えば $D(\partial\varphi) = \boldsymbol{W} \cap \boldsymbol{V}_0$ でさらに, $\partial\varphi(\boldsymbol{z}) = (-\Delta z, \partial_{\boldsymbol{\nu}} z - \Delta_\Gamma z_\Gamma)$ を得る (Colli–F[11, Appendix], [13] を参照). この場合, $\boldsymbol{\mu} = \partial\varphi(\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{v} + m_0\boldsymbol{1}) - \boldsymbol{f}$ であるが, その $\boldsymbol{V}$ の一様評価を得るのに $\nabla\mu$, $\nabla_\Gamma\mu_\Gamma$ の評価に加え $m(\boldsymbol{\mu})$ の評価を工夫することで Poincaré–Wirtinger の不等式を応用する点が Kenmochi–Niezgódka–Pawłow[38] の本質的な着想の 1 つである.

GMSモデルについて, 解の連続依存性により弱解や強解の一意性も得られる[11, Theorem 2.1]. また, 境界上の熱源f_Γを制御項とする際の最適制御問題はF–Yamazaki[25], 最大正則性についてはKajiwara[35]で扱われている. その他, 関連する結果として有限要素法による数値計算に関連してCherfils–Petcu–Pierre[10], Cherfils–Petcu[9]や構造保存数値計算に強いFurihata–Matsuo[27]の離散変分導関数法に関連してF–Yoshikawa–Wada[26]が新しい. また新しいLiu–Wuモデル[42]も興味深い.

4. GMSモデルから退化放物型方程式への接近

未知関数を$u, \xi : Q \to \mathbb{R}$, $u_\Gamma, \xi_\Gamma : \Sigma \to \mathbb{R}$とし

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta \xi = g, \quad \xi \in \beta(u) \quad \text{in } Q, \tag{10}$$

$$\xi_\Gamma = \xi_{|_\Gamma}, \quad \xi_\Gamma \in \beta(u_\Gamma), \quad \frac{\partial u_\Gamma}{\partial t} + \partial_{\boldsymbol{\nu}} \xi - \Delta_\Gamma \xi_\Gamma = g_\Gamma \quad \text{on } \Sigma, \tag{11}$$

$$u(0) = u_0 \quad \text{in } \Omega, \quad u_\Gamma(0) = u_{0\Gamma} \quad \text{on } \Gamma. \tag{12}$$

$\beta(= \beta_\Gamma) : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$の選び方によって(10)–(12)は力学的境界条件下での様々な退化放物型方程式を意味する. 例えば

$$\beta(r) := \begin{cases} k_s r & r < 0, \\ 0 & 0 \le r \le L, \\ k_\ell (r - L) & r > L, \end{cases} \quad \beta(r) := r^{q-1}|r| \quad (q > 0), \quad \beta(r) := \partial I_{[0,1]}(r) \tag{13}$$

のように選べば, (10)–(12)はそれぞれStefan問題のエンタルピー形式(k_ℓ, k_s, Lは正定数), 多孔質媒体方程式($q > 1$), fast diffusion 方程式($0 < q < 1$), Hele-Shaw問題の弱形式となる.

力学的境界条件下でのStefan問題についてはAiki[1, 2, 3]によって1990年代からすでに研究がされており, そこではLaplace–Beltrami作用素は登場せず, Laplace–Beltrami作用素から得られる情報に頼ること無く解の存在を議論している点で, 近年盛んに研究されている力学的境界条件を含む問題とは異なる難しさがあった点に注意したい. また, この結果はIgbidaらによって, より一般的な問題に拡張されている[5, 34]. Hele-Shaw問題の弱形式に対してはIgbida[33]を参照せよ.

ここでは, 退化放物型方程式をGMSモデルの極限として特徴付ける: $\varepsilon \in (0,1]$

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \Delta \mu_\varepsilon = 0 \quad \text{in } Q, \tag{14}$$

$$\mu_\varepsilon = -\varepsilon \Delta u_\varepsilon + \xi_\varepsilon + \pi_\varepsilon(u_\varepsilon) - f, \quad \xi_\varepsilon \in \beta(u_\varepsilon) \quad \text{in } Q, \tag{15}$$

$$u_{\Gamma,\varepsilon} = (u_\varepsilon)_{|_\Gamma}, \quad \mu_{\Gamma,\varepsilon} = (\mu_\varepsilon)_{|_\Gamma}, \quad \frac{\partial u_{\Gamma,\varepsilon}}{\partial t} + \partial_{\boldsymbol{\nu}} \mu_\varepsilon - \Delta_\Gamma \mu_{\Gamma,\varepsilon} = 0 \quad \text{a.e. on } \Sigma, \tag{16}$$

$$\mu_{\Gamma,\varepsilon} = \varepsilon \partial_{\boldsymbol{\nu}} u_\varepsilon - \varepsilon \Delta_\Gamma u_{\Gamma,\varepsilon} + \xi_{\Gamma,\varepsilon} + \pi_\varepsilon(u_{\Gamma,\varepsilon}) - f_\Gamma, \quad \xi_{\Gamma,\varepsilon} \in \beta(u_{\Gamma,\varepsilon}) \quad \text{a.e. on } \Sigma, \tag{17}$$

$$u_\varepsilon(0) = u_{0,\varepsilon} \quad \text{a.e. in } \Omega, \quad u_{\Gamma,\varepsilon}(0) = u_{0\Gamma,\varepsilon} \quad \text{a.e. on } \Gamma, \tag{18}$$

ここで, $\pi_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$として, βの定義(13)と合わせて$\mathcal{W} := \hat{\beta} + \hat{\pi}_\varepsilon$が二重井戸型ポテンシャルとなるような適切な関数を選ぶことで(14)–(18)はCahn–Hilliard方程式の構造を持つ. 例えば, $\beta(r) = r^3$, $\pi_\varepsilon(r) = -\varepsilon r$.

以下, 次を仮定する:

(A6) $\boldsymbol{g} \in L^2(0,T;\boldsymbol{H}_0)$, $\boldsymbol{u}_0 \in \boldsymbol{H}$;

(A7) 任意の $\varepsilon \in (0,1]$ に対して $\pi_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は Lipschitz 連続. さらに, ある定数 $c_1 > 0$ と狭義単調増加な連続関数 $\sigma : [0,1] \to [0,1]$ で $\sigma(0) = 0$, $\sigma(1) = 1$ を満たすものが存在して $\bigl|\pi_\varepsilon(0)\bigr| + |\pi'_\varepsilon|_{L^\infty(\mathbb{R})} \le c_1\sigma(\varepsilon)$.

このとき, $\boldsymbol{f} \in L^2(0,T;\boldsymbol{V}_0)$ を $\partial\varphi(\boldsymbol{f}) = \boldsymbol{g}$ in $\boldsymbol{H}_0$ a.e. in $(0,T)$, $\boldsymbol{v}_{0,\varepsilon} \in \boldsymbol{V}_0$ を $\boldsymbol{v}_{0,\varepsilon} + \varepsilon\partial\varphi(\boldsymbol{v}_{0,\varepsilon}) = \boldsymbol{v}_0 := \boldsymbol{u}_0 - m_0\boldsymbol{1}$ in $\boldsymbol{H}_0$ を満たすように取れば, ある定数 $C > 0$ が存在して

$$|\boldsymbol{v}_{0,\varepsilon}|^2_{\boldsymbol{H}_0} \le C, \quad \varepsilon|\boldsymbol{v}_{0,\varepsilon}|^2_{\boldsymbol{V}_0} \le C,$$
$$\int_\Omega \hat{\beta}(v_{0,\varepsilon} + m_0)dx \le C, \quad \int_\Gamma \hat{\beta}(v_{0\Gamma,\varepsilon} + m_0)d\Gamma \le C \quad \text{for all } \varepsilon \in (0,1],$$
$$\boldsymbol{v}_{0,\varepsilon} \to \boldsymbol{v}_0 \quad \text{in } \boldsymbol{H}_0, \quad \boldsymbol{u}_{0,\varepsilon} := \boldsymbol{v}_{0,\varepsilon} + m_0\boldsymbol{1} \to \boldsymbol{u}_0 \quad \text{in } \boldsymbol{H} \quad \text{as } \varepsilon \to 0.$$

力学的境界条件下での退化放物型方程式 (10)–(12) は (14)–(18) からの極限操作によって可解性を論じることができる:

定理 3.1.[21, Theorem 2.1] [22, Theorem 2.1]

(A1), (A4), (A6), (A7) の下, ある組み $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\xi})$ が次のクラス

$$\boldsymbol{u} \in H^1(0,T;\boldsymbol{V}^*) \cap L^\infty(0,T;\boldsymbol{H}),$$
$$\boldsymbol{\xi} \in L^2(0,T;\boldsymbol{V}), \quad \xi \in \beta(u) \ \textit{a.e. in } Q, \quad \xi_\Gamma \in \beta(u_\Gamma) \ \textit{a.e. on } \Sigma,$$

に存在して

$$\bigl\langle u'(t), z \bigr\rangle_{V^*,V} + \bigl\langle u'_\Gamma(t), z_\Gamma \bigr\rangle_{V^*_\Gamma,V_\Gamma} + \int_\Omega \nabla\xi(t) \cdot \nabla z dx + \int_\Gamma \nabla_\Gamma\xi_\Gamma(t) \cdot \nabla_\Gamma z_\Gamma d\Gamma$$
$$= \int_\Omega g(t) z dx + \int_\Gamma g_\Gamma(t) z_\Gamma d\Gamma \quad \textit{for all } \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{V},$$

for a.a. $t \in (0,T)$ で, さらに $\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0$ *in* $\boldsymbol{H}$ を満たす.

連続依存性については [21, Theorem 2.2] を参照. Cahn–Hilliard 方程式系から退化放物型方程式への接近では境界条件は本質ではない. 例えば, Neumann 境界条件下では Colli-F[12] において誤差評価

$$|u_\varepsilon - u|^2_{C([0,T];V^*)} + \int_0^T \bigl(\xi_\varepsilon(s) - \xi(s), u_\varepsilon(s) - u(s)\bigr)_H ds \le \text{Const.}\varepsilon^{\frac{1}{2}}$$

も含めて同様の結果が, Robin 境界条件下では F–Motoda[24] において誤差評価や Neumann 境界条件下での問題への収束の結果が得られている.

また, [12] で述べられているように, Cahn–Hilliard 方程式系から退化放物型方程式への接近では非線形な拡散項を記述する β に関する増大条件の緩和について利点がある. 実際, 従来の $H^1(\Omega)$ の共役空間における発展方程式の抽象理論からの接近では $\hat{\beta}$ の積分をポテンシャルとし, その $H^1(\Omega)$ の共役空間での劣微分による特徴付けを行うが, その際に下半連続性を得るために増大条件は欠かせない仮定であった. Neumann 境界条件下では, Kenmochi[36] の他, 多孔質媒体方程式の場合に Akagi[4], log 型の場合に Kubo–Lu[40] など個別の問題ごとに可解性が考察されていた. その後, Robin 境界条件

下を例にDamlamian–Kenmochi[15]で“下半連続拡張”の着想が示され, 増大条件の緩和が可能となった. Cahn–Hilliard方程式系から退化放物型方程式への接近では, 非線形な拡散項はCahn–Hilliard方程式系における摂動項でしかないため“下半連続拡張”を用いる必要が無い点に利点がある. Damlamian[14]から始まった$H^1(\Omega)$の共役空間における発展方程式の抽象理論による接近で長年課題であった増大条件の緩和について[15]に継ぐ1つの解決策を与えたことになる(L^1の枠組みはBarbu[6]を参照せよ). 領域が非有界な場合にこの利点を利用したF–Kurima–Yokota[23]の結果もある.

5. 準静的問題へのさらなる展開

次の, 境界Σ上でのCahn–Hilliard方程式を考察する: $u_\Gamma, \mu_\Gamma : \Sigma \to \mathbb{R}$を未知とし

$$\frac{\partial u_\Gamma}{\partial t} - \Delta_\Gamma \mu_\Gamma = -\partial_{\boldsymbol{\nu}} \mu \quad \text{on } \Sigma, \tag{19}$$

$$\mu_\Gamma = -\Delta_\Gamma u_\Gamma + \mathcal{W}'_\Gamma(u_\Gamma) - f_\Gamma + \partial_{\boldsymbol{\nu}} u \quad \text{on } \Sigma, \tag{20}$$

ここで, 外向き単位法線方向微分$\partial_{\boldsymbol{\nu}}$は次の領域内部での補助方程式を満たす$Q$上の関数$\mu$, uに作用する:

$$-\Delta\mu = 0, \quad \tau\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \mathcal{W}'(u) = f \quad \text{in } Q, \tag{21}$$

ここで, 定数$\tau > 0$が0であれば内部の方程式は定常問題となり, 時間発展は境界上の方程式のみに現れる. つまり, 境界上でのCahn–Hilliard方程式を主とする時間発展のある方程式系と見なし, その主となる方程式を解くために補助条件として内部の方程式を課していると見なせる. もはや内部の方程式が境界上の方程式を解くための補助条件となり, 全体として準静的(quasi-static)な問題と言える. なお, 問題(19)–(21)では次の体積保存が成立する.

$$\int_\Gamma u_\Gamma(t)d\Gamma = \int_\Gamma u_{0\Gamma}d\Gamma \quad \text{for all } t \in [0,T].$$

問題(19)–(21)に関しても接合条件$u_\Gamma = u_{|_\Gamma}$, $\mu_\Gamma = \mu_{|_\Gamma}$と共にGMSモデルの結果を基軸にして可解性を論じることができる[13].

境界上で主たる時間発展のある方程式を考察し, 領域内部で定常問題を考える系については古くから研究がある. 例えば, Lions[41]の数学的興味に始まり, Escher[16], Fila–Quittner[20], 最近ではFila–Ishige–Kawakami[17, 18, 19], Gal–Meyries[29]などの先駆的な研究や, 現象論からの要請された境界上のCahn–Hilliard方程式系モデルとしてGarcke–Kampmann–Rätz–Röger[30]の研究も興味深い.

参考文献

[1] T. Aiki, Two-phase Stefan problems with dynamic boundary conditions, Adv. Math. Sci. Appl., **2** (1993), 253–270.

[2] T. Aiki, Multi-dimensional Stefan problems with dynamic boundary conditions, Appl. Anal., **56** (1995), 71–94.

[3] T. Aiki, Periodic stability of solutions to some degenerate parabolic equations with dynamic boundary conditions, J. Math. Soc. Japan, **48** (1996), 37–59.

[4] G. Akagi, Energy solutions of the Cauchy–Neumann problem for porous medium equations, pp.1–10 in “*Discrete and Continuous Dynamical Systems, supplement 2009* ”, American Institute of Mathematical Sciences, 2009.

[5] F. Andreu, J. M. Mazón, J. Toledo and N. Igbida, A degenerate elliptic-parabolic problem with nonlinear dynamical boundary conditions, Interfaces Free Bound., **8** (2006), 447–479.

[6] V. Barbu, *Nonlinear differential equations of monotone types in Banach spaces*, Springer, London 2010.

[7] J. W. Cahn and J. E. Hilliard, Free energy of a nonuniform system I. Interfacial free energy, J. Chem. Phys., **2** (1958), 258–267.

[8] L. Calatroni and P. Colli, Global solution to the Allen–Cahn equation with singular potentials and dynamic boundary conditions, Nonlinear Anal., **79** (2013), 12–27.

[9] L. Cherfils and M. Petcu, A numerical analysis of the Cahn–Hilliard equation with non-permeable walls, Numer. Math., **128** (2014), 518–549.

[10] L. Cherfils, M. Petcu and M. Pierre, A numerical analysis on the Cahn–Hilliard equation dynamic boundary conditions, Discrete Contin. Dyn. Syst., **27** (2010), 1511–1533.

[11] P. Colli and T. Fukao, Equation and dynamic boundary condition of Cahn–Hilliard type with singular potentials, Nonlinear Anal., **127** (2015), 413–433.

[12] P. Colli and T. Fukao, Nonlinear diffusion equations as asymptotic limits of Cahn–Hilliard systems, J. Differential Equations, **260** (2016), 6930–6959.

[13] P. Colli and T. Fukao, Cahn–Hilliard equation on the boundary with bulk condition of Allen–Cahn type, preprint arXiv:1803.05314v4 [math.AP] (2018), pp. 1–30, to appear in Adv. Nonlinear Anal.

[14] A. Damlamian, Some results on the multi-phase Stefan problem, Comm. Partial Differential Equations, **2** (1977), 1017–1044.

[15] A. Damlamian and N. Kenmochi, Evolution equations generated by subdifferentials in the dual space of $(H^1(\Omega))$, Discrete Contin. Dyn. Syst., **5** (1999), 269–278.

[16] J. Escher, Smooth solutions of nonlinear elliptic systems with dynamic boundary conditions, pp. 173–183 in "*Evolution equations, control theory, and biomathematics*", Lecture Notes in Pure and Appl. Math., **155**, Dekker, New York, 1994.

[17] M. Fila, K. Ishige and T. Kawakami, Convergence to the Poisson kernel for the Laplace equation with a nonlinear dynamical boundary condition, Commun. Pure. Appl. Anal., **11** (2012), 1285–1301.

[18] M. Fila, K. Ishige and T. Kawakami, Existence of positive solutions of a semilinear elliptic equation with a dynamical boundary condition, Calc. Var. Partial Differential Equations, **54** (2015), 2059–2078.

[19] M. Fila, K. Ishige and T. Kawakami, The large diffusion limit for the heat equation with a dynamical boundary condition, preprint arXiv:1806.06308 [math.AP] (2018), pp. 1–19.

[20] M. Fila and P. Quittner, Global solutions of the Laplace equation with a nonlinear dynamical boundary condition, Math. Methods Appl. Sci., **20** (1997), 1325–1333.

[21] T. Fukao, Convergence of Cahn–Hilliard systems to the Stefan problem with dynamic boundary conditions, Asymptot. Anal., **99** (2016), 1–21.

[22] T. Fukao, Cahn–Hilliard approach to some degenerate parabolic equations with dynamic boundary conditions, pp. 282–291 in: L. Bociu, J-A. Désidéri and A. Habbal (Eds.), *System Modeling and Optimization*, Springer, Switzerland, 2016.

[23] T. Fukao, S. Kurima and T. Yokota, Nonlinear diffusion equations as asymptotic limits of Cahn–Hilliard systems on unbounded domains via Cauchy's criterion, Math. Methods Appl. Sci., **41** (2018), 2590–2601.

[24] T. Fukao and T. Motoda, Nonlinear diffusion equations with Robin boundary conditions as asymptotic limits of Cahn–Hilliard systems, J. Elliptic Parabol. Equ., **4** (2018), 271–

291.

[25] T. Fukao and N. Yamazaki, A boundary control problem for the equation and dynamic boundary condition of Cahn–Hilliard type, pp.255–280 in "*Solvability, Regularity, Optimal Control of Boundary Value Problems for PDEs*", Springer INdAM Series, Vol.22, Springer, Cham, 2017.

[26] T. Fukao, S. Yoshikawa and S. Wada, Structure-preserving finite difference schemes for the Cahn–Hilliard equation with dynamic boundary conditions in the one-dimensional case, Commun. Pure Appl. Anal., **16** (2017), 1–20.

[27] D. Furihata and T. Matsuo, "*Discrete variational derivative method. A structure-preserving numerical method for partial differential equations*", Chapman & Hall/CRC Numerical Analysis and Scientific Computing, CRC Press, Boca Raton, 2011.

[28] C. Gal, A Cahn–Hilliard model in bounded domains with permeable walls, Math. Methods Appl. Sci., **29** (2006), 2009–2036.

[29] C. Gal and M. Meyries, Nonlinear elliptic problems with dynamical boundary conditions of reactive and reactive-diffusive type, Proc. Lond. Math. Soc. (3), **108** (2014), 1351–1380.

[30] H. Garcke, J. Kampmann, A. Rätz and M. Röger, A coupled surface-Cahn–Hilliard bulk-diffusion system modeling lipid raft formation in cell membranes, Math. Models Methods Appl. Sci., **26** (2016), 1149–1189.

[31] G. R. Goldstein, A. Miranville and G. Schimperna, A Cahn–Hilliard model in a domain with non-permeable walls, Physica D, **240** (2011), 754–766.

[32] A. Grigor'yan, *Heat kernel and analysis on manifolds*, American Mathematical Society, International Press, Boston, 2009.

[33] N. Igbida, Hele-Shaw type problems with dynamical boundary conditions, J. Math. Anal. Appl., **335** (2007), 1061–1078.

[34] N. Igbida and M. Kirane, A degenerate diffusion problem with dynamical boundary conditions, Math. Ann. **323** (2002), 377–396.

[35] N. Kajiwara, Maximal L_p regularity of a Cahn–Hilliard equation in bounded domains with permeable and non-permeable walls, preprint 2017.

[36] N. Kenmochi, Neumann problems for a class of nonlinear degenerate parabolic equations, Differential Integral Equations, **2** (1990), 253–273.

[37] N. Kenmochi and M. Niezgódka, Viscosity approach to modelling non-isothermal diffusive phase separation, Japan J. Indust. Appl. Math., **13** (1996), 135–169.

[38] N. Kenmochi, M. Niezgódka and I. Pawłow, Subdifferential operator approach to the Cahn–Hilliard equation with constraint, J. Differential Equations, **117** (1995), 320–354.

[39] M. Kubo, The Cahn–Hilliard equation with time-dependent constraint, Nonlinear Anal., **75** (2012), 5672–5685.

[40] M. Kubo and Q. Lu, Nonlinear degenerate parabolic equations with Neumann boundary condition, J. Math. Anal. Appl., **307** (2005), 232–244.

[41] J. L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod Gauthier-Villas, Paris, 1968.

[42] C. Liu and H. Wu, An energetic variational approach for the Cahn–Hilliard equation with dynamic boundary conditions: derivation and analysis, preprint arXiv:1710.08318 [math.AP] (2017), pp. 1–68.

[43] A. Miranville, The Cahn–Hilliard equation and some of its variants, AIMS Mathematics., **2** (2017), 479–544.