K 理論的 Peterson 同型

可積分系からのアプローチ

池田 岳　(岡山理科大学)*

2018年9月24日

概　要

Peterson 同型は，旗多様体の量子コホモロジー環と，G に付随するアフィン・グラスマン多様体のホモロジー環との関係を与えるものである．可積分系を用いることによって，$G = SL_n$ の場合に K–理論版の Peterson 同型（の候補）を構成した．この講演の内容は岩尾慎介氏，前野俊昭氏との共同研究 [7] に基づく．

1. Peterson 同型

Peterson 同型 ([24], [19]) とは，旗多様体 G/B の量子コホモロジー環 $QH^*(G/B)$ と，G に付随するアフィン・グラスマン多様体 $\mathcal{G}_G$ のホモロジー $H_*(\mathcal{G}_G)$ との関係を与えるものである．ここで G は単連結な複素線型代数群であり，B はそのボレル部分群である．アフィン・グラスマン多様体は

$$\mathcal{G}_G := G(\mathcal{K})/G(\mathcal{O}), \quad \mathcal{O} := \mathbb{C}[[t]], \quad \mathcal{K} := \mathrm{Frac}\,\mathcal{O} = \mathbb{C}((t))$$

と定義され，ind-variety の構造を持つ．T を B に含まれる極大トーラスとし，$\mathfrak{t}$ を T のリー環とするとき，T–同変版 $QH_T^*(G/B)$, $H_*^T(\mathcal{G}_G)$ が定義され，いずれも $S = \mathrm{Sym}(\mathfrak{t}^*)$ 上の可換代数の構造を持つ．ホモロジーが環構造（Pontryagin 積）を持つことは注目に値する．Peterson 同型は，両者の適当な局所化どうしの環同型

$$QH_T^*(G/B)_{loc} \cong H_*^T(\mathcal{G}_G)_{loc}$$

が存在するという内容である．それぞれの環には自然な「シューベルト基底」が存在し，上記の同型はその基底どうしの間にも簡明な関係を与える．この結果は Peterson の講義 [24] において述べられ，Lam-Shimozono [19] によって証明された．

$QH_T^*(G/B)$ のシューベルト基底に関する積構造定数は，T–同変 Gromov-Witten 不変量として知られ，幾何学的に興味のある量である．その量が，Peterson 同型を介して，アフィン・グラスマン多様体の側からも計算できる理屈である．そういう背景があって，アフィン・シューベルト・カルキュラスは，この10年来，大変な勢いで研究されてきた．そのきっかけとなったのは， Lam [14] によって，$H_*(\mathcal{G}_{SL_n})$ の対称関数による記述が確立されて，シューベルト基底を組合せ論的に捕まえられるようになった（Shimozono の予想）ことである．古典的なグラスマン多様体のシューベルト・カルキュラスが，対称関数との関わりを通して興味が持たれてきたことを思い起こすとき，Lam の結果が十分に刺激的であったことが想像出来る．

本研究は科研費 (課題番号:15K04832, 18K03261) の助成を受けたものである。

* 〒700-0005 岡山市北区理大町 1-1 岡山理科大学理学部応用数学科
e-mail: ike@xmath.ous.ac.jp
web: https://www.xmath.ous.ac.jp/~ike/

2. 戸田格子

さて，Lam の結果などを説明する前に，戸田格子の復習をしてみる．おなじみのラックス行列

$$L = \begin{pmatrix} z_1 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ q_1 & z_2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q_2 & z_3 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & q_{n-2} & z_{n-1} & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & q_{n-1} & z_n \end{pmatrix} \tag{1}$$

からはじめよう．$\sum_{i=1}^n z_i = 0$ を仮定しておく．z_i は i 番目の粒子の運動量，q_i は i 番目と $i+1$ 番目の粒子の相互作用を記述する（指数型）ポテンシャル・エネルギーと関係している．$t = (t_1, \dots, t_{n-1})$ を時間変数として，運動方程式は

$$\frac{\partial L}{\partial t_i} = [A_i, L], \quad A_i = (-L)^i_< \quad (1 \le i \le n-1)$$

と書かれる．ここに $(\cdot)_<$ は行列の狭義下三角部分を意味する．L の特性多項式

$$\det(t \cdot 1_n - L) = t^n - I_1(z,q)t^n + I_2(z,q)t^{n-2} + \cdots + (-1)^n I_n(z,q)$$

の係数は保存量になっている（等スペクトル変形）．ただし $I_1(z,q) = \sum_{i=1}^n z_i = 0$ とした．$\gamma = (\gamma_2, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{C}^{n-1}$ に対して等スペクトル多様体

$$Z_\gamma := \{(z,q) \in \mathbb{C}^{2n-1} \mid I_j(z,q) = \gamma_i \ (1 \le i \le n)\}$$

（ただし $\gamma_1 = 0$）を考える．とくに，$\gamma_i = 0 \ (1 \le i \le n)$ のとき，Z_γ を Z_{nil} と書くことにする．$(z,q) \in Z_{\mathrm{nil}}$ に対してラックス行列 $L = L(z,q)$ は冪零だからである．

幂零な初期値のもとに戸田方程式を解こう．冪零行列

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

から出発する．ここで

$$g = \exp\left(\sum_{i=1}^{n-1} t_i \Lambda^i\right) = \sum_{k=0}^{n-1} h_k(t)\Lambda^k = \begin{pmatrix} 1 & h_1 & h_2 & \cdots & \cdots & h_{n-1} \\ 0 & 1 & h_1 & h_2 & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & h_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & h_2 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & h_1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

によって $t=(t_1,\ldots,t_{n-1})$ の多項式 $h_i=h_i(t)$ $(1\le i\le n-1)$ を定める．さらに，上記の行列の右上の正方形に関する小行列式として「タウ関数」を

$$\tau_{n-i} := \begin{vmatrix} h_{n-i} & \cdots & h_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n-2i+1} & \cdots & h_{n-i} \end{vmatrix} \quad (1\le i\le n-1)$$

と定める．また $\tau_0=\tau_n=1$ としておく．

$B\subset SL_n$ を上三角行列全体がなすボレル部分群とし，w_0 を S_n の最長元に対応する置換行列とする．$t=(t_1,\ldots,t_{n-1})$ が τ_i $(1\le i\le n-1)$ の零点でないとき，対角成分がすべて 1 の下三角行列 n であって (2) の g に対して

$$gn^{-1}\in w_0B$$

をみたすものが一意的に存在する．このとき $L=-n\Lambda n^{-1}$ は (1) のラックス行列の形をしていて，戸田方程式をみたす．より明示的には次が成り立つ．

定理 2.1 (戸田方程式の冪零解). 次の関数

$$z_i=\frac{\partial\ln\tau_i}{\partial t_1}-\frac{\partial\ln\tau_{i-1}}{\partial t_1}\ (1\le i\le n),\quad q_i=\frac{\tau_{i-1}\tau_{i+1}}{\tau_i^2}\ (1\le i\le n-1)$$

は冪零な初期値に関する戸田方程式の（有理的な）解である．

注意：p_i を i 次の冪和対称関数とし，時間変数 t_i を p_i/i と同一視するとき，h_i は i 次の完全対称関数に対応する．

3. 戸田格子と Peterson 同型の関係

ここまでの内容が幾何学的にはどのように解釈できるかを [20] にしたがって説明する．量子側については次の結果がよく知られている．

定理 3.1 ([4],[10]). 環同型

$$QH^*(SL_n/B)\cong\mathbb{C}[Z_{\mathrm{nil}}]=\mathbb{C}[z_1,\ldots,z_n,q_1,\ldots,q_{n-1}]/\langle I_j(z,q)\mid 1\le j\le n\rangle$$

が存在する．

SL_n のラングランズ双対群は $G^\vee=PGL_n(\mathbb{C})$ である．Λ を $G^\vee$ のリー環 $\mathfrak{g}^\vee$ の元とみて，Λ の中心化群

$$C_\Lambda := \{g\in G^\vee\mid Ad(g)(\Lambda)=\Lambda\}$$

を考える．アフィン側については次が知られている．

定理 3.2 ([5], [24]). 環同型

$$H_*(\mathcal{G}_{SL_n})\cong\mathbb{C}[C_\Lambda]=\mathbb{C}[h_1,\ldots,h_{n-1}]$$

が存在する．

タウ関数 τ_i $(1 \le i \le n-1)$ が $\mathbb{C}[h_1, \ldots, h_{n-1}]$ の元であることに注意して

$$C_\Lambda^\circ := \{g \in C_\Lambda \mid \tau_i(g) \neq 0 \ (1 \le i \le n-1)\}$$

によって C_Λ のザリスキー開集合を定める．また，

$$Z_{\mathrm{nil}}^\circ := \{(z, q) \in Z_{\mathrm{nil}} \mid q_i \neq 0 \ (1 \le i \le n-1)\}$$

によって Z_{nil} のザリスキー開集合を定める．

定理 3.3 ([13])**.** 戸田格子の冪零解からアフィン多様体の同型

$$Z_{\mathrm{nil}}^\circ \cong C_\Lambda^\circ$$

が得られる．

ここで

$$QH^*(SL_n/B)_{\mathrm{loc}} := \mathbb{C}[Z_{\mathrm{nil}}^\circ], \quad H_*(\mathcal{G}_{SL_n})_{\mathrm{loc}} := \mathbb{C}[C_\Lambda^\circ]$$

とするとき

系 3.4. 環同型

$$QH^*(SL_n/B)_{\mathrm{loc}} \cong H_*(\mathcal{G}_{SL_n})_{\mathrm{loc}}.$$

が存在する．

実は，これが Peterson 同型である．たまたま2つの環が同型になっただけではなく，シューベルト類の対応も簡明に与えられることを次節で説明する．

4. シューベルト類の対応

$B \subset SL_n$ を上三角行列からなるボレル部分群とする．$w \in S_n$ および $1 \le i \le n$ に対して

$$V_i^w = \langle \boldsymbol{e}_{w(1)}, \ldots, \boldsymbol{e}_{w(i)} \rangle \subset \mathbb{C}^n$$

とおく．$\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ は $\mathbb{C}^n$ の標準基底である．旗

$$0 \subset V_1^w \subset \cdots \subset V_n^w = \mathbb{C}^n$$

を SL_n/B の元とみなすとき e_w と書く．$B_- \subset SL_n$ を下三角行列からなるボレル部分群とするとき

$$\Omega_w := \overline{B_- e_w} \subset SL_n/B$$

をシューベルト多様体と呼ぶ．コホモロジー環（$\mathbb{C}$ 係数）$H^*(SL_n/B)$ は Ω_w に付随する元 σ_w $(w \in S_n)$ たちからなる基底を持つ．σ_w をシューベルト類と呼ぶ．$\ell(w)$ を w の長さ（あるいは転倒数）とするとき σ_w の次数は $2\ell(w)$ 次である．積構造定数 c_{wv}^u は

$$\sigma_w \sigma_v = \sum_{u \in S_n} c_{wv}^u \sigma_u$$

により定まる（非負整数である）．量子コホモロジー環は係数環 $\mathbb{C}[q] := \mathbb{C}[q_1, \ldots, q_{n-1}]$ 上，量子シューベルト類 σ_w^q $(w \in S_n)$ により生成される自由加群である．$H^*(SL_n/B)$ の積がパラメータ $q_1, \ldots, q_{n-1}$ によって変形されている．その積を $*$ で表すとき，

$$\sigma_w^q * \sigma_v^q = \sum_{u \in S_n} c_{wv}^u(q) \sigma_u^q, \quad c_{wv}^u(q) \in \mathbb{C}[q]$$

と展開したとき $c^u_{wv}(q)$ の各係数が Gromov–Witten 不変量により与えられる．

$\tilde{S}_n$ をアフィン対称群とする．$\tilde{S}_n/S_n$ の最短代表系を $\tilde{S}^0_n$ で表すとき $H_*(\mathcal{G}_{SL_n})$ は $x \in \tilde{S}^0_n$ で添え字付けられる元 ξ_x たちからなる基底を持つ．すべての成分が $(n-1)$ 以下であるような分割全体の集合を $\mathcal{B}_{n-1}$ で表す．

補題 4.1. 自然な全単射 $\tilde{S}^0_n \cong \mathcal{B}_{n-1}$ が存在する．

定理 4.2 ([14])**.** $x \in \tilde{S}^0_n$ が $\lambda \in \mathcal{B}_{n-1}$ に対応するとき，同型 $H_*(\mathcal{G}_{SL_n}) \cong \mathbb{C}[h_1, \ldots, h_{n-1}]$ によりシューベルト類 ξ_x に対応する元は *Lascoux-Lapointe-Morse* により導入された多項式 $s^{(n-1)}_\lambda$ と一致する．

$s^{(n-1)}_\lambda$ は k-Schur 関数と呼ばれ，Macdonald 多項式と関連する問題の中で Lascoux-Lapointe-Morse [21] が導入した．その詳しい表示などはここでは述べないが，以下のことに注意しておく．

- $s^{(n-1)}_\lambda$ $(\lambda \in \mathcal{B}_{n-1})$ は $\mathbb{C}[h_1, \ldots, h_{n-1}]$ の基底をなす．
- $s^{(n-1)}_\lambda = s_\lambda +$ (低次の項).
- $s^{(n-1)}_{R_i}$ はシューア関数 $s_{R_i} (= \tau_{n-i})$ と一致する．ただし，ここで R_i は横が $(n-i)$ で縦が i の長方形のヤング図形である．
- より一般に，λ がある R_i に含まれれば $s^{(n-1)}_\lambda$ はシューア関数 s_λ と一致する（[22]）．
- $s^{(n-1)}_{R_i \cup \lambda} = s^{(n-1)}_{R_i} \cdot s^{(n-1)}_\lambda$ ([22]).

なお，任意の分割 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ に対してシューア関数を $s_\lambda = \det(h_{\lambda_i + j - i})_{1 \le i,j \le r}$ と定義する．h_i は i 次の完全対称関数である．

定理 4.3 ([20])**.** $w \in S_w$ に対して（明示的に定まる）$\lambda(w) \in \mathcal{B}_{n-1}$ が存在して，量子シューベルト類 σ^q_w は *Peterson* 同型により

$$\frac{s^{(n-1)}_{\lambda(w)}}{\prod_{i \in \mathrm{Des}(w)} \tau_i} \in \mathbb{C}[h_1, \ldots, h_{n-1}][\tau_1^{-1}, \ldots, \tau_{n-1}^{-1}]$$

に写される．ここで $\mathrm{Des}(w) = \{i \mid 1 \le i \le n-1,\ w(i) > w(i+1)\}$ である．

5. K–理論的 Peterson 同型

以上の結果の K–理論的類似を見つけたい．旗多様体の量子 K–理論は Givental-Lee [6] により調べられている．またアフィン・グラスマン多様体の K–理論は Lam-Schilling-Shimozono [17] による研究がある．これらの理論については後ほど説明することにして，[7] の結果に至るまでの発見的な考えの道筋を述べることにする．

- Givental-Lee [6] の結果をみると，環 $QK(SL_n/B)$ が関係式

$$\sum_{\substack{I \subset \{1,\ldots,n\} \\ \#I = k}} \prod_{j \in I} z_j \prod_{j \in I,\, j+1 \notin I} (1 - Q_j) = \binom{n}{k} \quad (1 \le k \le n)$$

  によって定義されると予想できる（Kirillov-Maeno の予想 [11]）．ここで z_i は $V_\bullet \in SL_n/B$ において V_i/V_{i-1} をファイバーとする直線束 $\mathcal{L}_i$ の類に対応する．$Q = (Q_1, \ldots, Q_{n-1})$ はノビコフ変数と呼ばれる変形パラメーターである．

- シューア関数 s_λ は無限次元グラスマン多様体のホモロジーのシューベルト類とみなせる．その K–理論的類似は Lam-Pylyavskyy [16] の dual stable Grothendieck 多項式である．それは次の公式により定義できる：

$$g_\lambda = \left(\sum_{k\ge 0} (-1)^k \binom{i-j}{k} h_{\lambda_i+j-i-k} \right).$$

  タウ関数の表示にこれが使えるはず．

- "保存量" がみたすべき等式の元になるはずの関係式

$$\sum_{I\subset\{1,\dots,n\},\,|I|=k} \prod_{i\in I,\, i+1\notin I} \frac{\check{\tau}_i}{\tau_i} \prod_{j\notin I,\, j+1\in I} \frac{\hat{\tau}_j}{\tau_j} = \binom{n}{k},$$

$$\tau_i = g_{R_i}, \quad \check{\tau}_i = g_{R_i} - g_{R_i^*}, \quad \hat{\tau}_i = \sum_{\mu\subset R_i} g_\mu$$

  を予想した（2015 年 12 月）．ただし $R_i^* = ((n-i)^{i-1}, n-i-1)$.

- 上の保存量を持つ可積分系を探した．答えはラックス行列が $L = AB^{-1}$

$$A = \begin{pmatrix} z_1 & -1 & & & \\ & z_2 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & z_{n-1} & -1 \\ & & & & z_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ -Q_1 z_1 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & -Q_{n-1}z_{n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

  の形で与えられる Ruijsenaars [25] の relativistic 戸田格子方程式（岩尾慎介氏）．

Kirillov-Maeno の予想は肯定的に解決された（[7] の出版が決まった後）．

定理 5.1 ([1], [12]). 次の環同型がある：

$$QK(SL_n/B) \cong \mathbb{C}[z_1,\dots,z_n,Q_1,\dots,Q_{n-1}]/I,$$

$$I = \langle \sum_{\substack{I\subset\{1,\dots,n\} \\ \#I=k}} \prod_{j\in I} z_j \prod_{j\in I,\, j+1\notin I} (1-Q_j) - \binom{n}{k} \mid 1\le k\le n \rangle.$$

アフィン・グラスマン多様体の K ホモロジー環については次が知られている．

定理 5.2 ([17]). 次の環同型がある：

$$K_*(\mathcal{G}_{SL_n}) \cong \mathbb{C}[h_1,\dots,h_{n-1}].$$

以上を背景として，次の結果を得た：

定理 5.3 ([7]). 以下の定義をする：

$$\begin{aligned} QK(SL_n/B)_{\mathrm{loc}} &:= QK(SL_n/B)[Q_1^{-1},\dots,Q_{n-1}^{-1}], \\ K_*(\mathcal{G}_{SL_n})_{\mathrm{loc}} &:= \mathbb{C}[h_1,\dots,h_{n-1}][\tau_1^{-1},\dots,\tau_{n-1}^{-1},\hat{\tau}_1^{-1},\dots,\hat{\tau}_{n-1}^{-1}]. \end{aligned}$$

このとき，環同型 $\Phi : QK(SL_n/B)_{\mathrm{loc}} \to K_*(\mathcal{G}_{SL_n})_{\mathrm{loc}}$ が

$$z_i \mapsto \frac{\tau_i \hat{\tau}_{i-1}}{\hat{\tau}_i \tau_{i-1}}, \quad Q_i \mapsto \frac{\tau_{i-1}\tau_{i+1}}{\tau_i^2}$$

により定まる．

Proof. 冪単初期条件のもとで relativistic 戸田格子を解けばよい． □

以上，保存量の明示形を手掛かりにして非自明な環同型を構成したわけだが，この同型が幾何学的に正しいものである保証があるわけではない．T 同変版の K–理論的 Peterson 同型の定式化（予想）が Lam-Li-Mihalcea-Shimozono [15] によって提出された．また，最近，加藤 [9] は半無限旗多様体を介して K–理論的 Peterson 同型を与えている．これらの結果と定理5.3の関係は現時点では（私には）よくわかっていない．

以下，定理5.3の写像が好ましい性質を持つ状況証拠について述べる．Lenart-Maeno [23] は定理 5.1 の表示においてシューベルト多様体 Ω_w の構造層の類（の量子変形）$[\mathcal{O}_{\Omega_w}] \in QK(SL_n/B)$ を代表すると予想される多項式

$$\mathfrak{G}_w^q \in \mathbb{Z}[z_1, \dots, z_{n-1}, Q_1, \dots, Q_{n-1}]$$

（量子 Grothendieck 多項式）を構成している．

予想 5.4 ([7])**.** $\lambda \in \mathcal{B}_{n-1}$ に対して多項式 $\tilde{g}_\lambda \in \mathbb{C}[h_1, \dots, h_{n-1}]$ が存在して，任意の $w \in S_n$ に対して

$$\Phi(\mathfrak{G}_w^q) = \frac{\tilde{g}_{\lambda(w)}}{\prod_{i \in \mathrm{Des}(w)} \tau_i}$$

が成り立つ．

[17] は「K 理論的 k-Schur 関数」を定義している．我々は最初，$\tilde{g}_{\lambda(w)}$ が K 理論的 k-Schur 関数と一致することを期待したが，それは正しくない．しかし，具体例を調べると，ヤング図形の大きさに関するフィルターの先頭項は一致しているようである．また，具体例において $\tilde{g}_{\lambda(w)}$ を K 理論的 k-Schur 関数の線型結合として表示するとき「正値性」が観察される．

予想5.4に関して，次の部分的な結果がある．

定理 5.5 ([7])**.** *$w \in S_n$ が d–Grassmannian 元のとき，すなわち*

$$w(1) < \cdots < w(d),\ w(d+1) < \cdots < w(n)$$

をみたすとき $\mu_i = n - i + 1 - w(d-i+1)\ (1 \le i \le d)$ とすると

$$\Phi(\mathfrak{G}_w^q) = \frac{g_\mu}{\tau_d}$$

が成り立つ．

最後に，関連することと未解決問題について述べておく．$G = SL_n$ に対しては，T 同変の（コ）ホモロジーの場合に特殊多項式の観点からのさらなる研究 [18] がある．他の古典型の場合には,（コ）ホモロジーの場合に限っても，Peterson 同型を具体的な多項式レベルまで詳細に計算することは非常に面白い問題である．これは，古典型の量子コ

ホモロジーにおいてシューベルト類を代表する良い多項式を求めるという長く未解決の問題と関連して興味深い．量子 K 理論に関しては，可積分系を通して，Givental-Kim 型の表示が可能であるはずである．その際に，いわゆる J 関数の解析（[2] など）が鍵になるのは間違いないと思われる（[8] など）が，まだそのような理論は完成していない．アフィン・グラスマン多様体の K ホモロジー側については [3] に「相対論的戸田方程式」の構造が現れているようにも見える．

参考文献

[1] Anderson, D., Chen, L. and Tseng, H.-H., “On the quantum K-ring of the flag manifold.” arXiv: 1711.08414v1.

[2] Braverman, A. and Finkelberg, M. “Finite difference quantum Toda lattice via equivarinat K-theory.” *Transfrom. Groups*, **10** (3-4), pp.363–386, 2005.

[3] Bezrukavnikov, R., Finkelberg, M., and Mirković, I. “Equivariant homology and K-theory of affine Grassmannians and Toda lattices.” *Compos. Math.*, **141** (03), pp.746–768, 2005.

[4] Givental, A. and Kim, B., 1995, “Quantum cohomology of flag manifolds and Toda lattices.” *Comm. Math. Phys.* 168, no. 3: 609–41.

[5] Ginzburg, V., “Perverse sheaves on a Loop group and Langlands’ duality.” preprint, arXiv:alg-geom/9511007

[6] Givental, A. and Lee, Y.-P., 2003, “Quantum K-theory on flag manifolds, finite-difference Toda lattices and quantum groups.” *Invent. Math.* 151, no. 1: 193–219.

[7] Ikeda, T., Iwao, S., Maeno, T., “Peterson isomorphism in K-theory and relativistic Toda lattice.” *Int. Math. Res. Notices*, rny051, 2018.

[8] Iritani, H. Milanov, T. and Tonita, V. “Reconstruction and convergence in quantum K-theory via difference equations.” *Int. Math. Res. Not.*, **2015** (11), pp.2887–2937, 2015.

[9] Kato, S., “Loop structure on equivariant K-theory of semi-infinite flag manifolds.” preprint arXiv: 1805.01718v4.

[10] Kim, B., 1999, “Quantum cohomology of flag manifolds G/B and quantum Toda lattices.” *Ann. of Math.* 149: 129–48.

[11] Kirillov, A. N. and T. Maeno. “A note on quantum K-theory of flag varieties and some quadric algebras.” *in preparation.*

[12] Koroteev, P., Pushkar, P. P., Smirnov, A. Zeitlin, A. M., “Quantum K-theory of Quiver Varieties and Many-Body Systems.” arXiv:1705.10419.

[13] Kostant, B., 1979, “The Solution to a Generalized Toda Lattice and Representation Theory.” *Adv. Math.* 34: 195–338.

[14] Lam, T.,“Schubert polynomials for the affine Grassmannian, *J. Amer. Math. Soc.* 21 (2008), 259–281.

[15] Lam, T., Li, C., Mihalcea, L., and Shimozono, M., “A conjectural Peterson isomorphism in K-theory.” preprint, arXiv:1705.03435v1

[16] Lam, T. and Pylyavskyy, P., 2007, “Combinatorial Hopf algebras and K-homology of Grassmannians.” *Int. Math. Res. Not. IMRN* 2007, no. 24 Art. ID rnm125, 48 pp.

[17] Lam, T., Schilling, A., and Shimozono, M., 2010, “K-theory Schubert calculus of the affine Grassmannian.” *Compos. Math.* 146, no. 4: 811–52.

[18] Lam, T. and Shimozono, M., “From double quantum Schubert polynomials to k-double Schur functions via the Toda lattice.” arXiv:1109.2193

[19] Lam, T. and Shimozono, M., 2010, “Quantum cohomology of G/P and homology of

affine Grassmannian." *Acta Math.* 204, no. 1: 49–90.

[20] Lam, T. and Shimozono M., 2012, "From quantum Schubert polynomials to k-Schur functions via the Toda lattice." *Math. Res. Lett.* 19: 81–93.

[21] Lapointe, L., Lascoux, A., and Morse, J., 2003, "Tableau atoms and a new Macdonald positivity conjecture." *Duke Math. J.* 116, no. 1: 103–46.

[22] Lapointe, L. and Morse, J., 2007, "A k-tableau characterization of k-Schur functions." *Adv. Math.* 213, no. 1: 183–204.

[23] Lenart, C. and Maeno, T., "Quantum Grothendieck polynomials." arXiv:0608232

[24] Peterson, D. "Quantum cohomology of G/P." Lecture notes, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, Spring 1997.

[25] Ruijsenaars, S., 1990, "Relativistic Toda systems." *Comm. Math. Phys.* 133, no. 2: 217–47.