論理的推論のさまざまな姿とその解析

小野寛晰　(北陸先端科学技術大学院大学)*

1. はじめに

自然数論、集合論などのいろいろな数学は、論理学で議論する場合、標準的には古典一階述語論理の上の理論として形式化される。数学で使われる論理は、人間の合理的思考や論理的推論のもっとも洗練された姿と考えられるが、それは数学が（原理的には）その真偽がすべて確定しているような静的な客観的世界を対象としていることによる。他方、人が日常的に行っている推論や判断について考えてみると、それらのうち「合理的」と呼べるものに限ったとしても、数学における推論とはさまざまな点で異なった側面を持つことに気がつかされる。

このような人間の日常的な思考や推論に対する哲学的および言語学的な考察や、命題の真偽性や命題の間の論理関係についての分析は、アリストテレスを引き合いに出すまでもなく昔から行われてきたものである。２０世紀の初頭から始まる現代的な数理論理学においても過去の議論を引き継ぐ形で、伝統的な古典論理とともにそれとは異なるさまざまな形の論理（例えば直観主義論理や多値論理）についてもその可能性が論じられてきた。そして現代的な手法である形式化と意味論が導入されたことにより、それらの論理の間の関係をより明確な形で議論できるようになった。さらに２０世紀の数学の潮流である抽象化により、それまでのように哲学的な観点のみに捉われることなく、数学的に一般化された形で論理が導入され、このような論理に対する数学的研究も盛んに行われるようになってきた。これらの論理は、「古典論理と異なる」ということで非古典論理 (nonclassical logics) と総称され、現在の数理論理学の一つの主要な研究テーマになっている。

私は非古典論理の中でもとくに中間論理、様相論理、部分構造論理などに関心を持っている。私が研究を始めた頃の状況と比べるとこの半世紀ほどの間に非古典論理の研究が進展し、それに対する認識が大きく変化したことに驚かされる。２０世紀中頃からのコンピュータサイエンスの急速な発展の中でこのような広い意味での論理的推論についての関心が深まってきたのが、このような変化の最大の要因であろう。それは、形式化（記号化）、形式的表現とその意味との明確な区別、形式体系における証明などの論理学的概念と方法が、「サイエンス」としてのコンピュータサイエンスに必要不可欠な要素であることが認識されるようになったことによる。（ここで上の三つを、プログラミング、プログラムとその意味、プログラムの検証に対応させてみるといいかもしれない。）

このような関心の深まりにより、近年ではコンピュータサイエンスにとどまらず、言語学、認知科学、さらには経済学、社会科学なども視野に入れた新たな視点からの論理学の研究が進展しつつある。それと同時にそれらの関連分野で論理学から派生した概念や形式化に基づく方法が用いられ、境界にまたがるような研究が誕生しつつある。このような変化について、たとえば著名な computer scientist である Moshe Y. Vardi

2010 Mathematics Subject Classification: 03Axx, 03Bxx, 03Gxx, 08Bxx
キーワード：数理論理学, 様相論理, 意味論, 代数的論理学
*e-mail: ono@jaist.ac.jp

は *From Philosophical to Industrial Logics* という 2009 年の論文の中で次のように述べている。

> "One of the surprising developments in the area of program verification is how ideas introduced by logicians in the early part of the 20th Century ended up yielding by the 21st Century industrial-standard property-specification languages.
>
> This development was enabled by the equally unlikely transformation of the mathematical machinery of automata on infinite words, introduced in the early 1960s for second-order logic, into effective algorithms for model-checking tools."

以下ではまず日常的な場面に現れる推論のいくつかの簡単な具体例を挙げ、それについての検討を行う。つぎに時間論理を例にとり、形式化と意味論および表現可能性などについて説明する。最後に、私が関心を持っている論理学への代数的アプローチについて簡単に紹介する。

2. 日常的な場面に現れる推論

我々は基本的に合理的であろうとし、できる限り整合性、一貫性を持つように思考し行動しようと努めているのだと思う。その限りにおいては日常的な場面で行なっている推論が数学における推論と基本的には大きく異なることがないはずだ。しかし、日常的な場面では使われる言葉や概念には曖昧が含まれたり不正確だったりする。我々の行う推論や判断は、自分の理解、自分の持つ知識や情報などに基くが、それらの知識や情報は限定的なものであり決して完全ではあり得ない。そのことによってそれらは数学における推論とは異なる形をとる。ここでは、日常的な文が持つさまざまなモード（様相）と、推論において重要な役割を持つ含意関係（「P ならば Q」という文）との二つを中心にこのような違いを考えてみることにする。

様相についてはアリストテレスがすでに「必然的な真」、「偶然的な真」と「事実としての真」との差異について論じている。様相をもっと広い意味に解釈するならば、次の例のような文もそれぞれ文 A の「様相」と考えることができるだろう。

1. これまでいつも A だった。
2. プログラム Π を実行すると A が成り立つ。
3. （私は）A であることを知っている。
4. （彼は）A であると信じている。

これらの文の正しさ（真偽性）は A の正しさとどんな関係があるのだろうか。たとえばもし A が正しくない場合にでも、「A であることを知っている」ということがあるのだろうか。

時間論理

最初の二つの例は時間経過や文の持つ時制に関係する。とくに２番目の例は含意関係の形をしているが、この場合は「原因Ｐがあって結果Ｑがおこる」という因果関係を表している。他方、数学で扱っている文は全く時制を持たない (tenseless) ため、原因ないしはアクションＰが結果Ｑを引き起こすというような形の含意関係が使われることはない。時間や時制を扱うためには後述するような時間論理 (temporal logic) が用いられる。２番目の例からも想像できるように、並行プログラムの実行についての基本的性質の記述や検証には時間論理の拡張体系が有効に利用されている。

認識論理

他方、あとの二つの例は「知っている」こと、「信じている」ことなど人の認識に関わる様相である。事実であることとそれぞれの人の認識（知っていること、信じていること）の間にはギャップがある。その違いを明確に区別した形で推論を扱うのが認識論理 (epistemic logic) である。その記述のために「人 a は “P であること” を知っている（信じている）」ことを表すような論理演算が用いられる。それにより、例えば

> 彼は嘘をついた。だが僕は彼が嘘をついたことを知っている。しかし、彼は僕が彼が嘘をついたことを知っていることに気づいていない。

という文などを記述することができる。このような認識論理は中世のヨーロッパですでに議論されていたようだが、荘子の『秋水篇』の「知楽魚」として知られている次の話はまさしく認識論理に関わる問題である。

荘子が恵子と川のほとりを歩いている

- 荘：　「ハヤがのびのびと泳いでいる。これこそ魚の楽しみだ」
- 恵：「君は魚ではない。どうして魚の楽しみがわかろうか」
- 荘：「君は僕ではない。どうして僕が魚の楽しみがわかっていないとわかろうか」
- 恵：「僕は君ではないから、君のことはわからない。同じように、君は魚ではないから、魚の楽しみはわかるはずがない」
- 荘：「話の始めにかえってみよう。君は『お前は魚ではないのに、どうして魚の楽しみがわかろうか』といった。君は僕の知識の程度を知った上で、そのように僕に問いかけたのだ。でもそのとき、君は僕でないのに僕のことがわかっていたのだ。同じように、僕は魚の楽しみがわかったのさ」

上の例に見られるように、認識論理は複数の人が対話などのコミュニケーションを通して新たな知識を獲得したり、自分が信じていることを変更したりするようなプロセスを記述しその妥当性を論ずることを可能にする。たとえば次のような対話について考えてみよう。

- A :『ここを真っ直ぐ行けば駅ですか？』

- B :『はい』
- A :『どうもありがとう』

対話の後では、A は「ここを行けば駅だ」ということを知る。それとともに B は「A がここを行けば駅だということを知っている」ことを知る。さらに A は「B が『A がここを行けば駅だということを知っている』ことを知っている」ことを知ることになる。このように対話の過程では、その対話に参加している人達の知識や信じている内容の変化がつぎつぎにおこる。このように認識論理には時間経過に伴う動的な要素が入ってくる。そのような動的な要素を一部分組み込んだ dynamic epistemic logic も現在盛んに研究が行われている。認識論理の大きな特徴は、合理的推論を行うと想定される多数のエージェントからなる集団において、コミュニケーションを通してそれぞれのメンバーがどのように知識を得、またメンバー全体がどのような知識を共有するかなどの問題を議論する枠組みを提供していることにある。このことにより、認識論理はコンピュータネットワークの分散システムの形式的な記述や、ゲーム理論の論理的基礎づけなどに応用される。

含意関係について

含意については多くの議論があり、ここで取り上げるのはそのごく一部である。古典論理の場合、「P ならば Q」という含意は「P でないか Q」（言いかえると、「（P であるが、Q でない）とすると矛盾」）と理解される (material implication)。したがって古典論理では命題 P の二重否定は P と同じとみなされるが、それには次のような異論がある。

いま P が存在命題 $\exists x R(x)$ の形であるとする。背理法を使って、$R(x)$ となる x は存在しないと仮定してみる。その結果として矛盾を導くことができれば、この存在命題 $\exists x R(x)$ の証明ができたことになる。これが古典論理での論法であり、実際に数学の存在証明ではこのような議論が多く使われている。他方、構成的な立場からは、この証明は具体的にどのような x について $R(x)$ が成り立つのか何の情報も得られず、存在証明として不十分だとみなす。つまり P の二重否定を証明しただけで P を示したことにはならない。つまり P と P の二重否定とは区別されるべきものと主張するのである。（非構成的な存在証明の例として「 s^t が有理数となるような二つの無理数 s, t が存在する」という命題を考える。$s = t = \sqrt{2}$ とし、$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ が無理数ならこれが答え。もし有理数であればこの数を改めて s とし、また $t = \sqrt{2}$ とする。このとき $s^t = 2$ となるからこの場合にはこれが答えになる。しかしどちらが本当の答えなのか（現時点では）わからない。）構成的な立場を論理体系として整理することにより直観主義論理が得られる。直観主義論理では「P の二重否定ならば P」という含意は認められない。

日常的な場面に現れる含意関係は、同じ「P ならば Q」という形であっても条件文や仮定法などさまざまな内容を持つものがある。次の例を見てみよう。

> 「この 3 回のテストの成績が全て 70 点以上ならば、この科目は合格だ」ということを先生から聞いた学生が、友達に「この 3 回のテストの成績が全て 70 点以上で、さらにあのフルマラソンを完走できれば、この科目は合格だよ」と言った。

この学生の言ったことは正しいのだろうか。数学であれば「P ならば Q」のときはもちろん「(P かつ R) ならば Q」は正しい。その意味でこの学生の言ったことは正しいといったら、やや違和感を持つかもしれない。というのは、「P ならば Q」と聞いた場合、P であることが Q となるための十分条件であるだけでなく必要条件である場合も多い。したがって「(P かつ R) ならば Q」と言うことにより、もともとの「P ならば Q」という内容を弱めるのは日常的な場面では認めがたいであろう。このように考えて、含意関係で余計な仮定をつけ加えることを排除した論理を考える立場もある (relevant logic)。これとは別に、日常的な場面では数学の場合とは異なり議論の背景に多くの暗黙の了解があることも多い。したがって、上の例で「フルマラソンを完走できれば」の代わりに「カンニングしても」という仮定で置き換えた場合には、「カンニングしたらもちろん不合格」という了解がある限り正しいとは言えないだろう。

それでは、次に挙げた例での息子の主張は正しいか？正しくないならばどこに問題があるのか。

> 母 : 先生、この子には困っています。叱られなければ勉強しないんだから。
> 息子 : でも、対偶をとると、勉強すれば叱られることになるじゃないか。それでは割りに合わないよ。

3. 形式化と意味論

数理論理学での形式的な取り扱いについて、ここでは時間論理 (temporal logic) を例にとって説明しよう。時間論理の基本体系では論理的演算として、$[F]$ と $[P]$ をとる。ただし、論理式（すなわち、形式化された命題）α に対し、$[F]\alpha$、$[P]\alpha$ は直観的にはそれぞれ『これからはいつも α』および『これまではいつも α』を意味する。また、$\neg[F]\neg\alpha$ および $\neg[P]\neg\alpha$ をそれぞれ $\langle F\rangle\alpha$、$\langle F\rangle\alpha$ と表す。するとそれらは『将来のいつかあるときに α』および『過去のいつかあるときに α』を意味することになる。時間論理は標準的な様相論理の一つの拡張体系である。次の文について考えてみよう。

- It will snow sometime in the future.
- She has always been reliable.
- He got a job but lost it later.

これらの文はその時制を考慮すればそれぞれつぎのように表すことができる。

- $\langle F\rangle$ *it-snows.*
- $[P]$ *she-is-reliable.*
- $\langle P\rangle$ $(\langle P\rangle$ *(he-gets-job)* $\wedge$ *he-loses-job*$)$.

「叱られなければ勉強しない」という上の例を、時間論理の枠組みで時間の前後関係を明確にした形で表せば

$$[P]\neg\ \textit{(mother-scolds-him)} \rightarrow \neg\ \textit{(he-studies)}.$$

となる。そこで、対偶をとれば（ただし、ここでは古典論理で考えると）

$$\textit{(he-studies)} \to \langle P \rangle\ \textit{(mother-scolds-him)},$$

すなわち、「勉強しているならば、お母さんに叱られたんだな」となる。これが正しい対偶である。すでに述べたように日常的な場面では「P ならば Q」はしばしば「原因 P があって結果 Q がおこる」という因果関係を表している。その対偶「Q でなければ P でない」を考える時に時間の前後関係まで逆転させるとこのような奇妙なことが起こる。

ところでこのような形式化（記号化）を行ったとき、それにより我々が意図したことがどの程度形式化に反映されているのだろうか。そのことを確認するために意味論 (semantics) が必要になる。数理論理学における意味論とは、形式化されたものを日常的な言葉で読み直すことではない。使われる記号がそのボキャブラリーに含まれるような数学的構造をとり、それぞれの記号にその構造の中の対象を対応させる（解釈）ことにより、おのおのの論理式の真偽を問うことである。そのような解釈において、形式化により公理に採用される論理式はすべて真でなければならない。

様相論理に対しては Kripke の意味論 (relational semantics) が直観的にもまた数学的にも有効である。時間論理に限定するとその数学的構造 (frame) は、時点の集まりを表す空でない集合 T と時点の前後関係を表す irreflexive, transitive な二項関係 $<$ からなる $\langle T, < \rangle$ というペアとしてあたえられる。例えば $\langle \mathbb{Z}, < \rangle$, $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$, $\langle \mathbb{R}, < \rangle$ などは frame である。さて各時点 s と命題変数（基本命題）p に対し、「時点 s で p が成り立つ ($s \models p$)」かどうか（付値）を一つ決めると、「（この付値に関して）時点 s で論理式 α が成り立つ ($s \models \alpha$)」かどうかが帰納的に定められる。とくに $[F], [P]$ については次のように定めておく。

- $s \models [F]\alpha$ iff $t \models \alpha$ for every t such that $s < t$,
- $s \models [P]\alpha$ iff $t \models \alpha$ for every t such that $t < s$.

frame $\langle T, < \rangle$ で論理式 α が恒真であるとは、この frame でどのように付値 $\models$ を取っても、すべての $s \in T$ に対し $s \models \alpha$ となることとする。さて、$[F]$ と $[P]$ の付値の定め方において時間の向きが逆になっていることから、次の二つの論理式はどんな frame でも恒真になることがわかる。それぞれは「どんな過去から見ても現在は未来にある」、および「どんな未来から見ても現在は過去にある」ことを意味する。そこでこの二つの論理式を時間論理の公理の一つとして採用する。

- $\alpha \to [P]\langle F \rangle \alpha$,
- $\alpha \to [F]\langle P \rangle \alpha$.

時点全体が一直線に並んでいること、つまり「時の流れには分岐がない」ことを仮定するならば、つぎの二つの論理式をさらに公理として付け加える必要がある。ただし $\Box\alpha$ は $[P]\alpha \wedge \alpha \wedge [F]\alpha$ の省略形で「いつも α」を意味する。

- $\Box\alpha \to [P][F]\alpha$,

- $\Box\alpha \to [F][P]\alpha$,

「時間には始まりも終わりもない」ことを表す公理と、時間の離散性を表す公理とをさらに付け加えることにより、$\langle \mathbb{Z}, < \rangle$ で恒真な論理式全体を公理体系として表すことができる。同様に、「時間には始まりも終わりもない」ことを表す公理と時間の稠密性を表す公理をとれば $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ で恒真な論理式全体が、そしてこの二つの公理にさらに時間の連続性を表す公理を付け加えれば $\langle \mathbb{R}, < \rangle$ で恒真な論理式全体を公理化できることが知られている。実際に、時間の連続性は $\Box([P]\alpha \to \langle F \rangle [P]\alpha) \to ([P]\alpha \to [F]\alpha)$ という時間論理の論理式により表されるのである。

4. 表現力と決定可能性

時点の集合が上の例のような場合であれば、時間命題論理の枠組みで議論する代わりに、よく知られた一階述語論理 (first-order classical logic) で扱うこともできよう。確かに一階述語論理は一般的には命題論理よりはるかに優れた記述力や表現力を持つ。その一方で、一階述語論理はその表現力の強さゆえに決定不能になる。すなわち、あたえられた一階述語論理の論理式が恒真であるか否かを判定するアルゴリズムは存在しない。これは論理を現実の問題に応用するということを考える時には大きな問題である。

それに対し、一階述語論理のようなユニフォームな枠組みをとる代わりに、個々の論理的な問題に対しその目的に適した論理を選べば良いという考え方もあろう。実際に、さまざまな推論の形に伴ってさまざまな非古典論理が提案されているのだが、そのような論理により形式化が適切に行われしかもその決定可能性が証明できれば、非古典論理を実用的な問題への応用に結びつけることが可能になるだろう。確かに多くの主要な非古典命題論理については決定可能であることが知られている。ただし、選ばれた命題論理がどの程度の表現力を持つかは問題になるが、上の時間論理の例に見たように様相演算を導入などにより、部分的には述語論理以上の強い表現力を持つこともある。

このことを時間論理の場合について、もう少し詳しく検討してみよう。以下では、すでに述べた時間論理に新たに二つの二項演算 S と U を導入して強めた体系について考える。S と U はそれぞれは since, until を意味し、$\alpha S \beta$ は「(過去に) β であり、それ以来いままでずっと α」、そして $\alpha U \beta$ は「(将来) β であり、それまではずっと α」を意味する。$[P]$ と $[F]$ はともに S と U を使えば定義可能である。(例えば $\langle F \rangle$ *it-snows* は **true** U *it-snows* と表すことができる。) S と U を持つ時間論理は、それらを持たない時間論理より本質的に表現力は強い。このことは、例えば後者の satisfiability problem の complexity が NP-complete であるのに対し、後者は PSPACE-complete であるという結果 (それぞれ Ono-Nakamura と Sistra-Clarke による) から導かれる。さて時点 s で $\alpha U \beta$ が成り立つことは、次の述語論理の論理式で表すことができる。

$$\exists t(t > s \wedge \beta(t) \wedge \forall v(t > v > s \to \alpha(v)))$$

もちろん S についても同様にして述語論理で表現可能である。また「Dedekind 完備な」全順序を時点の集合に持つ frame に限るならば、逆に一階の述語論理の論理式で表されるどんな時間演算も S と U で定義することができる (Hans Kamp, 1968)。こ

の結果から、特別な場合として $\langle \mathbb{Z}, < \rangle$ や $\langle \mathbb{R}, < \rangle$ においては時間論理は述語論理と同じ表現力を持つことがわかる。

プログラムの検証やモデル検査、そして知識表現などでは論理学的な概念と手法が実際的な問題に使われるようになってきたが、このような論理学の工学的な応用においてはとくに表現可能性と計算の実行可能性という二つの対立する要求の間に適切な妥協点を見出すことが求められる。そのため、命題論理と述語論理の中間をとって、論理式を決定可能性が保証できるような形に制限した述語論理の部分体系 (fragment) を利用する場合もある。

5. 論理学への代数的アプローチ

最後に非古典論理の研究の数学的側面、とくに私が近年携わってきた代数的方法について簡単に触れておきたい。

状況に応じてさまざまな非古典論理を利用するというのは柔軟な考え方ともいえるが、他方ではそのような研究は場当たり的で瑣末な議論に陥ってしまう可能性を常にはらんでいる。それを避けるために、さまざまな非古典論理を包括する哲学的ないし数学的枠組みについて考察してみることも必要であると思う。その意味では（広い意味での）様相論理は認識論理や時間論理などを含む大きな枠組みの一つである。この半世紀の間に様相論理の研究は大きく発展し成功を収めてきたが、その原動力になったのが relational semantics であることは言をまたない。その意味論は直観的にもイメージし易くまたその数学的構造もシンプルである。このことにより哲学と数学の両面からのアプローチを促進し、さまざまな問題への分野を超えた研究の展開を可能にしている。

relational semantics と並ぶ意味論としては、代数的構造を用いる代数的意味論がある。代表的な例は古典論理に対する代数としてのブール代数を用いた意味論である。もっとも代数的意味論という考え方は２０世紀に入ってからのものであり、G. Boole のもともとの意図は（古典）論理を代数的な形で形式化しようとしたものである。代数的意味論ではおのおのの論理演算はそれぞれに対応する代数上の代数演算として解釈される。ブール代数であれば、論理演算 $\wedge, \vee, \neg$ はそれぞれ束演算 $\cap, \cup$ および補元をとる演算 $'$ として解釈されることになる。また、代数的意味論の場合、付値とは命題変数全体の集合からあたえられたブール代数 $\mathbf{B}$ への写像のことである。論理式 α がブール代数 $\mathbf{B}$ で恒真であるとは、$\mathbf{B}$ 上のどんな付値 f に対しても、$f(\alpha)$ の値が $\mathbf{B}$ の最大元 1 に等しいこと、すなわち α をどのように代数的に解釈しても値が 1（真）になることとする。このときつぎの二つの条件が同値であることを示すことができる。

- 論理式 α は古典命題論理で証明できる、
- 論理式 α は任意のブール代数で恒真。

古典命題論理に対しブール代数全体のクラスを対応させたように、一般の命題論理に対してもある代数のクラスを対応させることができる。そのクラスを、あたえられた論理の代数的な意味と考えるのである。そのような代数のクラスは homomorphic image, subalgebra, direct product の三つの代数演算に関して閉じている（universal algebra ではこのようなクラスは variety と呼ばれる。）さらに（「論理」と「代数」を適切な形

で定義すると）その逆も成り立つことが知られている。例えば、直観主義論理に対応するのは Heyting 代数全体の variety であり。また様相論理に対応するのは、単項の代数演算が定義されたブール代数（様相代数）のクラスである。さらに、部分構造論理は、直観主義論理、relevant logic、線形論理、多値論理などさまざまな含意をもつ非古典論理を多く含んでいるが、これらに対応するのは「剰余法則を満たす代数」(residuated lattice) のクラスである。この意味で、部分構造論理は「含意」をキーワードにする非古典論理のもう一つの大きな枠組みと考えることができる。

論理と代数のクラスの間のこのような対応関係により、論理に関する問題を対応する代数のクラスについての問題に置き換えることができる。詳細は省くが、例えばあたえられた論理において Craig の補間定理が成り立つかどうかは、対応する variety が amalgamation property を持つかどうかと同値になる。L.L. Maksimova は Craig の補間定理が成り立つ中間論理（直観主義論理と古典論理の間にある論理）はちょうど 7 つであるという驚くべき結果を、Heyting 代数全体の variety の自明でない subvariety で amalgamation property を持つものがちょうど 7 つであることを示すことによって得た。

代数的意味論は Kripke の意味論に比べると、その数学的構造が複雑なため取りつきにくい面はあるが、きわめて強力で Kripke の意味論より一般性を持つ。代数的方法は大きな可能性を持ち、今後の論理学においてさらにその力を発揮すると考えている。

参考文献

[1] N. Galatos, P. Jipsen, T. Kowalski and H. Ono, *Residuated Lattices: an algebraic glimpse at substructural logics*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, vol.151, Elsevier, 2007.

[2] R. Goldblatt, *Logics of Time and Computation*, 2nd ed., CSLI Lecture Notes No.7, CSLI Publications, 1992.

[3] R. Goldblatt, *Mathematical modal logic: a view of its evolution*, in: Handbook of the History of Logic, vol.7, D.M. Gabbay and J. Woods eds. (2006), pp.1-98.

[4] H. Ono, *Proof Theory and Algebra in Logic*, Short Textbooks in Logic, Springer, to appear.

[5] J. van Benthem, *Modal Logic for Open Minds*, CSLI Lecture Notes No.199, CSLI Publications, 2010.