

完全WKB解析と位相的漸化式

岩木 耕平 (名古屋大学多元数理科学研究科)*

概要

Eynard-Orantin によって導入された位相的漸化式と完全 WKB 解析の関わりについて概説する. 特に, 位相的漸化式から計算される相関関数や自由エネルギーと, Schrödinger 型線形微分方程式の WKB 解や Voros 係数, さらに Painlevé 方程式の解 (τ -関数) との関係について述べる.

1. 背景

目標は位相的漸化式と呼ばれる枠組みが完全 WKB 解析に与える様々な知見について紹介することであるが, まず研究の背景として, WKB 解や Voros 係数の完全 WKB 解析における役割, また Painlevé 方程式の WKB 解析について説明しておきたい. 完全 WKB 解析の入門書として, [河竹] を挙げておくので, 詳細はそちらを参照して頂きたい.

1.1. WKB 解と Voros 係数

Voros ([V]) により創始された完全 WKB 解析 (exact WKB analysis) とは, (定常的)1次元 Schrödinger 方程式

$$\left(\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} - Q(x)\right) \psi(x, \hbar) = 0 \quad (1.1)$$

のような, 小さなパラメータ \hbar (あるいは大きなパラメータ $\eta = \hbar^{-1}$) を含む特異摂動型の微分方程式に対する手法である. \hbar に関する形式級数として構成される (1.1) の WKB 解

$$\psi(x, \hbar) = \exp\left(\frac{1}{\hbar} \int^x \sqrt{Q(x)} dx - \frac{1}{4} \log Q(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \hbar^m \int^x S_m(x) dx\right) \quad (1.2)$$

の Borel 和として得られる解析的な解が主役である. Stokes グラフと呼ばれる x -平面内のグラフにより WKB 解の Borel 和の性質は規定され, 接続公式などを exact に記述できることが完全 WKB 解析の強みである.

以下, $Q(x)$ は有理関数であるとする. WKB 解の対数微分として得られる形式級数 $S(x, \hbar) = d \log \psi(x, \hbar) / dx = \sum_{m=-1}^{\infty} \hbar^m S_m(x)$ の各係数は漸化式

$$S_{-1}(x)^2 = Q(x), \quad 2S_{-1}(x)S_0(x) + \frac{dS_{-1}(x)}{dx} = 0, \quad (1.3)$$

$$2S_{-1}(x)S_{m+1}(x) + \sum_{\substack{m_1+m_2=m \\ m_1, m_2 \geq 0}} S_{m_1}(x)S_{m_2}(x) + \frac{dS_m(x)}{dx} = 0 \quad (1.4)$$

本研究は科研費 (課題番号:16K17613, 16H06337, 16K05177, 17H06127) の助成を受けたものである。

2010 Mathematics Subject Classification: 34M60, 34M55, 81T45

キーワード: 完全 WKB 解析, Voros 係数, Painlevé 方程式, 位相的漸化式

* 〒464-8602 愛知県名古屋市千種区不老町 名古屋大学多元数理科学研究科

e-mail: iwaki@math.nagoya-u.ac.jp

を満たしており、機能的に求めることができる。これらの係数は $\sqrt{Q(x)}$ を用いて表される 2 価関数であり、特に $Q(x)$ の零点に特異性を持っていることが特徴である。同じことだが、これらは $y^2 = Q(x)$ で定義される Riemann 面 Σ 上の有理型関数である。 Σ は (1.1) の古典極限と呼ばれ、元の x -平面の 2 重被覆である。

適当な仮定の下で、 $m \geq 1$ ならば、 $Q(x)$ の極を端とする $S_m(x)$ の積分が定義できる。特に、 $Q(x)$ のある特異点から特異点までの路 γ に沿った積分により得られる形式級数

$$V_\gamma(\hbar) = \int_\gamma (S(x, \hbar) - \hbar^{-1}S_{-1}(x) - S_0(x)) dx = \sum_{m=1}^{\infty} \hbar^m \int_\gamma S_m(x) dx \quad (1.5)$$

は (1.1) の (γ に付随する) **Voros 係数** と呼ばれる。Voros 係数は、以下の点において完全 WKB 解析の研究において重要な概念である：

- モノドロミーの計算への応用: 完全 WKB 解析の顕著な応用として、(1.1) の形の 2 階線形微分方程式の (Stokes グラフが非退化という条件下で) 解の接続公式・モノドロミー行列の計算手法が与えられた ([佐青河竹, 河竹])。それによると、 Σ 上の周期積分 $\oint_\alpha S(x, \hbar) dx$ ($\alpha \in H_1(\Sigma; \mathbb{Z})$) として定まる形式級数の Borel 和が、特性指数だけでは記述できないモノドロミー行列の非自明な成分を記述する。周期積分は (積分路を分割することで) いくつかの Voros 係数の和として表すことが可能であり、ゆえに Voros 係数は周期積分よりも基本的な対象であると同時に、複素領域上の微分方程式論において極めて重要な対象である。
- パラメトリック Stokes 現象の解析: Stokes グラフが退化した場合には、Borel 変換が持つ“動かない特異点”により WKB 解の Borel 総和可能性は損なわれる ([V, DDP])。この動かない特異点が引き起こす Stokes 現象はパラメトリック Stokes 現象と呼ばれる。(次の例 1.1 の方程式が含む λ のようなパラメータが変化する際に起こることが名前の由来である。) 実はパラメトリック Stokes 現象の解析は Voros 係数の Borel 変換が持つ特異点の解析に帰着される (例えば [AKT, KoT])。また、パラメトリック Stokes 現象を記述する公式は完全 WKB 解析とクラスター代数との関係 ([IN]) においても重要であり、特に Voros 係数の指数 $\exp(V_\gamma)$ として得られる形式級数の Borel 和がクラスター変数を実現する。

例 1.1 $Q(x)$ が 2 次の多項式の場合、方程式 (1.1) は適当な変数変換で次の **Weber 方程式** に帰着できる：

$$\left(\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} - \left(\frac{x^2}{4} - \lambda \right) \right) \psi(x, \hbar) = 0. \quad (1.6)$$

ここで $\lambda \in \mathbb{C}$ は定数である。漸化式 (1.4) から初めの数項を求めると以下ようになる：

$$S_{-1}(x) = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 - 4\lambda}, \quad S_0(x) = -\frac{x}{2(x^2 - 4\lambda)}, \quad S_1(x) = -\frac{3x^2 - 8\lambda}{4(x^2 - 4\lambda)^{5/2}},$$

$$S_2(x) = -\frac{3x(x^2 + 6\lambda)}{(x^2 - 4\lambda)^4}, \quad S_3(x) = -\frac{297x^4 + 2928x^2\lambda + 1216\lambda^2}{16(x^2 - 4\lambda)^{11/2}}.$$

$S_1(x)$ 以降は $x \rightarrow \infty$ を端点とする積分が定義できることに注意されたい。特に $\lambda \neq 0$ の場合に、被覆写像 $\Sigma \rightarrow \mathbb{P}^1$ による $x = \infty$ の異なる 2 つの逆像 ∞_1, ∞_2 を結ぶ路に対し

て定まる Weber 方程式 (1.6) の Voros 係数は次で与えられる ([T]):

$$V(\hbar) = \int_{\infty_2}^{\infty_1} \left(S(x, \hbar) - \hbar^{-1} S_{-1}(x) - S_0(x) \right) dx = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2^{1-2m} - 1) B_{2m}}{2m(2m-1)} \left(\frac{\hbar}{\lambda} \right)^{2m-1}. \quad (1.7)$$

ここで, B_{2m} は Bernoulli 数であり, 次で定義される.

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m}{m!} t^m.$$

Voros 係数 (1.7) の Borel 和はガンマ函数により与えられ, それが Weber 方程式 (1.6) の不確定特異点 $x = \infty$ の周りの Stokes 行列の非自明な成分を記述する. また, (1.7) の具体形を用いることで Borel 変換が持つ特異点における外来微分 (alien derivative) が計算でき, 結果としてパラメトリック Stokes 現象が exact に解析される. (この場合, [IN] により対応するクラスター代数は自明な A_1 -型となる.)

1.2. Painlevé 方程式

河合-竹井は, (1.1) のような特異摂動型線形方程式のモノドロミー保存変形 ([岡]) を考えることで, 非線形方程式である Painlevé 方程式に対する完全 WKB 解析の拡張を試みた ([KT], [河竹, §4]). 例えば, 小さなパラメータを含んだ Painlevé I 型方程式

$$(P_1) : \quad \hbar^2 \frac{d^2 q}{dt^2} = 6q^2 + t$$

は, 線形偏微分方程式系

$$\left[\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\hbar^2}{x-q} \frac{\partial}{\partial x} - (4x^3 + 2tx + 2H) + \hbar \frac{p}{x-q} \right] \psi(x, t, \hbar) = 0 \quad (1.8)$$

$$\left[\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2(x-q)} \left(\hbar \frac{\partial}{\partial x} - p \right) \right] \psi(x, t, \hbar) = 0 \quad (1.9)$$

(ただし $p = \hbar dq/dt$, $H = p^2/2 - 2q^3 - tq$) の両立条件を記述する. 河合-竹井は, (1.8) の WKB 解や Stokes グラフの性質などを元に, Painlevé 方程式の 2-パラメータ解を構成し, 変わり点や Stokes 曲線の概念を導入, そして変わり点における WKB 解析的変換論を確立するなど, Painlevé 方程式の非線形 Stokes 現象を論じる枠組みを整備した. 講演者も [I] において Painlevé 方程式に (非線形) Voros 係数の概念を導入してパラメトリック Stokes 現象を解析するなど, 多少貢献したつもりであるが, やはり 2-パラメータ解の解析的性質に関するさらなる研究が必要であると感じている¹. また, 完全 WKB 解析の枠組みにおいて, Painlevé 方程式の理論において非常に重要な τ -函数が果たすべき役割も明確でない. I 型の場合, (P_1) の解 $q(t, \hbar)$ に対して

$$\hbar^2 \frac{d^2}{dt^2} \log \tau(t, \hbar) = -q(t, \hbar) \quad (1.10)$$

として定まるのが τ -函数である. (q を Wierstrass の \wp -函数の類似と思つた際の, σ -函数の類似が τ -函数である.) 2012 年に Lisovsky らによって示された共形場理論を用いた 2-パラメータ解の構成² ([GIL]) との関係や, 明らかにすべきことは数多くある.

¹ 2018 年度年会 (於: 東京大学) の函数方程式論分科会の特別講演において, 竹井義次氏によりこの問題への楕円函数を用いた一つのアプローチが提唱された.

² Lisovsky らは確定特異点型である Painlevé VI 型方程式およびそのいくつかの合流により得られる Painlevé 方程式の τ -函数を構成した. 不確定特異点型の共形場理論を用いた τ -函数の構成については名古屋創氏により議論 (予想) されている ([N1, N2]) が, 最も不確定度が高い (P_1) については, 共形場理論を用いた 2-パラメータ解の構成法は現時点で知られていないようである.

1.3. 位相的漸化式との繋がり

ここまで、背景として完全 WKB 解析における Voros 係数の重要性、Painlevé 方程式の WKB 解析における現状について簡単に述べた。講演者は近年、完全 WKB 解析の理論の発展、および他分野への応用を目指し、数理物理分野で注目を集めている位相的漸化式 (topological recursion) と完全 WKB 解析との関係性を探っている。位相的漸化式とは、行列模型におけるループ方程式の一般化として、Eynard と Orantin に導入されたものであり、与えられた代数曲線から“相関関数”や“分配関数 (自由エネルギー)”と呼ばれる量を機能的に与えるアルゴリズムである。具体的な定義は次節で紹介する。

位相的漸化式と WKB 解析の関係については 2012 年ごろから [GS, DM, BE] などでも明らかにされてきた。それらの先行研究に触発され、[IKoT] では超幾何微分方程式、およびその合流によって得られる 2 階の線形微分方程式の Voros 係数が、古典極限として得られる代数曲線から位相的漸化式により定まる自由エネルギーの差分として記述できることを明らかにした (神戸大学の小池達也氏、竹井優美子氏との共同研究)。特に、(1.7) に現れた Bernoulli 数が、実は Harer-Zagier ([HZ]) による Riemann 面のモジュライ空間の Euler 標数の表示に現れる Bernoulli 数と同じ起源を持つことなどが明らかになった (例 2.5 参照)。また Painlevé 方程式については、[IM, IMS, IS] において、0-パラメータ解³ $q(t, \hbar) = \sum_{m=0}^{\infty} \hbar^m q_m(t)$ に対応する τ -関数

$$\tau(t, \hbar) = \exp \left(\sum_{g=0}^{\infty} \hbar^{2g-2} F_g(t) \right) \quad (1.11)$$

も位相的漸化式の分配関数として計算できることを示した (Lyon の Oliver Marchal 氏、Virginia の Axel Saenz 氏との共同研究)。これらの事実は全て、「WKB 解を定める漸化式 (1.4) の中に位相的漸化式が含まれている」という観測に基づいている。講演ではこれらの結果を紹介したい。

2. Eynard-Orantin の位相的漸化式と量子曲線

[EO1] で導入された位相的漸化式は、数学的には「コンパクト Riemann 面 \mathcal{C} およびその上の 2 つの有理型関数 x, y の組が与えられたとき、 \mathcal{C} の直積空間上の微分形式の族 $\{W_{g,n}(z_1, \dots, z_n)\}_{g \geq 0, n \geq 1}$ と数列 $\{F_g\}_{g \geq 0}$ を帰納的に定める漸化式」である。行列模型の言葉を流用して、インプットとして与えられるデータ (\mathcal{C}, x, y) はスペクトル曲線、アウトプットの $W_{g,n}$ は相関関数、 F_g は自由エネルギーとそれぞれ呼ばれる。位相的漸化式は一見しても何が計算されているのか分からない不思議な漸化式であるが、適切に選ばれたスペクトル曲線から様々な幾何学的不変量が $W_{g,n}$ や F_g として計算されており (例 2.4 参照)、それ故にこの漸化式は研究者の興味を集めている。[EO2] は位相的漸化式のレビュー論文であるので、興味を持たれた方はそちらも参照されたい。

2.1. 位相的漸化式

位相的漸化式とは、次のスペクトル曲線を初期データとする漸化式である。

定義 2.1 ([BE, Definition 2.1]; cf. [EO1, §3]) コンパクト Riemann 面 \mathcal{C} 、および有理型関数 $x, y : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{P}^1$ であって、 dx と dy が共通零点を持たないようなもの組 (\mathcal{C}, x, y) をスペクトル曲線と呼ぶ。

³ 積分定数を含まないのこのように呼ばれる。これは 2-パラメータ解を最も退化させたものである。

以下では $\mathcal{C} = \mathbb{P}^1$ で、 z をその標準的な座標とし、 x, y が z の有理函数である場合のみを考える。また、 R を写像 $x: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{P}^1$ の分岐点 (dx の零点または x の2位以上の極) 全体の集合とし、分岐点は全て単純であることも仮定しておく。この仮定により、各 $r \in R$ の近傍における z の局所共役点 \bar{z} ($x(z) = x(\bar{z})$ かつ $y(z) \neq y(\bar{z})$ を満たす点) が定まる。これらの準備の下、位相的漸化式は次のように定式化される。

定義 2.2 ([EO1, Definition 4.2]) 与えられたスペクトル曲線 (\mathcal{C}, x, y) から、以下の漸化式で定まる \mathcal{C} 上の有理型多重微分 $W_{g,n}(z_1, \dots, z_n)$ ($g \geq 0, n \geq 1$) を、 (g, n) -型の相関函数と呼ぶ:

$$W_{0,1}(z_1) = y(z_1)dx(z_1), \quad (2.1)$$

$$W_{0,2}(z_1, z_2) = \frac{dz_1 dz_2}{(z_1 - z_2)^2}, \quad (2.2)$$

$$W_{g,n+1}(z_0, z_1, \dots, z_n) = \sum_{r \in R} \operatorname{Res}_{z=r} K_r(z_0, z) \left[W_{g-1, n+1}(z, \bar{z}, z_1, \dots, z_n) \right. \\ \left. + \sum_{\substack{I \sqcup J = \{1, \dots, n\} \\ g_1 + g_2 = g}} W_{g_1, 1+|I|}(z, z_I) W_{g_2, 1+|J|}(\bar{z}, z_J) \right]. \quad (2.3)$$

ここで、

$$K_r(z_0, z) = \frac{1}{2} \frac{\int_{w=\bar{z}}^{w=z} W_{0,2}(w, z_0)}{(y(z) - y(\bar{z}))dx(z)} \quad (2.4)$$

であり、また (2.3) の最後の和は $\{1, \dots, n\}$ の (空集合も許す) 任意の分割に関する和であり、 $I = \{i_1, i_2, \dots, i_m\} \subset \{1, \dots, n\}$ ($i_1 < i_2 < \dots < i_m$) とすると $W_{g, m+1}(z, z_I) = W_{g, m+1}(z, z_{i_1}, \dots, z_{i_m})$ である。また、和における ' は $(g_1, I) = (0, \emptyset)$ および $(g_2, J) = (0, \emptyset)$ なる場合を除外することを意味する。

注意 1 ここでは $\mathcal{C} = \mathbb{P}^1$ の場合を扱っているが、一般に \mathcal{C} の種数が高い場合は $(H_1(\mathcal{C}, \mathbb{Z}))$ のシンプレクティック基底を固定した上で $W_{0,2}(z_1, z_2)$ を Bergman 核 ([EO1, §3.1.5]) と呼ばれる有理型双微分を選ぶ。(2.2) は \mathbb{P}^1 上の Bergman 核に他ならない。

位相的漸化式は、点付き Riemann 面の退化 (図 2.1) を模式的に表しているとして解釈でき、特に $\chi = 2g - 2 + n$ に関する漸化式になっている。相関函数 $W_{g,n}$ は以下の性質を持つことが知られている ([EO1]):

- $W_{g,n}$ は各変数 z_i について \mathcal{C} 上の有理型微分であり、 $2g - 2 + n \geq 1$ ならば $\mathcal{C} \setminus R$ 上で正則。(特に、 $x(z)$ の極が分岐点でなければ、そこで $W_{g,n}$ は正則になる.)
- $W_{g,n}$ は変数 z_1, \dots, z_n に関して対称 (変数の任意の置換の下で不変)。
- $x(z)$ および $y(z)$ がある複素パラメータ λ に正則に依存している場合、(スペクトル曲線に対する仮定がみたされるような λ -平面の領域上で) $W_{g,n}$ は λ に関しても正則。さらに、そのパラメータ λ がある条件を満たせば、 $W_{g,n}$ の λ に関する微分を記述する公式を書き下すことができる ([EO1, §5])。

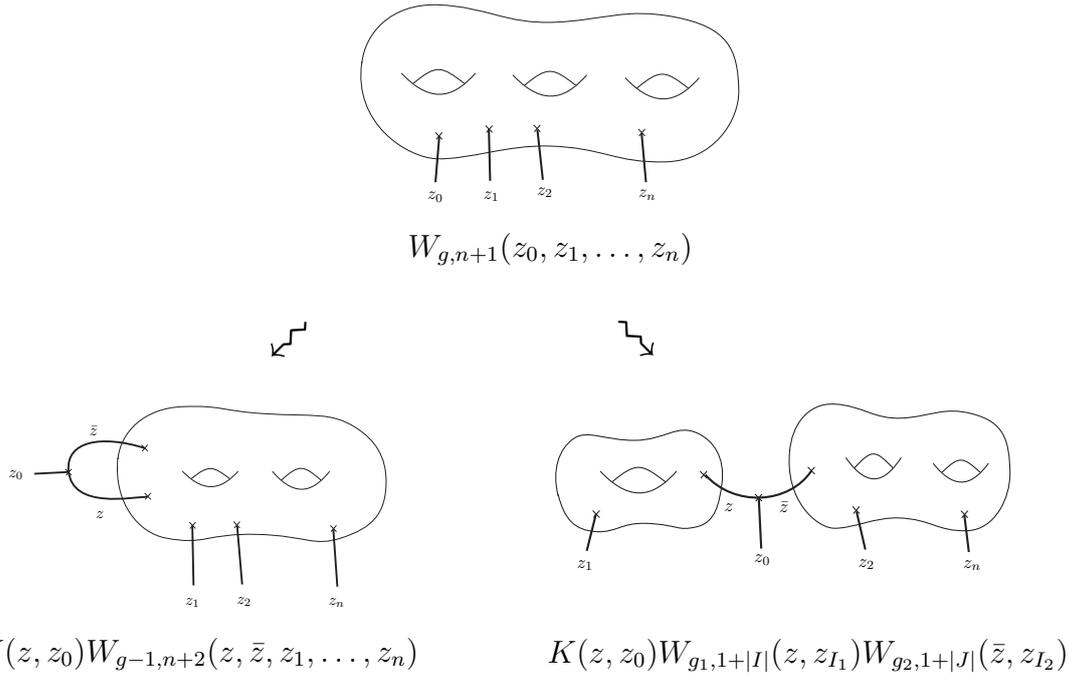


図 2.1: 位相的漸化式と点付き Riemann 面の退化.

定義 2.3 ([EO1, Definition 4.3]) スペクトル曲線 (\mathcal{C}, x, y) に対して, 次で定まる $F_g \in \mathbb{C}$ を (種数 g の) 自由エネルギーと呼ぶ:

$$F_g = \frac{1}{2-2g} \sum_{r \in R} \operatorname{Res}_{z=r} \Phi(z) W_{g,1}(z) \quad (g \geq 2). \quad (2.5)$$

ここで, $z_0 \in \mathcal{C} \setminus R$ を一般の点として, $\Phi(z) = \int_{z_0}^z y(z) dx(z)$ である. $g = 0, 1$ に対する自由エネルギー F_0, F_1 は, 上とは異なる方法で定義される ([EO1, §4.2.2, §4.2.3] 参照).

F_g は, スペクトル曲線の, $dx \wedge dy$ を保つあるクラスの変換の下で不変なのでシンプレクティック不変量とも呼ばれる ([EO1, Section 7]). F_g の母関数

$$F(\hbar) = \sum_{g=0}^{\infty} \hbar^{2g-2} F_g \quad (2.6)$$

も自由エネルギーと呼ばれ, その指数 $Z = \exp(F)$ は分配関数と呼ばれる.

例 2.4 Airy 曲線

$$x(z) = z^2, \quad y(z) = z \quad (2.7)$$

$(R = \{0, \infty\}, \bar{z} = -z)$ をスペクトル曲線に選ぶと, $2g - 2 + n \geq 1$ に対して

$$W_{g,n}(z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{2^{3g-3+n}} \sum_{\substack{d_1 + \dots + d_n \\ = 3g-3+n}} \langle \tau_{d_1}, \dots, \tau_{d_n} \rangle_{g,n} \prod_{i=1}^n \frac{(2d_i - 1)!!}{z_i^{2d_i+1}} dz_i \quad (2.8)$$

となる ([E]). ここで, $\langle \tau_{d_1}, \dots, \tau_{d_n} \rangle_{g,n} \in \mathbb{Q}$ は (1 点 {pt} をターゲットとする) Gromov-Witten 不変量と呼ばれる量で, 種数 g の点付き Riemann 面のモジュライ空間 $\mathcal{M}_{g,n}$ 上の交叉理論を用いて定義される ([Kon]): $\langle \tau_{d_1}, \dots, \tau_{d_n} \rangle_{g,n} = \int_{\mathcal{M}_{g,n}} c_1(\mathcal{L}_1)^{d_1} \dots c_1(\mathcal{L}_n)^{d_n}$. Airy 曲線の種数が高い自由エネルギーは自明である: $F_g = 0$ ($g \geq 2$).

例 2.5 Weber 曲線

$$x(z) = \lambda^{1/2}(z + z^{-1}), \quad y(z) = \frac{\lambda^{1/2}}{2}(z - z^{-1}) \quad (2.9)$$

($\lambda \in \mathbb{C}^*$ は定数, $R = \{1, -1\}$, $\bar{z} = z^{-1}$) をスペクトル曲線に選ぶと, $g \geq 2$ に対して

$$F_g = \chi(\mathcal{M}_g)\lambda^{2-2g} \quad (2.10)$$

となる. ここで,

$$\chi(\mathcal{M}_g) = \frac{B_{2g}}{2g(2g-2)} \quad (2.11)$$

は種数 g の Riemann 面のモジュライ空間の Euler 標数であり, 上のように Bernoulli 数を用いて表されることが知られている ([HZ]).

2.2. 量子曲線

ここ数年, WKB 解析と位相的漸化式を結びつける量子曲線 (quantum curve) の理論が急速に発展した ([GS, DM, BE]). これは, 「スペクトル曲線が [BE] の意味で admissible であれば, $W_{g,n}$ の積分の母函数がある微分方程式の WKB 解になっている」ことを主張しており, 特にその微分方程式の古典極限として定まる Riemann 面 (のパラメータ表示) がまさにインプットのスペクトル曲線となっているので上の呼び名がついた. これは WKB 解の係数が満たす漸化式が位相的漸化式と密接に関わっていることを意味している. 例えば, Airy 曲線に関しては次の事実が知られている.

定理 2.6 ([Z]) Airy 曲線 (2.7) から定まる相関函数を $W_{g,n}$ とし,

$$\begin{aligned} \psi(x, \hbar) = \exp \left[\frac{1}{\hbar} \int^z W_{0,1}(z) + \frac{1}{2} \int^z \int^z \left(W_{0,2}(z_1, z_2) - \frac{dx(z_1)dx(z_2)}{(x(z_1) - x(z_2))^2} \right) \right. \\ \left. + \sum_{\substack{g \geq 0, n \geq 1 \\ 2g-2+n \geq 1}} \frac{\hbar^{2g-2+n}}{n!} \int^\infty \cdots \int^\infty W_{g,n}(z_1, \dots, z_n) \right] \Big|_{z=z(x)} \quad (2.12) \end{aligned}$$

(ただし $z(x) = \sqrt{x}$ は, 分岐点を除いて定まる $x: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{P}^1$ の逆函数) は, Airy 方程式

$$\left(\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} - x \right) \psi = 0 \quad (2.13)$$

の WKB 解である.

この定理は, WKB 解の係数が満たす漸化式 (1.4) と位相的漸化式 (2.3) を比較することで証明される. Airy 方程式の WKB 解の係数は有理数として順に定まってゆくが, 上の結果は ((2.8) に現れているように) それがモジュライ空間上での交叉理論という, 一見無関係にも見える幾何学的背景を持っていることを表しており, 非常に興味深い. また, $\psi(x, \hbar)$ が満たす微分方程式 (2.13) の古典極限として生じる代数曲線 $y^2 - x = 0$ をパラメータ表示したものがまさに Airy 曲線 (2.7) である. このような理由で, (2.12) なる形の形式級数が満たす微分方程式 (2.13) は量子曲線と呼ばれるのである⁴.

ここで, 「完全 WKB 解析において重要な Voros 係数の, 位相的漸化式における対応物は何か?」という自然な問いが生じる. 次節では, 超幾何微分方程式およびその合流で得られる 2 階の微分方程式に対して, この課題に関する解答を与える.

⁴ただし, 一般には (2.12) の形の母函数が満たす Schrödinger 型の微分方程式のポテンシャルは $Q = Q_0(x) + \hbar Q_1(x) + \hbar^2 Q_2(x) + \cdots$ のように \hbar -補正が必要である. スペクトル曲線が [BE] の admissibility という仮定を満たせばこの補正項は高々有限個の項からなることが知られている.

3. Voros 係数と自由エネルギー

この節では [IKoT] の主結果を、次の方程式を例にとって紹介する:

$$\left(\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} - Q(x, \hbar) \right) \psi = 0, \quad Q(x, \hbar) = \frac{x + 4\lambda^2}{4x^2} - \hbar^2 \frac{1}{4x^2}. \quad (3.1)$$

これは Bessel 方程式と同値な Schrödinger 型方程式であるので、ここでは Bessel 方程式と呼ぶことにする. ([IKoT] では Gauss の超幾何微分方程式およびその合流で得られる方程式に対して、ここで紹介するものと同様の結果を得ている.) λ は零でない複素パラメータとする. この方程式の古典極限 $y^2 = (x + 4\lambda^2)/(4x^2)$ を、

$$x(z) = 4\lambda^2(z^2 - 1), \quad y(z) = \frac{z}{4\lambda(z^2 - 1)} \quad (3.2)$$

とパラメータ表示することでスペクトル曲線とみなし、それを Bessel 曲線と呼ぶことにする. ($R = \{0, \infty\}$, $\bar{z} = -z$.) $W_{g,n}$ および F_g を、Bessel 曲線 (3.2) から定まる相関関数および自由エネルギーとする. この時、次が成り立つ:

定理 3.1 ([IKoT, §4])

(a) 形式級数

$$\begin{aligned} \psi(x, \hbar) = \exp & \left[\frac{1}{\hbar} \int^z W_{0,1}(z) + \frac{1}{2} \int^z \int^z \left(W_{0,2}(z_1, z_2) - \frac{dx(z_1)dx(z_2)}{(x(z_1) - x(z_2))^2} \right) \right. \\ & \left. + \sum_{\substack{g \geq 0, n \geq 1 \\ 2g-2+n \geq 1}} \frac{\hbar^{2g-2+n}}{n! 2^n} \int_{\bar{z}}^z \cdots \int_{\bar{z}}^z W_{g,n}(z_1, \dots, z_n) \right] \Big|_{z=z(x)} \end{aligned} \quad (3.3)$$

は Bessel 方程式 (3.1) の WKB 解である.

(b) Bessel 方程式 (3.1) の古典極限 Σ 上で $x = 0$ に対応する 2 点間を結ぶ路に沿った積分として定まる Bessel 方程式 (3.1) の Voros 係数 $V(\lambda, \hbar)$ と、Bessel 曲線 (3.2) の自由エネルギー $F(\lambda, \hbar) = \sum_{g=0}^{\infty} \hbar^{2g-2} F_g(\lambda)$ の間には、次の関係式が成立する:

$$V(\lambda, \hbar) = F\left(\lambda + \frac{\hbar}{2}, \hbar\right) - F\left(\lambda - \frac{\hbar}{2}, \hbar\right) - \hbar^{-1} \frac{\partial F_0(\lambda)}{\partial \lambda}. \quad (3.4)$$

(c) Bessel 曲線 (3.2) の自由エネルギーは 3 項間漸化式

$$F(\lambda + \hbar, \hbar) - 2F(\lambda, \hbar) + F(\lambda - \hbar, \hbar) = -\log \left(256\lambda^2 \left(\lambda^2 - \frac{\hbar^2}{\lambda^2} \right) \right) \quad (3.5)$$

を満たす. これを解くことで、 F_g の具体形が次のように求まる:

$$F_g(\lambda) = -\frac{B_{2g}}{2g(2g-2)} \frac{1}{(2\lambda)^{2g-2}} \quad (g \geq 2) \quad (3.6)$$

量子曲線の公式 (3.3) と、自由エネルギーのパラメータに関する微分公式から (3.4) を導く、というのが証明の方針である. 超幾何方程式やその合流から得られる方程式に対しても、古典極限が定めるスペクトル曲線の自由エネルギーに対して (3.6) と同様の明

示公式が与えられる. 例えば Gauss の超幾何微分方程式のスペクトル曲線の自由エネルギーは (特性指数 $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_\infty$ が一般的な場合に) 次で与えられる

$$F_g = \frac{B_{2g}}{2g(2g-2)} \left\{ \frac{1}{(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_\infty)^{2g-2}} + \frac{1}{(\lambda_0 + \lambda_1 - \lambda_\infty)^{2g-2}} + \frac{1}{(\lambda_0 - \lambda_1 + \lambda_\infty)^{2g-2}} \right. \\ \left. + \frac{1}{(\lambda_0 - \lambda_1 - \lambda_\infty)^{2g-2}} - \frac{1}{(2\lambda_0)^{2g-2}} - \frac{1}{(2\lambda_1)^{2g-2}} - \frac{1}{(2\lambda_\infty)^{2g-2}} \right\} \quad (g \geq 2)$$

これより Voros 係数の Bernoulli 多項式を用いた明示的な表示を得ることもできる. 一般に, 一つの方程式から積分路を指定するごとに複数の Voros 係数が定まるが, それらはいずれも (スペクトル曲線から標準的に定義される) 自由エネルギーの様々なパラメータに関する差分として得られており, ゆえに自由エネルギーは Voros 係数よりも内在的な量である.

4. Painlevé 方程式の τ -関数と分配函数

Painlevé 方程式の τ -関数が完全 WKB 解析の枠組みでどのように自然に理解されるべきか, という問いの答えに講演者はまだ辿り着いていないが, 少なくとも §2 で紹介した位相的漸化式と WKB 解析の関係性の中から, 分配函数として τ -関数が現れることは [IM, IS, IMS] で証明できた. ここでは (P_1) を例にとり, 特に [IS] の結果を紹介する.

(P_1) の 0-パラメータ解 $q(t, \hbar) = \sum_{m=0}^{\infty} \hbar^m q_m(t)$ が係数に代入された線形方程式 (1.8) の古典極限として定まる代数曲線は

$$y^2 = 4(x - q_0(t))^2(x + 2q_0(t)) \quad (4.1)$$

(ただし $q_0(t) = \sqrt{-t/6}$) のように 2 重点を持つ種数 0 の曲線となっている⁵. これを

$$x(z) = z^2 - 2q_0(t), \quad y(z) = 2z(z^2 - 3q_0(t)) \quad (4.2)$$

とパラメータ表示することでスペクトル曲線 (の, Painlevé 方程式の独立変数 t でパラメータ付けられた変形族) とみなし, 位相的漸化式を適用して $W_{g,n}$ および F_g を定義する. ただし, $t = 0$ においては dx と dy が共通零点を持ち, スペクトル曲線の仮定を満たさないので, 以下では $t \neq 0$ とする. (ちなみに, この除外された $t = 0$ は [KT] の意味での (P_1) の変わり点である.) 以上の準備の下, 次が成り立つ.

定理 4.1 ([IS])

(a) 形式級数

$$\psi(x, t, \hbar) = \exp \left[\frac{1}{\hbar} \int^z W_{0,1}(z) + \frac{1}{2} \int^z \int^z \left(W_{0,2}(z_1, z_2) - \frac{dx(z_1)dx(z_2)}{(x(z_1) - x(z_2))^2} \right) \right. \\ \left. + \sum_{\substack{g \geq 0, n \geq 1 \\ 2g-2+n \geq 1}} \frac{\hbar^{2g-2+n}}{n! 2^n} \int^z \cdots \int^z W_{g,n}(z_1, \dots, z_n) \right] \Big|_{z=z(x)} \quad (4.3)$$

は, 0-パラメータ解が代入された偏微分方程式系 (1.8), (1.9) の WKB 解である.

⁵ 5 次数の勘定からは種数 1 の楕円曲線になると期待されるが, 実際は (4.1) のように退化する. 他の全ての Painlevé 方程式についても, 0-パラメータ解を扱う限りは同様に古典極限は種数 0 で 2 重点を持っている. このとは [KT] で明らかにされた.

(b) スペクトル曲線 (4.2) が定める分配関数

$$\exp(F(t, \hbar)) = \exp\left(\sum_{g=0}^{\infty} \hbar^{2g-2} F_g(t)\right) \quad (4.4)$$

は (P_1) の τ -関数である. すなわち, 次が成り立つ:

$$q(t, \hbar) = -\hbar^2 \frac{d^2}{dt^2} F(t, \hbar) \quad (4.5)$$

上の結果 (a) は, (P_1) に付随する線形方程式 (1.8) は量子曲線であることを意味している. 特に, 係数に含まれる q や p は \hbar -展開を持つので, 量子曲線 (1.8) は無限個の \hbar -補正項を持っている. その補正項が Painlevé 方程式の解の展開係数により統制されていることなどを明らかにしたことが, 従来の量子曲線の結果との大きな違いである. [BCD] で議論されているように, admissible でないスペクトル曲線に対する量子曲線の理論の構築は難航しているようだが, 個人的には Painlevé 方程式が規定するような変形理論を用いた \hbar -補正項のコントロールが有効であると感じている.

神保-三輪-上野 ([JMU]) は, Painlevé 方程式に付随する線形方程式系 (1.8), (1.9) の解から τ -関数を得る公式を与えたが, それが位相的漸化式におけるある公式と整合的であり, 従って結果 (a) の系として後者の τ -関数に関する結果 (b) が従う. ちなみに, 結果 (b) は [IMS] において 6 種類全ての Painlevé 方程式に対して拡張されている. ただし, これらは全て, 0-パラメータ解という, Painlevé 方程式の解の初期値空間の中のある特別な 1 点に対する結果であり, より一般の解への結果の拡張は重要な課題として残っている.

ここまで見たように, Voros 係数や Painlevé 方程式との関係における位相的漸化式は, 今のところ形式級数としての性質を記述する理論であった. 形式級数の計算を越えて, 解析的なモノドロミー保存変形や Riemann-Hilbert 問題に, 位相的漸化式の枠組みが如何に応用されるのかを探ることは興味深い話題であるように思う. そして, そこには (ここでは触れられなかった) 完全 WKB 解析による exact な Stokes 現象の解析など, 日本の研究グループが得意とする手法が有効に活用されるであろう, と期待している.

参考文献

- [AKT] Aoki, T., Kawai, T. and Takei, Y., The Bender-Wu analysis and the Voros theory, II, *Adv. Stud. Pure Math.* **54** (2009), Math. Soc. Japan, Tokyo, 2009, pp. 19–94.
- [BCD] Bouchard, V., Chidambaram, N. and Dauphinee, T., Quantizing Weierstrass; arXiv:1610.00225.
- [BE] Bouchard, V. and Eynard, B., Reconstructing WKB from topological recursion, *Journal de l'Ecole polytechnique – Mathématiques*, **4** (2017), pp. 845–908.
- [DDP] Delabaere, E., Dillinger, H. and Pham, F., Résurgence de Voros et périodes des courbes hyperelliptique, *Annales de l'Institut Fourier*, **43** (1993), 163–199.
- [DM] Dumitrescu, O. and Mulase, M., Lectures on the topological recursion for Higgs bundles and quantum curves; arXiv:1509.09007.
- [E] Eynard, B., Intersection numbers of spectral curves; arXiv:1104.0176.
- [EO1] Eynard, B. and Orantin, N., Invariants of algebraic curves and topological expansion, *Communications in Number Theory and Physics*, **1** (2007), pp. 347–452; arXiv:math-ph/0702045.
- [EO2] Eynard, B. and Orantin, N., Topological recursion in enumerative geometry and random matrices, *J. Phys. A: Math. Theor.* **42** (2009), 293001 (117pp).

- [GIL] Gamayun, O., Iorgov, N. and Lisovyy, O., Conformal field theory of Painlevé VI, *JHEP* **10** (2012), 038; arXiv:1207.0787.
- [GS] Gukov, S. and Sulkowski, P., A-polynomial, B-model, and quantization, *JHEP*, **2012** (2012), 70.
- [HZ] Harer, J. and Zagier, D., The Euler characteristic of the moduli space of curves, *Invent. Math.*, **85** (1986), 457–485.
- [I] Iwaki, K. Parametric Stokes phenomenon for the second Painlevé equation with a large parameter, *Funkcial. Ekvac.*, **57** (2014), 173–243.
- [IKoT] Iwaki, K., Koike, T. and Takei, Y., Voros Coefficients for the Hypergeometric Differential Equations and Eynard-Orantin’s Topological Recursion; arXiv:1805.10945.
- [IM] Iwaki, K. and Marchal, O., Painlevé 2 equation with arbitrary monodromy parameter, topological recursion and determinantal formulas, *Ann. Henri Poincaré*, **18** (2017), 2581–2620; arXiv:1411.0875.
- [IMS] Iwaki, K., Marchal, O. and Saenz, A., Painlevé equations, topological type property and reconstruction by the topological recursion, *J. Geom. Phys.*, **124** (2018), 16–54; arXiv:1601.02517.
- [IN] Iwaki, K. and Nakanishi, T., Exact WKB analysis and cluster algebras, *J. Phys. A: Math. Theor.* **47** (2014), 474009.
- [IS] Iwaki, K. and Saenz, A., Quantum Curve and the First Painlevé Equation, *SIGMA.*, (**12**), 2016; arXiv:1507.06557.
- [JMU] Jimbo, M., Miwa, T. and Ueno, K., Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients. I. General theory and τ -function, *Phys. D* **2** (1981), 306–352.
- [KT] Kawai, T. and Takei, Y., WKB analysis of Painlevé transcendents with a large parameter. I, *Adv. Math.* **118** (1996), 1–33.
- [KoT] Koike, T. and Takei, Y., On the Voros coefficient for the Whittaker equation with a large parameter – Some progress around Sato’s conjecture in exact WKB analysis, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **47** (2011), pp. 375–395.
- [Kon] Kontsevich, M., Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix Airy function, *Comm. Math. Phys.*, **147** (1992), 1–23.
- [N1] Nagoya, H., Irregular conformal blocks, with an application to the fifth and fourth Painlevé equations, *J. Math. Phys.* **56** (2015), 123505; arXiv:1505.02398.
- [N2] Nagoya, H., Remarks on irregular conformal blocks and Painlevé III and II tau functions; arXiv:1804.04782.
- [T] Takei, Y., Sato’s conjecture for the Weber equation and transformation theory for Schrödinger equations with a merging pair of turning points, *RIMS Kôkyûrôku Bessatsu*, **B10** (2008), pp. 205–224.
- [V] Voros, A., The return of the quartic oscillator – The complex WKB method, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, **39** (1983), pp. 211–338.
- [Z] Zhou, J., Intersection numbers on Deligne-Mumford moduli spaces and quantum Airy curve; arXiv:1206.5896.
- [岡] 岡本和夫, パンルヴェ方程式, 岩波書店, 2009.
- [河竹] 河合隆裕, 竹井義次., 特異摂動の代数解析学, 岩波書店, 1998.
(English version: Kawai, T. and Takei, Y., *Algebraic Analysis of Singular Perturbation Theory*, American Mathematical Society, Translations of Mathematical Monographs, vol. 227. 2005.)
- [佐青河竹] 佐藤幹夫, 青木貴史, 河合隆裕, 竹井義次, 特異摂動の代数解析, 数理研講究録 **750**. 1991, PP. 43–51 (金子晃記).