幾何的ボゴモロフ予想と非アルキメデス的幾何

山木　壱彦　(京都大学　国際高等教育院／大学院理学研究科)*

1. はじめに

幾何的ボゴモロフ予想とは，函数体上のアーベル多様体の閉部分多様体で「標準高さ」の小さい点をたくさん持つようなものを特徴づける予想で，元々 Bogomolov によって提出された函数体上の（曲線に対する）ボゴモロフ予想を一般化した主張である．現時点でも完全な形では解決していないが，ここ数年で大きく研究は進展し，その結果，元の函数体上のボゴモロフ予想を完全に解決するに至った．

最近の進展においては，非アルキメデス的幾何，特にベルコビッチ空間および Chambert-Loir 測度が重要な役割を果たした．本稿では，幾何的ボゴモロフ予想にこれら非アルキメデス的幾何的対象がどのように応用されるたのかを中心に概説する．また，予想の現在の進展状況についても言及する．[1]

1.1. 術語と記号遣い

代数閉体上の代数多様体とは，その体上分離的な有限型スキームで被約かつ既約なものを指す．

k は代数閉体，$\mathfrak{B}$ は k 上の滑らかな射影曲線とし，$\mathfrak{B}$ の函数体を単に**函数体**と呼ぶ．特に断らない限り，K は代数体（有理数体の有限次拡大体）または函数体を表す．K の代数閉包 $\overline{K}$ は固定しておく．K の有限次拡大は $\overline{K}$ の中で取るものとする．

R は環で S はその部分環とする．X は R 上のスキームとする．S 上のスキーム X' で $X \cong X' \otimes_S R$ なるものを，X の S **上のモデル**と呼ぶ．X が S 上のモデルを持つとき，X は S **上定義可能**といわれる．

2. 高さ

$\overline{K}$ 上の射影多様体に直線束が与えられたとき，それに付随する高さという概念が定義できる．本節では，それについて復習する．基本文献として [14, 3] を挙げておく．

2.1. 直線束に付随した高さ函数

まずは，Weil の高さ函数と呼ばれる $\mathbb{P}^n(\overline{K})$ 上の実数値函数について，主に K が函数体の場合に復習する．以下，しばらくの間 K は函数体とする．

K' は K の有限次拡大体とし，$\mathfrak{B}'$ は $\mathfrak{B}$ の K' での正規化とする．すなわち，$\mathfrak{B}'$ は k 上の滑らかな射影曲線で $\mathfrak{B}$ の有限被覆であり函数体が K' と一致するものである．K' に対し，このような $\mathfrak{B}'$ は自然な同型の違いを除いて一意に存在する．$M_{K'} := \mathfrak{B}'(k)$ とおき，この集合の元を K' の**素点**と呼ぶ．自然な全射 $M_{K'} \to M_K$ が存在する．

$\mathfrak{B}'$ は滑らかなので，任意の $v' \in M_{K'}$ に対し，そこでの $\mathfrak{B}'$ の局所環 $\mathcal{O}_{\mathfrak{B}',v'}$ は離散付値環である．したがって，次の条件で特徴づけられる**位数函数** $\mathrm{ord}_{v'} : (K')^\times \to$

本研究は科研費（課題番号：21740012，26800012）の助成を受けたものである．
2010 Mathematics Subject Classification: 14G40 (primary), 11G50, 14G22 (secondary)
キーワード：geometric Bogomolov conjecture, non-archimedean geometry
* 〒 606-8502 京都市左京区北白川追分町　京都大学大学院理学研究科数学教室
e-mail: yamaki.kazuhiko.6r@kyoto-u.ac.jp
[1] 幾何的ボゴモロフ予想に関するより詳しい解説論文として，[25] を挙げておく．

$\mathbb{Z}$ が存在する：ϖ は $\mathcal{O}_{\mathfrak{B}',v'}$ の極大イデアルの生成元とするとき，$a \in (K')^{\times}$ に対し $a\varpi^{-\operatorname{ord}_{v'}(a)} \in \mathcal{O}_{\mathfrak{B}',v'}^{\times}$ が成立する．形式的に $\operatorname{ord}_{v'}(0) := +\infty$ と定めることにより，位数函数を $\operatorname{ord}_{v'} : K' \to \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ とみなすことも多い．任意に $v' \in M_{K'}$ をとる．このとき，任意の $a \in K'$ に対し $|a|_{v'} := e^{-\operatorname{ord}_{v'}(a)}$ と定める．これは K の非アルキメデス的絶対値 $|\cdot|_{v'}$ を定める．

以上の設定の下，函数 $h^W : \mathbb{P}^n(\overline{K}) \to \mathbb{R}$ が一意に存在して，次の条件を満たすことが知られている：K 上の任意の有限次拡大体 K' と任意の $(a_0, \ldots, a_n) \in (K')^{n+1} \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$ に対し，

$$h^W(a_0 : \ldots : a_N) := \frac{1}{[K' : K]} \sum_{v' \in M_{K'}} \log \max_{i=0,\ldots,N} \{|a_i|_{v'}\}$$

が成立する．この h^W を，**Weil の高さ函数**と呼ぶ．

以上，K が函数体の場合にその上の Weil の高さ函数について説明したが，K が代数体の場合でも同様に Weil の高さ函数が定義できる．詳細は省略するが，特徴づけを与える式だけを紹介しておく．K は代数体とする．函数 $h^W : \mathbb{P}^n(\overline{K}) \to \mathbb{R}$ で，K 上の任意の有限次拡大体 K' と任意の $(a_0, \ldots, a_n) \in (K')^{n+1} \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$ に対し，

$$h^W(a_0 : \ldots : a_N) := \frac{1}{[K' : K]} \sum_{v' \in M_{K'}} \log \max_{i=0,\ldots,N} \{|a_i|_{v'}\}$$

が成立する．ただし，$M_{K'}$ は K' の素点全体の集合を表す．$M_{K'}$ には，有限素点（非アルキメデス的素点，すなわち，K' の整数環の極大イデアル）と無限素点（アルキメデス的素点，すなわち，K' の $\mathbb{C}$ への体埋め込み）があることに注意しておく．各素点 $v' \in M_{K'}$ に対し，v' が有限素点のときには，函数体の素点の場合の様に位数函数を用いて絶対値 $|\cdot|_{v'}$ が定義される；ただし，指数の底は異なる（詳細は省略する）．v' が無限素点で $\sigma : K' \hookrightarrow \mathbb{C}$ が対応する埋め込みのときは，$|a|_{v'} := |\sigma(a)|$ と定める；ただし，右辺の $|\cdot|$ は $\mathbb{C}$ 上の通常の絶対値である．

ここから先は，K は代数体または函数体とする．定義から次は簡単に得られる．

補題 2.1. 任意の $(a_0 : \ldots : a_N) \in \mathbb{P}^n(\overline{K})$ に対し，$h^W(a_0 : \ldots : a_N) \geq 0$ である．

直線束に付随した高さを説明しよう．いま，定義域を等しくする実数値函数 f と g に対し，$f \sim g$ で $f - g$ が有界函数であることを表す．この $\sim$ は同値関係である．

命題 2.2. 射影多様体とその上の直線束の組 (X, L) に対し，次の条件を満たす函数 $h_{(X,L)} : X(\overline{K}) \to \mathbb{R}$ を対応させることができる．

(i) 任意の (X, L_1) と (X, L_2) に対し，$h_{(X,L_1)} + h_{(X,L_2)} \sim h_{(X,L_1 \otimes L_2)}$ が成立する．

(ii) 任意の (X, L) と射影多様体の射 $\phi : Y \to X$ に対し，$h_{(Y,f^*(L))} \sim \phi^*(h_{(X,L)})$ が成立する．

(iii) L が X 上の非常に豊富な直線束のとき，L に付随する射影空間への閉埋め込みを $i : X \to \mathbb{P}^n$ で表すと，$h_{(X,L)} \sim i^*(h^W)$ が成立する．

さらに，対応 $(X, L) \mapsto h'_{(X,L)}$ も上の (i)–(iii) を満たすものとするとき，任意の (X, L) に対し $h_{(X,L)} \sim h'_{(X,L)}$ である．

上の命題にあるような $h_{(X,L)}$（単に h_L とも書く）を L に**付随した高さ函数**と呼ぶ．

2.2. アーベル多様体上の標準高さ

上で見たように，直線束に付随した高さ函数は有界函数の不定性を持つものであった．しかし，アーベル多様体に対しては「標準的」高さが一意にとれることが知られている．この小節では，このことを（「偶な」直線束に対して）説明する．

A は $\overline{K}$ 上のアーベル多様体とする．A 上の直線束 L が**偶**であるとは，$[-1]^*(L) \cong L$ が成立することをいう．ただし，一般に整数 m に対し，$[m] : A \to A$ で m 倍準同型射を表すことにする．L が偶な直線束のとき，任意の $m \in \mathbb{Z}$ に対し $[m]^*(L) \cong L^{\otimes m^2}$ が成立することが知られている．

定義 2.3. L はアーベル多様体 A 上の偶な直線束とする．L に付随した高さ函数 $\widehat{h}_L$ が **標準的**であるとは，加法群 $A(\overline{K})$ 上の双線型形式 b_L が存在して，任意の $a \in A(\overline{K})$ に対し $h_L(a) = \frac{1}{2}b_L(a,a)$ が成立することをいう．

定理 2.4. L はアーベル多様体 A の偶な直線束とする．このとき，L に付随した標準高さ函数 $\widehat{h}_L$ は一意に存在する．

標準高さ函数は，次の性質を持つ．

命題 2.5. アーベル多様体とその上の偶な直線束の組 (A, L) に対し，$\widehat{h}_L$ で L に付随した標準高さ函数を表す．

(1) A 上の偶な直線束 L_1，L_2 に対し，$\widehat{h}_{L_1} + \widehat{h}_{L_2} = \widehat{h}_{L_1 \otimes L_2}$ が成立する．

(2) アーベル多様体の準同型 $f : B \to A$ と A 上の偶な直線束 L に対し，$\widehat{h}_{f^*(L)} = f^*\left(\widehat{h}_{(X,L)}\right)$ が成立する．

(3) L が A 上の偶かつ豊富な直線束ならば，$\widehat{h}_L \geq 0$ が成立する．

偶な直線束に付随した高さ函数が二次形式であることに注意すると，命題 2.2 の条件 (i)，(ii) から上の命題の (1)，(2) が導かれる．さらに補題 2.1 にも注意すると (3) も導かれる．

2.3. 高さ 0 の点

A は $\overline{K}$ 上のアーベル多様体とする．次の補題に注意しておく．

補題 2.6. L_1 と L_2 が A 上の豊富な直線束のとき，任意の $x \in A(\overline{K})$ に対し，$\widehat{h}_{L_1}(x) = 0$ と $\widehat{h}_{L_2}(x) = 0$ は同値である．

この補題によって，“$\widehat{h}_L(x) = 0$” という性質は偶で豊富な L の取り方に依らない．そこで，$x \in A(\overline{K})$ が**高さ 0** であるというのを，ある（したがって全ての）偶で豊富な L に対し $\widehat{h}_L(x)$ が成立することと定める．

さて，$\widehat{h}_L$ は $A(\overline{K})$ 上の二次形式なので，$x \in A(\overline{K})$ が捻じれ元のときその高さは 0 である．代数体の場合には，逆に次も成立することが知られている；ただし，$A(\overline{K})_{tor}$ は $A(\overline{K})$ の捻じれ元全体の集合を表す．

定理 2.7. K は代数体とする．このとき，高さ 0 の点の集合は $A\left(\overline{K}\right)_{tor}$ に一致する．

一方で，函数体の場合は一般には事情が異なる．それは「定アーベル多様体」によって引き起こされる．少し説明しよう．

K は函数体とし，B は $\overline{K}$ 上のアーベル多様体とする．B が**定アーベル多様体**であるとは，k 上のアーベル多様体 $\widetilde{B}$ が存在して $B \cong \widetilde{B} \otimes_k \overline{K}$ が成立することをいう．また，このような $\widetilde{B}$ を k **上のモデル**と呼ぶ．

注意 2.8. Chow の定理（[14] の II，§1，定理 5 ）により，定アーベル多様体に対しその k 上のモデルは標準的同型の違いを除いて一意的であることが知られている．

B は定アーベル多様体とする．k 上のモデル $\widetilde{B}$ を取ると，自然な単射 $\widetilde{B}(k) \hookrightarrow B(\overline{K})$ が存在する．この像を $B(k)$ で表しその元を**定点**と呼ぶ．上の注意より，$B(k)$ は $\widetilde{B}$ の取り方によらずに定義される．

補題 2.9. 任意の $x \in B(k)$ は高さ 0 である．

B が自明でなくかつ k が有限体の代数閉包でないとき $B(k)$ は非捻じれ元を持つので，この補題により一般に B は非捻じれ元であるような高さ 0 の点を持つことになる．これは代数体の場合には見られなかった現象である．

ひとたび定アーベル多様体の定点が高さ 0 であることがわかると，一般のアーベル多様体 A においても高さ 0 の点がいろいろ出現し得ることに気づく．例えば，定アーベル多様体 B から A への準同型 $\phi : B \to A$ が存在するとき，$y \in B(k)$ に対し $\phi(y)$ は高さ 0 であることは，命題 2.5 と補題 2.9 から直ちにわかる．

こうした,「定アーベル多様体からの準同型による定点の像」として現れる高さ 0 の A の点を一括して扱うには，A の「$\overline{K}/k$-跡」を用いるのが便利である．それは，定アーベル多様体から A への準同型射の中で普遍的なもののことである．きちんと定義しよう．$\left(A^{\overline{K}/k}, \mathrm{Tr}_A\right)$ は定アーベル多様体 $A^{\overline{K}/k}$ と準同型射 $A^{\overline{K}/k} \to A$ の組とする．これが A の $\overline{K}/k$**-跡**であるとは，任意の定アーベル多様体 B と B から A への準同型射 $\phi : B \to A$ に対し，準同型射 $\phi' : B \to A^{\overline{K}/k}$ が一意に存在して $\phi' \circ \mathrm{Tr}_A = \phi$ が成立する．Tr_A を A の $\overline{K}/k$**-跡準同型**と呼ぶ．

定理 2.10. A は $\overline{K}$ 上のアーベル多様体とする．このとき，$\overline{K}/k$-跡 $\left(A^{\overline{K}/k}, \mathrm{Tr}_A\right)$ は，自然な同型を除いて一意に存在する．

そして，$\overline{K}/k$-跡を用いると高さ 0 の点は次のように特徴づけられる．

定理 2.11. K は**函数体**とする．$A\left(\overline{K}\right)$ の高さ 0 の点の集合は，

$$\mathrm{Tr}_A\left(A^{\overline{K}/k}(k)\right) + A\left(\overline{K}\right)_{tor}$$

に一致する．

3. Zhang の定理と幾何的ボゴモロフ予想

Zhang の定理は代数体上の定理であるが，幾何的ボゴモロフ予想はその定理の函数体版類似である．この節では，Zhang の定理を紹介した後，幾何的ボゴモロフ予想を定式化する．

3.1. 小点の稠密性

本小節で,「小点の稠密性」という概念を紹介しておく．A は $\overline{K}$ 上のアーベル多様体で，X はその閉部分多様体であるとする．L が A 上の偶で豊富な直線束で ϵ が非負の実数のとき，

$$X(\epsilon; L) := \left\{ x \in X(\overline{K}) \,\middle|\, \widehat{h}_L(x) \leq \epsilon \right\}$$

とおく．

次の補題が成立することに注意しておく．

補題 3.1 ([21]，Lemma 2.1 の証明参照)**.** A は $\overline{K}$ 上のアーベル多様体で，X はその閉部分多様体であるとする．L_1 と L_2 は A 上の偶で豊富な直線束であるとする．このとき，「任意の $\epsilon > 0$ に対し，$X(\epsilon; L_1)$ は X で稠密である」と「任意の $\epsilon > 0$ に対し，$X(\epsilon; L_2)$ は X で稠密である」は互いに同値である．

X が**小点を稠密に持つ**とは，L が A 上の偶で豊富な直線束のとき任意の $\epsilon > 0$ に対し $X(\epsilon; L) := \{x \in X(\overline{K}) \mid \widehat{h}_L(x) \leq \epsilon\}$ が X で稠密となることをいう．補題 3.1 によって，これは L のとり方に依存しない．もし $X(\overline{K})$ の高さ 0 の点の集合が X で稠密ならば，X は小点を稠密に持つことに注意しておく．

小点の稠密性と関係ある概念として，「生成的かつ小な網」というものがある．後で使うので，ここで説明しておく．有効集合 I から集合 S への写像のことを，（I に添え字付けられた）S 上の**網**と呼ぶ．X は $\overline{K}$ 上のアーベル多様体 A の閉部分多様体とする．$(x_i)_{i\in I}$ は $X(\overline{K})$ 上の網とする．$(x_i)_{i\in I}$ が**生成的**であるとは，X の任意の閉部分集合 Y と任意の $i_0 \in I$ に対し，$i \geq i_0$ が存在して $x_i \notin Y$ が成立することを言う．$(x_i)_{i\in I}$ が**小**であるとは，A 上の偶かつ豊富な直線束 L に対して $\lim_i \widehat{h}_L(x_i) = 0$ が成立することを言う．網が小であるというのは L の取り方には依らない．

生成的かつ小な網は，次の補題によってアーベル多様体の閉部分多様体の小点の稠密性の文脈と結びつく．

補題 3.2. X は $\overline{K}$ 上のアーベル多様体 A の閉部分多様体とする．X は小点を稠密に持つとする．このとき，$X(\overline{K})$ は生成的かつ小な網を持つ．

3.2. ボゴモロフ予想，Ullmo の定理，Zhang の定理

Zhang の定理を，その経緯と共に説明しよう．1980 年に Bogomolov は [2] で，現在では**（曲線に対する）ボゴモロフ予想**と呼ばれる，次の予想を提示した．

予想 3.3 ([2],（曲線に対する）ボゴモロフ予想)**.** K は代数体または函数体とする C は $\overline{K}$ 上の非特異射影曲線で，種数 g は 2 以上であるものとする．ただし，K が k 上の函数体の場合には，C は定数体 k 上は定義可能でないと仮定する．次数 1 の C 上の因子 D を任意にとり，$j_D : C \to J_C$ を $j_D(x) = x - D$ で定める．このとき，$j_D(C)$ は小点を稠密に持たない．

「$j_D(C)$ は小点を稠密に持たない」というのは，J_C の偶で豊富な直線束 L を一つ（任意に）固定すると，「実数 $\epsilon > 0$ が存在して

$$\left\{x \in C(k) \,\middle|\, \widehat{h}_L(j_D(c)) \leq \epsilon\right\}$$

が有限集合である」という主張に他ならないことを注意しておく．

K が**代数体**のとき，1998 年に Ullmo がボゴモロフ予想は成立することを示した．そして，その直後，Ullmo のアイデアを少し変形して，Zhang は次の定理を証明した．

定理 3.4 ([28]，Zhang の定理)**.** K は代数体であるとする．A は $\overline{K}$ 上のアーベル多様体であり，X は A の閉部分多様体であるとする．このとき，もし X が小点を稠密に持つならば，X は捩れ部分多様体である．

Zhang の定理は Ullmo の定理の一般化になっている．

なお，函数体上の（曲線に対する）ボゴモロフ予想については，Zhang の [27] で展開された「許容交点数」の計算を用いた方法で，森脇や山木による部分的結果がいくつか得られた（例えば [16, 19, 20]）．その後，Zhang の Gross–Schoen 輪体の高さの計算 [29] を用いて，標数 0 の仮定の下，Cinkir が次の定理を証明している．

定理 3.5 ([6]，Cinkir の定理). K は（一変数）函数体で，その標数は 0 と仮定する．このとき，曲線に対するボゴモロフ予想（予想 3.3）は正しい．

詳しくは述べないが，Cinkir の証明（森脇，山木の部分的結果の証明も）は Ullmo のそれとは大きく異なる．また，Cinkir の証明では標数 0 の仮定は重要である．

3.3. 幾何的ボゴモロフ予想

Zhang の定理は，代数体上のアーベル多様体の閉部分多様体で小点を稠密に持つものを特徴づける主張である．幾何的ボゴモロフ予想とは，その函数体版，つまり，K が函数体のとき，$\overline{K}$ 上のアーベル多様体 A の閉部分多様体で,「高さの小さい点」を（ザリスキ位相で）稠密に持つようなものを特徴づける主張である．この小節では，この予想を定式化する．

$B = \widetilde{B} \otimes_k \overline{K}$ は k 上のモデル $\widetilde{B}$ を持つ定アーベル多様体とする．B の閉部分多様体 Y が**定である**とは，$\widetilde{B}$ の閉部分多様体 $\widetilde{Y}$ が存在して $Y = \widetilde{Y} \otimes_k \overline{K}$ が成立することをいう．注意 2.8 より，Y が定であるという性質は k 上のモデル $\widetilde{B}$ の取り方に依らない．自然な射 $\widetilde{Y}(k) \hookrightarrow Y(\overline{K})$ の像を $Y(k)$ で表す．$Y(k) \subset B(k)$ である．

定義 3.6 ([21]，特殊部分多様体). A の閉部分多様体 X が**特殊**であるとは，A の部分アーベル多様体 G と捩れ点 $\tau \in A\left(\overline{K}\right)_{tor}$，そして $A^{\overline{K}/k}$ の閉部分多様体 Z で定なものが存在して

$$X = \mathrm{Tr}_A(Z) + G + \tau$$

が成立することを言う．

定アーベル多様体の定閉部分多様体 Y に対し，$Y(k)$ は Y で稠密である．したがって，補題 2.9 より，Y の高さ 0 の点全体は Y で稠密である．このことから，次の命題が成立することが示せる．

命題 3.7. X が A の特殊部分多様体ならば，$X(\overline{K})$ の高さ 0 の点全体の集合は X で稠密である．特に，X は小点を稠密に持つ．

この命題の逆の成立を主張するのが，幾何的ボゴモロフ予想である．

予想 3.8 ([21]，幾何的ボゴモロフ予想). K は函数体であると仮定する．A は $\overline{K}$ 上のアーベル多様体であるとする．X は A の閉部分多様体であるとする．このとき，もし X が小点を稠密に持つならば，それは特殊部分多様体である．

小点を稠密に持つ閉部分多様体を特徴づけるという意味において，これは Zhang の定理の函数体版類似になっている．

4. Zhang 定理の証明

本節では，[28] の Zhang の定理の証明を概説する．Zhang の定理については [12] に詳しい解説がある．

4.1. 標準測度

アーベル多様体上の直線束上の標準計量と標準測度について概説する．基本文献として [15] を挙げておく．

標準計量の定義で使うので，剛化という概念を定義する．A は体 F 上のアーベル多様体とし，L は A 上の直線束とする．同型写像 $F \cong L(0)$ のことを L の**剛化**と呼ぶ．L の剛化が与えられたとき，任意の $m \in \mathbb{Z}$ に対し $L^{\otimes m}$ にも剛化が誘導される．また，アーベル多様体の準同型 $\phi : B \to A$ に対し，B 上の直線束 $\phi^*(L)$ にも自然に剛化が誘導される．さらに，L は偶な直線束のとき，任意の $m \in \mathbb{Z}$ に対し，剛化を保つ同型 $[m]^*(L) \cong L^{\otimes m^2}$ が一意に存在する．

以下，この小節では $\mathbb{C}$ 上で考える．$\mathbb{C}$ 上の代数多様体 X に対し，X^{an} で付随する複素解析空間を表す．X 上の直線束 L は，自然に X^{an} 上の直線束を与えるが，それも同じ記号 L で表す．

A は $\mathbb{C}$ 上のアーベル多様体で，L はその上の偶な直線束とする．L の剛化を固定する．L の計量 $\|\cdot\|$ が**標準**であるとは，任意の $m \in \mathbb{Z}$ に対し，剛化を保つ同型 $[m]^*(L) \cong L^{\otimes m^2}$ が計量付き直線束の計量同型であることをいう．

命題 4.1. $\mathbb{C}$ 上のアーベル多様体上の偶な直線束に対し，その標準計量は一意に存在する．しかも，その計量は滑らかである．

$n := \dim(A)$ とおく．$(A, 0)$ の普遍被覆 $\mathbb{C}^n \to A^{\mathrm{an}}$ を解析群の準同型であるようにとる．$z_1, \ldots, z_n$ は $\mathbb{C}^n$ の標準座標系とする．滑らかな計量付き直線束 $\overline{L}$ に対し，その曲率形式は$c_1(\overline{L}) = \sum_{i,j} c_{ij}\sqrt{-1}dz_i \wedge d\overline{z_j}$ と表される．ただし，c_{ij} は A^{an} 上の滑らかな函数で，各点 $p \in A^{\mathrm{an}}$ に対し行列 $\Big(c_{ij}(p)\Big)_{i,j}$ はエルミート行列である．

命題 4.2. L は偶と仮定する．$\overline{L}$ の計量が標準計量ならば，c_{ij} は全て定数である．さらに L が豊富ならば，$c_1(\overline{L})$ は正，すなわち，エルミート行列 $\Big(c_{ij}\Big)_{i,j}$ は正定値である．

L は A 上の偶かつ豊富な直線束とする．L の剛化を任意に固定し，標準計量 $\|\cdot\|$ をとる．$\overline{L} := (L.\|\cdot\|)$ とおく．X は A の閉部分多様体とし，$d := \dim(X)$ とおく．$f : X' \to X$ は生成的有限な固有全射とする．$f^*(\overline{L})$ は $(X')^{\mathrm{an}}$ 上の滑らかな計量付き直線束なので，その曲率形式 $c_1(f^*(\overline{L}))$ が考えられる．$c_1(\overline{L})$ は正なので，その引き戻しの最大外積 $c_1(\overline{f^*(L)})^{\wedge d}$ は半正な (d, d)-形式である．この微分形式に付随する測度を $\left[c_1(f^*(\overline{L}))^{\wedge d}\right]$ で表す．

補題 4.3. X^{an} 上の測度 $\frac{1}{\deg(f)} f_*\left(\left[c_1(f^*(\overline{L}))^{\wedge d}\right]\right)$ は生成的有限な固有全射 $f : X' \to X$ の取り方に依らずに定まる．

そこで，上の補題にある測度を体積が 1 になるように正規化したもの

$$\mu_{X^{\mathrm{an}},L} := \frac{1}{\deg(f)\deg_L(X)} f_*\left(\left[c_1(f^*(\overline{L}))^{\wedge d}\right]\right)$$

を，（L に付随した）X^{an} の**標準測度**と呼ぶ．

注意 4.4. $\mu_{X^{\mathrm{an}},L}$ を X^{an} の滑らかな部分 U^{an} に制限したものは，滑らかな (d, d)-形式 $\frac{1}{\deg_L(X)} c_1\left(\overline{L}\big|_{U^{\mathrm{an}}}\right)^{\wedge d}$ から定まる測度に他ならない．そして，これは次の意味で正である：任意に $p \in U^{\mathrm{an}}$ をとり，U^{an} のその近傍 M での局所正則座標 $u_1, \ldots, u_d$ をとる；M 上の滑らかな関数 φ を用いて，M 上 $\frac{1}{\deg_L(X)} c_1\left(\overline{L}\big|_{U^{\mathrm{an}}}\right)^{\wedge d} = (\sqrt{-1})^d \varphi du_1 \wedge d\overline{u_1} \wedge \cdots \wedge du_d \wedge d\overline{u_d}$ と表す；このとき，φ は実数値関数であり正値である．

4.2. 同程度分布の定理

K は代数体とする．A は $\overline{K}$ 上のアーベル多様体で X はその閉部分多様体とする．

いま，K の有限次拡大体 $K' \subset \overline{K}$ で，A および X が K' 上定義可能であるようなものを一つ固定する．すると，$\mathrm{Gal}(\overline{K}/K')$ は $X(\overline{K})$ に作用する．各 $x \in X(\overline{K})$ に対し，その $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K')$-軌道を $O(x)$ で表す．σ は $\overline{K}$ のアルキメデス的素点，つまり，体埋め込み $\overline{K} \hookrightarrow \mathbb{C}$ とする．この埋め込みを通じて，$\mathbb{C}$ 上の代数多様体 $X \otimes_{\overline{K}} \mathbb{C}$ が得られるので，X_σ^{an} でそれに付随する複素解析空間を表す．$X(\overline{K}) \subset X_\sigma^{\mathrm{an}}$ とみなすことによって，任意の $x \in X(\overline{K})$ に対し $O(x) \subset X_\sigma^{\mathrm{an}}$ とみなす．

同程度分布の定理とは，「生成的かつ小な点列は標準測度に関して同程度分布する」という定理である．正確にのべると，次の定理である．

定理 4.5 ([28])**.** 上の記号の下，L は偶で豊富な A 上の直線束とする．$(x_i)_{i\in I}$ は $X(\overline{K})$ の小かつ生成的な網であるとする．このとき，測度としての弱収束

$$\lim_i \frac{1}{\#O(x_i)} \sum_{z\in O(x_i)} \delta_z = \mu_{X_\sigma^{\mathrm{an}},L}$$

が成立する．ただし，δ_z は z に台を持つディラク測度を表す．

4.3. 証明の概略

Zhang の定理の証明の概略を与えよう．証明は帰謬法によって行う．Zhang の定理には反例があると仮定しよう．すると，$\overline{K}$ 上のアーベル多様体 A とその閉部分多様体で捩じれ部分多様体ではないが小点を稠密に持つものが存在する．A を X の安定化群 G_X で割ったものを考えることにより，G_X は自明であると仮定することができる．また，定理 2.7 より，0 次元部分多様体に対しては，それが小点を稠密に持つことと捩じれ部分多様体であることは同値なので，$d := \dim(X) \geq 1$ と仮定してよいことがわかる．さらに，議論を簡単にするために，A や X は K 上定義可能であると仮定し，K 上のモデルを一つ固定しておく．

X の安定化群は自明であることから，自然数 $N \geq 2$ が存在して射

$$\alpha_N : X^N \to A^{N-1}; \quad (x_1, \ldots, x_N) \mapsto (x_1 - x_2, \ldots, x_{N-1} - x_N)$$

が生成的有限であることが証明できる．$Z := X^N$ および $Y := \alpha_N(Z)$ とおき，$\alpha : Z \to Y$ で α_N の制限を表す．これは全射かつ生成的有限である．X は小点を稠密に持つことから，Z もそうであることが分かる．補題 3.2 により，$Z(\overline{K})$ の小かつ生成的な網 $(z_i)_{i\in I}$ が存在する．その像 $(\alpha(z_i))_{i\in N}$ は $Y(\overline{K})$ の生成的な網であり，さらに小でもあることも分かる．$\overline{K}$ の「アルキメデス的素点」σ，すなわち，体埋め込み $\sigma : \overline{K} \hookrightarrow \mathbb{C}$ でを一つとる．A^N 上と A^{N-1} 上の偶で豊富な直線束 M と L をそれぞれとる．$\mu_{Z_\sigma^{\mathrm{an}},M}$ と $\mu_{Y_\sigma^{\mathrm{an}},L}$ をそれぞれ Z_σ^{an} と Y_σ^{an} の標準測度とする．ここで，Z_σ^{an} は Z を σ で係数拡大した $\mathbb{C}$ 上の代数多様体に付随する複素解析空間であり，Y_σ^{an} についても同様である．同程度分布の定理（定理 4.5）より，

$$\lim_i \frac{1}{\#O(z_i)} \sum_{u\in O(z_i)} \delta_u = \mu_{Z_\sigma^{\mathrm{an}},M}, \quad \lim_i \frac{1}{\#O(\alpha(z_i))} \sum_{v\in O(\alpha(z_i))} \delta_v = \mu_{Y_\sigma^{\mathrm{an}},L}$$

が成立する．いま，$\alpha^{\mathrm{an}}: Z_\sigma^{\mathrm{an}} \to Y_\sigma^{\mathrm{an}}$ で α に付随する複素解析空間の間の射を表す．すると，

$$\alpha_*^{\mathrm{an}}\left(\frac{1}{\#O(z_i)}\sum_{u\in O(z_i)}\delta_u\right) = \frac{1}{\#O(\alpha(z_i))}\sum_{v\in O(\alpha(z_i))}\delta_v$$

なので，

$$\alpha_*^{\mathrm{an}}(\mu_{Z_\sigma^{\mathrm{an}},M}) = \mu_{Y_\sigma^{\mathrm{an}},L}$$

が得られる．

V で，X_σ^{an} の非特異部分を表す．すると，V^N は Z_σ^{an} の稠密な開集合でかつ非特異である．そして，$\alpha_*^{\mathrm{an}}(\mu_{Z_\sigma^{\mathrm{an}},M}) = \mu_{Y_\sigma^{\mathrm{an}},L}$ から，V^N 上の (dN,dN)-形式の等式

$$\frac{c_1(\overline{M})^{\wedge dN}|_{V^N}}{\deg_M(Z)} = \frac{(\alpha^{\mathrm{an}}|_{V^N})^* c_1(\overline{L})^{\wedge dN}}{\deg_L(Y)}$$

が得られる．V^N の対角成分上の点 $p\in V^N$ をとる．すると，この等式の左辺は p で正である．(注意 4.4 参照）．一方，$d>1$ かつ V^N の対角成分は一点に潰れるので，$\alpha^{\mathrm{an}}|_{V^N}$ は p で分岐していおり，したがって右辺は p で正にはなりえない．これは矛盾である．以上で Zhangの定理が証明された．

5. 非アルキメデス的幾何

「Zhang の定理の議論を函数体上でも行えないのか？」というのは素朴な疑問であるが，そもそも函数体上では無限素点（アルキメデス的素点）が存在しないので，Zhang の議論のように複素解析空間上の議論に持っていくこと自体ができない．そこで取りえる方法は，代わりにアルキメデス的素点上で「解析空間」を考えてそれを用いて類似の議論を行う，というものである．実際，この方法によって大きな成果が上がっている．

そこで，本節では，代替物として現れる「ベルコビッチ（解析）空間」とその上の Chambert-Loir 測度について解説する．

本節で用いる記号遣いをまとめておく．$\mathbb{K}$ は代数閉体で，非自明な非アルキメデス的絶対値 $|\cdot|_{\mathbb{K}}$ が備わったものとする．さらに，$\mathbb{K}$ はこの絶対値に関して完備であると仮定する．$\mathbb{K}^\circ$ で $\mathbb{K}$ の付値環を表す，すなわち，$\mathbb{K}^\circ = \{a\in\mathbb{K} \mid |a|_{\mathbb{K}}\le 1\}$ である．また，$\mathbb{K}^{\circ\circ}$ でその極大イデアルを表す．剰余体は k であるとする．

5.1. ベルコビッチ空間

本小節では，ベルコビッチ空間について解説する．基本文献として，[1] およびそれに続く Berkovich の論文を挙げておく．また，[8, 11] や [17] にあるベルコビッチ空間に関する概説も参考になるであろう．

X は $\mathbb{K}$ 上の代数多様体とする．各 $p\in X$ に対し，$\kappa(p)$ で p での剰余体を表す．X に付随する**ベルコビッチ（解析）空間** X^{an} は，次のような位相空間である：集合としては，

$$X^{\mathrm{an}} := \{(p,|\cdot|) \mid p\in X \text{ で } |\cdot| \text{ は} \mathbb{K}(p) \text{ の絶対値で } |\cdot|_{\mathbb{K}} \text{ を拡張するもの}\};$$

X^{an} の位相は，写像 $\iota: X^{\mathrm{an}}\to X, (p,|\cdot|)\mapsto p$ が連続かつ任意の（ザリスキ）開集合 $U\subset X$ と任意の正則函数 $g\in\mathcal{O}_X(U)$ に対し函数 $\iota^{-1}(U)\to\mathbb{R}, (p,|\cdot|)\mapsto |g(p)|$ が連続となるような最弱の位相を入れる．

このように定義したベルコビッチ空間の利点は，その位相空間としての性質の良さにある．実際，次の定理が知られている．

定理 5.1. X^{an} はハウスドルフ，局所コンパクトな位相空間である．さらに，X が $\mathbb{K}$ 上固有的であることと X^{an} がコンパクトであることは同値である．

この定理で述べられたようにベルコビッチ空間は「良い」位相空間なので，後で説明するような測度論の展開が可能となる．

次に，$\mathbb{K}$ 上のスキームの射が付随するベルコンビッチ解析空間の間の射を誘導することを見ておこう．$f : X \to Y$ は $\mathbb{K}$ 上のスキームの射とする．任意の $p \in X$ に対し剰余体の間の $\mathbb{K}$ 上の射 $\kappa(f(p)) \hookrightarrow \kappa(p)$ が誘導されるので，$(p, |\cdot|) \in X^{\mathrm{an}}$ に対し $(f(p), |\cdot|_{f(p)})$ を対応させることによって写像 $f^{\mathrm{an}} : X^{\mathrm{an}} \to Y^{\mathrm{an}}$ が定義される．ただし，$|\cdot|_{(f(p)}$ は $|\cdot|$ の $\mathbb{K}(f(p))$ への制限を表す．この f^{an} が連続であることを確かめるのは容易い．

5.1.1. シロフ点

$p \in X(\mathbb{K})$ は $\mathbb{K}$-点とする．このとき，X の構造射から誘導される $\mathbb{K}$-代数の射 $\mathbb{K} \hookrightarrow \kappa(p)$ は同型であるので，$\kappa(p)$ は $|\cdot|_{\mathbb{K}}$ を拡張する絶対値を一意的に持つ．つまり，こうして $p \in X(\mathbb{K})$ に対し自然に $(p, |\cdot|) \in X^{\mathrm{an}}$ が定まり，自然に $X(\mathbb{K}) \subset X^{\mathrm{an}}$ とみなせる．$X(\mathbb{K})$ の点を X^{an} の**古典的点**と呼ぶ．

ベルコビッチ解析空間は，一般には古典的点以外にも多くの点を持っているが，それらのうち，ここで説明する「シロフ点」は非常に重要である．

$\mathbb{K}^{\circ}$ 上の平坦な局所有限表示スキーム $\pi : \mathcal{X} \to \mathrm{Spec}(\mathbb{K}^{\circ})$ は $\mathbb{K}^{\circ}$ 上のモデル，すなわち，$\mathbb{K}^{\circ}$ 上の平坦な局所有限表示スキーム で同型 $\mathcal{X} \otimes_{\mathbb{K}^{\circ}} \mathbb{K} \cong X$ の備わったもの，とする．モデル $\mathcal{X}$ の特殊ファイバーを $\widetilde{\mathcal{X}}$ で表し，その既約成分全体の集合を $\mathrm{Irr}\left(\widetilde{\mathcal{X}}\right)$ で表す．$V \in \mathrm{Irr}\left(\widetilde{\mathcal{X}}\right)$ に対し，$\mathcal{X}$ における C の生成点を ξ_V で表す．

いま，π は ξ_V で滑らかであると仮定する．η で X の生成点を表す．その点での X の剰余体 $\kappa(\eta)$ は X の函数体 であり，さらにそれは $\mathcal{X}$ の函数体に等しい．特に，$\kappa(\eta)$ は $\mathcal{O}_{\mathcal{X},\xi_V}$ の商体であることに注意する．そこで，写像 $|\cdot|_V : \kappa(\eta) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を，任意の $f \in \kappa(\eta)$ に対し $|f|_V = \inf\{|a|_{\mathbf{K}} \in \mathbb{R}_{>0} \mid a \in \mathbb{K}^{\times}, a^{-1}f \in \mathcal{O}_{\mathcal{X},\xi_V}\}$ で定義する．

定理 5.2. π が ξ_V で滑らかであるという仮定の下，$|\cdot|_V$ は $\kappa(\eta)$ の絶対値である．

この定理によって，$(\eta, |\cdot|_V)$ は X^{an} の点である．この点を，V に付随する**シロフ点**と呼び，$[V]$ で表す．モデル $\pi : \mathcal{X} \to \mathrm{Spec}(\mathbb{K})$ が，特殊ファイバー $\widetilde{\mathcal{X}}$ の各既約成分の生成点において滑らかであるとき，$\mathrm{Sh}(\mathcal{X}) := \{[V] \mid V \in \mathrm{Irr}(\widetilde{X})\}$ とおく．

5.2. 標準測度

この小節で，ベルコビッチ空間上の Chambert-Loir 測度を説明する．また，その特別なものである標準測度も説明する．基本文献として，[5, 11] を挙げる．

$\mathbf{K}$ は $\mathbb{K}$ の完備な部分付値体 $\mathbf{K}$ で付値が離散的なものとする．以下で考える $\mathbb{K}$ 上の代数多様体やそれらの間の射，そして代数多様体上の直線束などは，全て $\mathbf{K}$ の $\mathbb{K}$ 内での有限次拡大体上定義可能であるものと仮定する．この仮定は，いちいち述べない．

X は $\mathbb{K}$ 上の固有多様体とし，L はその上の直線束とする．それらの組 (X, L) の $\mathbb{K}^{\circ}$ 上の**固有モデル**とは，$\mathbb{K}^{\circ}$ 上の平坦な固有スキーム $\mathcal{X}$ とその上の直線束の組で，$\mathbb{K}$ 上の同型 $\mathcal{X} \otimes_{\mathbb{K}^{\circ}} \mathbb{K} \cong X$ と同型 $L \cong \mathcal{L}|_X$ が与えられたもののことである．$\mathbb{K}$ 上の平坦な

固有スキーム $\mathcal{X}'$ で特殊ファイバーが被約なものと $\mathbb{K}^\circ$ 上の生成的有限射 $\varphi : \mathcal{X}' \to \mathcal{X}$ が存在することが知られている．X の $\mathbb{K}^\circ$ 上の固有モデル $\mathcal{X}$ に対し，$\mathcal{X}'$ の生成ファイバーを X' で表す．各 $V \in \mathrm{Irr}(\widetilde{\mathcal{X}'})$ に対し，対応する $(X')^{\mathrm{an}}$ のシロフ点を $[V]$ で表す．また，$[V]$ を台とする $(X')^{\mathrm{an}}$ 上のディラク測度を $\delta_{[V]}$ で表す．そこで，$(X')^{\mathrm{an}}$ 上の正則ボレル測度

$$\sum_{V \in \mathrm{Irr}(\widetilde{\mathcal{X}_{\mathbb{K}^\circ}})} \deg_{\varphi^*(\mathcal{L})}(V) \delta_{[V]}$$

を考える．これを，$\varphi : \mathcal{X}' \to \mathcal{X}$ が誘導するベルコビッチ解析空間の間の写像 $\varphi^{\mathrm{an}} : (X')^{\mathrm{an}} \to X^{\mathrm{an}}$ で押し出すことにより，X^{an} 上の正則ボレル測度

$$\frac{1}{\deg(\varphi)} \varphi^{\mathrm{an}}_* \left(\sum_{V \in \mathrm{Irr}(\widetilde{\mathcal{X}'})} \deg_{\varphi^*(\mathcal{L})}(V) \delta_{[V]} \right)$$

が得られる．この測度は，$(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ のみによって定まることが証明されている．これを，固有モデル $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ に付随する **Chambert-Loir 測度**と呼び，$c_1(\mathcal{X}, \mathcal{L})^{\wedge d}$ で表す．ただし，$d := \dim(X)$ とおいている．

次に，標準測度を定義する．L は A 上の偶で豊富な直線束とする．L には剛化を一つ固定しておく．したがって，全ての $n \in \mathbb{N}$ に対し，剛化を保つ同型 $L^{\otimes 4^n} \cong [2]^*(L^{\otimes 4^{n-1}})$ が一意に存在する．各 $n \in \mathbb{N}$ に対し次の条件を満たす $\mathbb{K}^\circ$ 上の平坦固有スキーム $\mathcal{A}_n$ と $\mathcal{A}_n$ 上の直線束 $\mathcal{L}_n$ で，次の条件を満たすものをとる：

(i) 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し，$(\mathcal{A}_n, \mathcal{L}_n)$ は $(A, L^{\otimes 4^{n-1}})$ のモデルである．

(ii) 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し，A の 2 倍準同型射 $[2] : A \to A$ は $\mathbb{K}^\circ$ 上の射 $\phi_n : \mathcal{A}_{n+1} \to \mathcal{A}_n$ に延び，さらに剛化を保つ同型 $L^{\otimes 4^n} \cong [2]^*(L^{\otimes 4^{n-1}})$ は $\mathcal{A}_{n+1}$ 上の直線束の同型 $\mathcal{L}_{n+1} \cong \phi^*(\mathcal{L}_n)$ に延びる．

(iii) 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し，$\mathcal{L}_n$ は相対的ネフ（つまり，特殊ファイバー内の任意の固有曲線との交点数が非負）である．

実際，これは次のようにして構成できる．(A, L) の固有モデル $(\mathcal{A}_1, \mathcal{L}_1)$ で上の (iii) を満たすものは存在する．A のモデル $\mathcal{A}_2$ で A 上の 2 倍準同型射が $\phi_1 : \mathcal{A}_2 \to \mathcal{A}_1$ に延びるものが存在する．$\mathcal{L}_2 := \phi_1^*(\mathcal{L}_1)$ とおけば，これは $[2]^*(L) \cong L^{\otimes 4}$ のモデルである．よって，$n = 1$ では上の条件を満たすものが作れた．あとは，同じ要領で帰納的に構成してやれば，欲しいモデルの列が取れる．

$\mathcal{X}_n$ は閉部分多様体 X の $\mathcal{A}_n$ での閉包とする．いま，先に定義したように，X^{an} 上の Chambert-Loir 測度 $c_1\left(\mathcal{X}_n, \mathcal{L}_n|_{\mathcal{X}_n}\right)^{\wedge d}$ を考える．この体積を 1 に正規化したものを ν_n で表す．すると，X^{an} 上の正則ボレル測度の列 $(\nu_n)_n$ は，ある正則ボレル測度に弱収束することが示される．さらに，その弱極限はモデルの列 $(\mathcal{A}_n, \mathcal{L}_n)_n$ の取り方に依らず A, L, X のみに依って定まることが証明できる．この弱極限測度を L に付随した X^{an} 上の**標準測度**と呼び，$\mu_{X^{\mathrm{an}}, L}$ で表す．

5.3. 非アルキメデス的同程度分布の定理

K が函数体の場合でも，代数体の場合と同様に同程度分布の定理が定式化できる．ただし，ここでは σ としては非アルキメデス的素点をとり，付随する複素解析空間の代

わりにベルコビッチ空間を考える．また，小節 4.2 で出てきた $x \in X(\mathbb{K})$ は X^{an} の古典的点，$O(x)$ は x の $\mathrm{Aut}_{K'}(\overline{K})$ としする．実際に同程度分布の定理が成立することは，Gubler によって示された．

定理 5.3 ([10])**.** 上の記号の下，$(x_i)_{i\in I}$ は $X(\overline{K})$ の小かつ生成的な網であるとする．このとき，測度としての弱収束

$$\lim_i \frac{1}{\#O(x_i)} \sum_{z\in O(x_i)} \delta_z = \mu_{X_\sigma^{\mathrm{an}},L}$$

が成立する．ただし，δ_z は z に台を持つディラク測度を表す．

6. 幾何的ボゴモロフ予想への応用

6.1. Zhang の議論の非アルキメデス版

前節において，Zhang 定理の証明で出てくる複素解析空間上の対象の「ベルコビッチ解析空間上の対象」として代替物となりそうな標準測度を説明し，それに関し同程度分布の定理（定理 5.3）が成立することを述べた．そこで，これらを使って Zhang の議論と同様の議論をしてみよう．すると，小節 4.3 の記号遣いで述べるところの，

$$\alpha_*^{\mathrm{an}}(\mu_{Z_\sigma^{\mathrm{an}},M}) = \mu_{Y_\sigma^{\mathrm{an}},L} \tag{1}$$

が成立するところまでは，同様に議論できる．ただし，ここでは σ は非アルキメデス的素点であり “an” はベルコビッチ空間を表している．

しかし，上の等式から同様に矛盾を導くことは一般にはできない．矛盾を導くには，標準測度の構造をある程度知っておく必要がある．

たとえば，$\mu_{Z_\sigma^{\mathrm{an}},M}$ と $\mu_{Y_\sigma^{\mathrm{an}},L}$ がそれぞれディラク測度の線型結合であると仮定しよう．すると，上の等式 (1) には有益な情報は何もない．実際，Zhang の証明で行った「$Z = X^N$ の対角成分が一点につぶれるから $\cdots$ 」という議論は，これら考えている測度がディラク測度の線型結合の時には，その台が 0 次元なので何の意味も持たない．

そして，実際に標準測度がディラク測度の線型結合になってしまうことは，函数体上では起こり得る．たとえば，A が $\overline{K}$ 上至る所非退化場合には，そうなる．ここで，A が $\overline{K}$ 上**至る所非退化**であるとは，K の有限次拡大体 K' が存在して $\mathfrak{B}'$ で $\mathfrak{B}$ の K' における正規化を表すとき，A が $\mathfrak{B}'$ 上のあるアーベルスキームの幾何的生成ファイバーであることを言う．

もっとも，定アーベル多様体の定点の寄与のがあり得る函数体上では「Zhang の定理」は成立しないので，Zhang の証明と同じ議論がどこかで破綻するのは当然なことである．そこで，Zhang の議論を幾何的ボゴモロフ予想に応用しようとした場合，この予想の中のどの部分になら応用可能かを，きちんと見極める必要が出てくる．

Gubler は，[9] において，「A_σ が総退化であるような σ が存在する」という仮定の下，幾何的ボゴモロフ予想が正しいことを示した[2]．この仮定は，上で出てくる $\mu_{Z_\sigma^{\mathrm{an}},M}$

[2]「幾何的ボゴモロフ予想の部分的解決」という言い方は，歴史的経緯としては正しくない．Gubler のこの結果は，幾何的ボゴモロフ予想が定式化される前の結果である．幾何的ボゴモロフ予想は，Gubler のこの結果に触発されている．なお，Gubler の仮定の下では A の $\overline{K}/k$-跡は自明となり，結論は Zhang の定理と同じものとなる．

と $\mu_{Y_\sigma^{\mathrm{an}},L}$ が「純 dN 次元の多面体的集合のルベーグ測度」になるという形で効いてくる．したがって，$d \geq 1$ であれば[3]，同様に矛盾が得られる[4]．

「Zhang の議論の非アルキメデス版」が破綻するのは，至る所非退化なアーベル多様体に対しそれが無力であったからである．では，**もしこのようなアーベル多様体に対して予想が成立すると仮定すれば**，Zhang の議論で予想は証明できるのだろうか？

実際，Zhang の論法により，重要な定理が証明された．それを述べるために，記号を準備する．$\overline{K}$ 上のアーベル多様体 A に対し，その部分アーベル多様体で至る所非退化であるようなもののうち（包含関係について）最大なものが存在することが示せる．この部分アーベル多様体を $\mathfrak{m}$ で表す．

定理 6.1 ([22]). 上の記号の下，$\mathfrak{m}$ に対し幾何的ボゴモロフ予想が成立するならば，A に対しても成立する．

この定理によって,「Zhang の論法の非アルキメデス版」で到達可能な結果にはたどり着いたと考えている．なお，証明では，標準測度の構造の詳細な解析が必要となる．

6.2. 定理 6.1 以降の進展—（曲線に対する）ボゴモロフ予想の解決

本項の主題である「幾何的ボゴモロフ予想と非アルキメデス的幾何」が出会う場面は，定理 6.1 までである．したがって話は少し逸れることになるが，この定理以降の予想の進展について補足しておく．

A と $\mathfrak{m}$ は定理 6.1 の直前の通りとする．A の $\overline{K}/k$-跡準同型の像を $\mathfrak{t}$ で表すと，$\mathfrak{t} \subset \mathfrak{m}$ であることが知られている．さらに商アーベル多様体 $\mathfrak{m}/\mathfrak{t}$ は至る所非退化かつその $\overline{K}/k$-跡は自明である．

定理 6.2 ([26]). $\mathfrak{m}/\mathfrak{t}$ に対し幾何的ボゴモロフ予想が成立するならば，$\mathfrak{m}$ に対しても（したがって定理 6.1 より A に対しても）幾何的ボゴモロフ予想は成立する．

こうして，アーベル多様体に対する幾何的ボゴモロフ予想は，次の予想に帰着された．

予想 6.3. A は $\overline{K}$ 上のアーベル多様体で，至る所非退化かつその $\overline{K}/k$-跡は自明であるとする．X は A の閉部分多様体とする．このとき，X が小点を稠密に持つならば，それは捻じれ部分多様体である．

さらに，定理 6.2 およびそれに至る議論を利用して，次の定理が示された．

定理 6.4 ([23]). A は $\overline{K}$ 上のアーベル多様体で，X はその既約閉部分多様体とする．$\mathrm{codim}(X) = 1$ または $\dim(X) = 1$ を仮定する．このとき，X が小点を稠密に持つならばそれは特殊部分多様体である．

系 6.5 ([23]). K は函数体のとき，曲線に対するボゴモロフ予想（予想 3.3）は正しい．

この系は定理 6.4 の帰結であり，証明は定理 3.5 の Cinkir によるそれとは異なる．

最後になるが，最近「K が標数 0 のとき，幾何的ボゴモロフ予想が成立する」というプレプリント [7, 4] が公表されている．証明は代数体の場合に帰着させるもので，本稿での議論とは大きく異なるようである．

---

[3] 定理 2.11 より，Zhang のとき同様 $d \geq 1$ と仮定してよい．

[4] 実際は，当時は定理 5.3 は確立されていなかったので，[9] では「トロピカル同程度分布の定理」を証明し「トロピカル標準測度」に対しそれを用いた．

参考文献

[1] V.G. Berkovich, Spectral theory and analytic geometry over nonarchimedean fields. Mathematical Surveys and Monographs, 33. Providence, RI: AMS (1990).

[2] F. A. Bogomolov, Points of Finite Order on Abelian Varieties, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 44:4 (1980), 782–804, 973.

[3] E. Bombieri, W. Gubler, Heights in Diophantine geometry. New Mathematical Monographs, vol. 4. Cambridge University Press, Cambridge (2006).

[4] S. Cantat, Z. Gao, P. Habegger, The geometric Bogomolov conjecture, arXiv:1809.00848.

[5] A. Chambert-Loir, Mesure et équidistribution sur les espaces de Berkovich, J. Reine Angew. Math. 595 (2006), 215–235.

[6] Z. Cinkir, Zhang's conjecture and the effective Bogomolov conjecture over function fields, Invent. Math. 183, No.3 (2011), 517–562.

[7] Z. Gao, P. Habegger, Heights in families of abelian varieties and the Geometric Bogomolov Conjecture, arXiv:1801.05762.

[8] W. Gubler, Tropical varieties for non-archimedean analytic spaces, Invent. Math. 169 (2007), 321–376.

[9] W. Gubler, The Bogomolov conjecture for totally degenerate abelian varieties, Invent. Math. 169 (2007), 377–400.

[10] W. Gubler, Equidistribution over function fields, manuscr. math. 127 (2008), 485–510.

[11] W. Gubler, Non-archimedean canonical measures on abelian varieties, Compos. Math. 146 (2010), 683–730.

[12] S. Kawaguchi, A. Moriwaki, K. Yamaki, Introduction to Arakelov geometry. Algebraic geometry in East Asia (Kyoto, 2001), 1–74, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2002.

[13] S. Lang, Abelian varieties, Springer-Verlag (1983).

[14] S. Lang, Fundamentals of Diophantine Geometry, Springer-Verlag (1983).

[15] L. Moret-Bailly, Métriques permises, Séminaire sur les pinceaux arithmétiques: La Conjecture de Mordell, Astérisque 127 (1985), 29-87.

[16] A. Moriwaki, Relative Bogomolov's inequality and the cone of positive divisors on the moduli space of stable curves, J. of AMS, 11 (1998), 569–600.

[17] J. Nicaise, Berkovich skeleta and birational geometry, arXiv:1409.5229v1.

[18] E. Ullmo, Positivité et discrétion des points algébriques des courbes, Ann. of Math. 147 (1998), 167–179.

[19] K. Yamaki, Geometric Bogomolov's conjecture for curves of genus 3 over function fields, J. Math. Kyoto Univ. 42 (2002), 57–81.

[20] K. Yamaki, Effective calculation of the geometric height and the Bogomolov conjecture for hyperelliptic curves over function fields, J. Math. Kyoto. Univ. 48 (2008), 401–443.

[21] K. Yamaki, Geometric Bogomolov conjecture for abelian varieties and some results for those with some degeneration (with an appendix by Walter Gubler: The minimal dimension of a canonical measure), Manuscr. Math. 142 (2013), 273–306.

[22] K. Yamaki, Strict support of canonical measures and applications to the geometric Bogomolov conjecture, Compositio Mathematica 152 (2016), 997–1040.

[23] K. Yamaki, Non-density of small points on divisors on abelian varieties and the Bogomolov conjecture, J. Amer. Math. Soc. 30 (2017), 1133–1163.

[24] K. Yamaki, Geometric Bogomolov conjecture for nowhere degenerate abelian varieties of dimension 5 with trivial trace, Math. Res. Lett. 24 (2017), no. 5, 1555–1563.

[25] K. Yamaki, Survey on the geometric Bogomolov conjecture. Actes de la Conférence "Non-Archimedean Analytic Geometry: Theory and Practice" 137–193, Publ. Math.

Besançon Algèbre Théorie Nr., 2017/1, Presses Univ. Franche-Comté, Besançon, 2017.

[26] K. Yamaki, Trace of an abelian varieties over function fields and the geometric Bogomolov conjecture, J. Reine Angew. Math. 741 (2018), 133–159.

[27] S. Zhang, Admissible pairing on a curve, Invent. Math. 112 (1993), 171–193.

[28] S. Zhang, Equidistribution of small points on abelian varieties, Ann. of Math. (2) 147 (1998), no. 1, 159–165.

[29] S. Zhang, Gross-Schoen cycles and dualising sheaves, Invent. Math. 179 (2010), 1–73.