トロイダル量子群と可積分系

神保　道夫　(立教大学)*

概　要

共形場理論における運動の保存量の q 変形は, 量子トロイダル代数に付随する転送行列の展開係数として理解することができる. これに基づいて $\mathfrak{gl}_1$ 型の場合に Baxter の Q 作用素が構成され, スペクトルを記述する Bethe 方程式が導かれることを紹介したい.

1. 共形場理論と運動の保存量

はじめに共形場理論における運動の保存量について知られていることを簡単にまとめておこう.

1.1. Local IM

Virasoro代数の包絡環の完備化$UVir$には, 次のような互いに可換な元の系列$\{\mathbb{I}_n\}_{n=1,3,5,\ldots}$が存在する [EY, SY, FF].

$$\mathbb{I}_1=\int_0^{2\pi}\mathbb{T}(u)du\,,\quad \mathbb{I}_3=\int_0^{2\pi}:\mathbb{T}(u)^2:du\,,$$
$$\mathbb{I}_5=\int_0^{2\pi}\Bigl(:\mathbb{T}(u)^3:+\frac{c+2}{12}:\mathbb{T}'(u)^2:\Bigr)du\,,\cdots$$

ここで$\mathbb{T}(u)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}L_ne^{-inu}-c/24$はVirasoro代数

$$[L_m,L_n]=(m-n)L_{m+n}+\frac{c}{12}m(m^2-1)\delta_{m+n,0}\,,\quad [L_m,c]=0\,,$$

のエネルギー運動量テンソルをあらわす. 一般に$\mathbb{I}_n$ は$\mathbb{T}(u)$の微分多項式の積分で与えられ, これらをlocal Integrals of Motion (local IM)と呼ぶ. 古典極限$c\to-\infty$においてVirasoro代数はKdV階層のPoisson構造に移行し, このとき$\{\mathbb{I}_n\}$ はKdV階層のPoisson可換なハミルトニアンになる. そのため可換作用素族 $\{\mathbb{I}_n\}$ を量子可積分系と見て量子KdV系ということもある.

自由場表示においてVirasoro代数は2種のscreening作用素$S_1^{\pm}$の核

$$UVir=\mathrm{Ker}\,S_1^+=\mathrm{Ker}\,S_1^-\,,\quad S_1^{\pm}=\int S_1^{\pm}(z)dz$$

として特徴付けられる. このとき$\{\mathbb{I}_n\}$の生成する可換な部分代数$\mathcal{A}$はもう1組のScreening作用素$S_0^{\pm}$を用いて

$$\mathcal{A}=\mathrm{Ker}\,S_0^+\cap\mathrm{Ker}\,S_1^+=\mathrm{Ker}\,S_0^-\cap\mathrm{Ker}\,S_1^-\ \subset UVir$$

と表される. Screening作用素の組 S_0^+,S_1^+ （およびその dual S_0^-,S_1^-) はそれぞれ量子群 $U_q\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ の正部分の生成元に対応する.

本研究は科研費 (課題番号:16K05183) の助成を受けたものである.
キーワード：共形場理論, 運動の保存量, ベーテ仮説, トロイダル量子群
* 〒171-8501 東京都豊島区西池袋3-34-1　立教大学 理学部
e-mail: jimbomm@rikkyo.ac.jp

1.2. Non-local IM

Bazhanov ら [BLZ] は Screening カレント $S_i^{\pm}(z)$ を変形したカレント $\tilde{S}_i^{\pm}(z)$ の多重積分を用いて, $\mathcal{A}$ に属する可換な元の族をさらに 2 組与えた.

$$\mathbb{G}_\ell^{\pm} = \int\cdots\int \tilde{S}_0^{\pm}(z_1)\tilde{S}_1^{\pm}(z_2)\cdots\tilde{S}_0^{\pm}(z_{2\ell-1})\tilde{S}_1^{\pm}(z_{2\ell})\, g^{\pm}(z_1,\ldots,z_{2\ell})dz_1\cdots dz_\ell\,, \quad (\ell=1,2,3,\ldots)$$

$$[\mathbb{I}_r,\mathbb{I}_s]=0,\ [\mathbb{G}_k^{\pm},\mathbb{G}_l^{\pm'}]=0,\ [\mathbb{I}_r,\mathbb{G}_k^{\pm}]=0 \quad (\forall r,s,k,l).$$

詳細は [BLZ] を参照していただきたい. $\mathbb{G}_\ell^{\pm}$ を non-local IM（および dual non-local IM) とよぶ.

一般に単純リー代数 $\mathfrak{g}$ に対し, $\mathfrak{g}$ 型の W 代数およびその可換部分代数 $\mathcal{A}\mathfrak{g}$ が Screening 作用素の核の共通部分として同様に定義される. この設定で local IM に対する抽象的な存在定理が [FF] で証明されている. しかしその具体形は $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_2$ の時でさえ一般には知られていない.

1.3. ODE/IM 対応

V を中心荷電 c, 最高ウエイト Δ の Virasoro Verma 加群, $V_L=\{v\in V \mid L_0v=(\Delta+L)v\}$ を次数 L の部分空間とする. Local および non-local IM は生成元の無限和を含む表式であるが, Verma 加群上の作用素としては well defined な意味を持っている. Local IM はすべて次数を保存し, 有限次元空間 V_L 上の可換な作用素族になる. したがってその同時固有値を記述することは自然な問題になる. Bazhanov らは次のような対応を発見した（講演者の知る限り証明はないので予想としておく）.

予想 [BLZ2]　V_L 上の local IM の同時固有ベクトルと次の形の 2 階微分作用素との間に 1 対 1 対応がある[1] ：

$$\mathcal{L}=\frac{d^2}{dz^2}+\frac{l(l+1)}{z}+\frac{1}{z}+\sum_{k=1}^{L}\Big(\frac{2}{(z-z_k)^2}+\frac{\gamma_k}{z(z-z_k)}\Big)+\lambda z^{\kappa}$$

ここで $z_1,\ldots,z_L$ は $\mathcal{L}$ の見かけの (非対数的) 特異点とする. さらに, 対応する IM の固有値は $\{z_j\}$ の対称多項式を用いて表すことができる. □

非対数性条件を書き下すと次のような Bethe 仮説に類似の方程式が得られ, これから $\{z_1,\ldots,z_L\}$ が有限個 ($=\dim V_L$ 個) に定まる仕組みになっている.

$$\gamma_k=\frac{\kappa}{z_k}\,,\quad \frac{b^4\Delta}{z_j}+\sum_{k(\neq j)}R(z_j,z_k)=1+b^2\,,$$
$$R(x,y)=\frac{b^4x^2+(2+b^2)(1-2b^2)xy+(1+b^2)(2+b^2)y^2}{(x-y)^3}\,.$$

1.4. q 変形

Bazhanov ら [BLZ] は $U_q\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ の普遍 R 行列を用いて転送行列と Q 作用素を Verma 加群上に定義し, その展開の係数として IM を構成した. 彼らの議論は path ordered product や漸近展開を用いるなどの点で純代数的に必ずしも分かりやすいものではなかった. これは共形場理論が連続系であることに由来する難しさと考えられる. そこで正則化のために q 変形を考えることは自然であろう.

[1] パラメータの対応は次の通りである. $c=1+6(b+b^{-1})^2$, $\Delta=(b+b^{-1})^2/4-b^{-2}(l+1/2)^2$, $\kappa=-2-b^2$.

local および non-local IM の q 変形は文献 [FKSW, KS] において導入された[2]．そこでは $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_n$ の場合に変形 W 代数のカレントおよび変形 Screening カレント [SKAO] を用いて $\mathbb{I}_n, \mathbb{G}_\ell^\pm$ の対応物が多重積分で定義され, 直接計算によってその可換性が示されている．しかし q 変形に対するスペクトル問題にどのようにアプローチするかは未解決問題として残されていた.

この講演では, [FKSW] の q 変形が量子トロイダル代数の転送行列から自然に構成されること, およびそれに基づいて local IM の固有値を記述する Bethe 方程式が導かれることを紹介したい.

2. 量子トロイダル代数

量子アフィン代数はリー代数 $\mathfrak{g}$ 上の 1 変数ローラン多項式環 $\mathfrak{g}[t^{\pm1}]$ の q 変形であった. 量子トロイダル代数は 2 変数ローラン多項式環 $\mathfrak{g}[s^{\pm1}, t^{\pm1}]$ の q 変形である．本稿では $\mathfrak{g}=\mathfrak{gl}_n$ に付随する場合のみを考える.

2.1. 定義

$\mathfrak{gl}_n$ 型の量子トロイダル代数は量子アフィン代数と類似の Drinfeld 型生成元と関係式によって定義される.

まず記号を設定しよう．整数 $n \geqslant 1$ と $i,j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ に対して $\delta^{(n)}_{i,j}=1$ $(i \equiv j \bmod n)$, $=0$ (otherwise) とし,

$$
\begin{aligned}
a_{i,j}(r) &= \frac{[r]}{r} \times \Bigl((q^r+q^{-r})\delta^{(n)}_{i,j} - d^r \delta^{(n)}_{i,j-1} - d^{-r}\delta^{(n)}_{i,j+1} \Bigr) \quad (r \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}), \\
a_{i,j} &= 2\delta^{(n)}_{i,j} - \delta^{(n)}_{i,j-1} - \delta^{(n)}_{i,j+1}
\end{aligned}
$$

とおく．$n \geqslant 2$ のとき $(a_{i,j})$ は $A^{(1)}_{n-1}$ 型カルタン行列である．$q,d \in \mathbb{C}^\times$ を固定して $q_1 = dq^{-1}, q_2 = q^2, q_3 = d^{-1}q^{-1}$ (したがって $q_1q_2q_3=1$) とおき, 構造関数 $g_{i,j}(z,w)$ を次で定める.

$$
n \geqslant 3: \quad g_{i,j}(z,w) = \begin{cases} z - q_1 w & (i \equiv j-1), \\ z - q_2 w & (i \equiv j), \\ z - q_3 w & (i \equiv j+1), \\ z - w & (i \not\equiv j, j\pm1), \end{cases}
$$

$$
n = 2: \quad g_{i,j}(z,w) = \begin{cases} z - q_2 w & (i \equiv j), \\ (z-q_1w)(z-q_3w) & (i \not\equiv j), \end{cases}
$$

$$
n = 1: \quad g_{0,0}(z,w) = (z-q_1w)(z-q_2w)(z-q_3w).
$$

$\mathfrak{gl}_n$ 型量子トロイダル代数 $\mathcal{E}_n = \mathcal{E}_n(q_1,q_2,q_3)$ は $E_{i,k}, F_{i,k}, H_{i,r}$ および可逆元 K_i, C, D $(i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{Z}\backslash\{0\})$ を生成元とする結合代数である．生成カレント

$$
\begin{aligned}
&E_i(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} E_{i,k} z^{-k}, \quad F_i(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} F_{i,k} z^{-k}, \\
&K_i^\pm(z) = K_i^{\pm1}\bar{K}_i^\pm(z), \quad \bar{K}_i^\pm(z) = \exp\Bigl(\pm(q-q^{-1}) \sum_{r>0} H_{i,\pm r} z^{\mp r} \Bigr)
\end{aligned}
$$

[2] q 変形された IM の表式はすべて non-local なのであるが, bookkeeping の便宜上, q 変形後も local, non-local の対応物を同じ名前で呼ぶことにする.

を用いると定義関係式は次のように与えられる.

$$
\begin{aligned}
&C \text{ is central}, \quad K_iK_j = K_jK_i\,, \quad DX(z)D^{-1} = X(qz) \quad (X = E_i, F_i, K_i^{\pm}),\\
&K_iE_j(z)K_i^{-1} = q^{a_{ij}}E_i(z)\,, \quad K_iF_j(z)K_i^{-1} = q^{-a_{ij}}F_i(z)\,,\\
&[H_{i,r}, E_j(z)] = a_{i,j}(r)C^{-(r+|r|)/2}\, z^rE_j(z)\,, \quad [H_{i,r}, F_j(z)] = -a_{i,j}(r)C^{-(r-|r|)/2}\, z^rF_j(z)\,,\\
&[H_{i,r}, H_{j,s}] = \delta_{r+s,0}\cdot a_{i,j}(r)\frac{C^r - C^{-r}}{q-q^{-1}}\,,\\
&[E_i(z), F_j(w)] = \frac{\delta_{i,j}}{q-q^{-1}}(\delta\big(C\frac{w}{z}\big)K_i^+(w) - \delta\big(C\frac{z}{w}\big)K_i^-(z))\,,\\
&[E_i(z), E_j(w)] = 0\,, \quad [F_i(z), F_j(w)] = 0 \quad (i \not\equiv j, j\pm 1)\,,\\
&d_{i,j}g_{i,j}(z,w)E_i(z)E_j(w) + g_{j,i}(w,z)E_j(w)E_i(z) = 0,\\
&d_{j,i}g_{j,i}(w,z)F_i(z)F_j(w) + g_{i,j}(z,w)F_j(w)F_i(z) = 0.
\end{aligned}
$$

ただし $d_{i,j} = d^{\mp 1}$ $(i \equiv j \mp 1, n \geqslant 3)$, $d_{i,j} = -1$ $(i \not\equiv j, n = 2)$,$d_{i,j} = 1$ (otherwise). この他に Serre relation があるがここでは省略する.

$\mathcal{E}_n$ にはつぎのような特徴がある.

- 2つの独立なパラメタ q_1, q_2 に依存する.
- n 個の boson のなす Heisenberg 代数 $\mathcal{H}_n = \langle H_{i,r} \mid i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, r \neq 0\rangle$ を含む.
- 部分代数 $U_q^v\widehat{\mathfrak{sl}}_n = \langle E_i(z),\ F_i(z),\ K_i^{\pm}(z) \mid 1 \leqslant i \leqslant n-1\rangle$ は量子アフィン代数 $U_q\widehat{\mathfrak{sl}}_n$ に同型である. これを vertical subalgebra という.
- 部分代数 $U_q^h\widehat{\mathfrak{sl}}_n = \langle E_{i,0},\ F_{i,0},\ K_{i,0}^{\pm} \mid 0 \leqslant i \leqslant n-1\rangle$ は量子アフィン代数 $U_q\widehat{\mathfrak{sl}}_n$ に同型である. これを horizontal subalgebra という.
- vertical subalgebra と horizontal subalgebra を入れ替える $\mathcal{E}_n$ の自己同型 θ が存在する [Mi]: $\theta(U_q^h\widehat{\mathfrak{sl}}_n) = U_q^v\widehat{\mathfrak{sl}}_n$, $\theta(U_q^v\widehat{\mathfrak{sl}}_n) = U_q^h\widehat{\mathfrak{sl}}_n$.

$\mathcal{E}_n$ は次の Drinfeld 型余積に関して（位相的）ホップ代数の構造を持つ.

$$
\begin{aligned}
\Delta E_i(z) &= E_i(z)\otimes 1 + K_i^-(z)\otimes E_i(C_1z)\,,\\
\Delta F_i(z) &= F_i(C_2z)\otimes K_i^+(z) + 1\otimes F_i(z)\,,\\
\Delta K_i^+(z) &= K_i^+(C_2z)\otimes K_i^+(z)\,,\\
\Delta K_i^-(z) &= K_i^-(z)\otimes K_i^-(C_1z)\,,
\end{aligned}
$$

ただし $C_1 = C\otimes 1, C_2 = 1\otimes C$. $\mathcal{E}_n$ の部分ホップ代数

$$
\mathcal{B}_n = \langle E_{i,k}\,,\ H_{i,-r}\,,\ K_i^{\pm 1},\ C^{\pm 1},\ D^{\pm 1} \mid i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\,,\ k \in \mathbb{Z}\,,\ r > 0\rangle
$$

をボレル部分代数と呼ぶことにする.

2.2. フォック表現

$\mathcal{E}_n$ の非自明な表現のうち最も簡単なのは Fock 表現である [Sa]. $n \geqslant 2$ について $\bar{\alpha}_i$, $\bar{\Lambda}_i$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ をそれぞれ $\mathfrak{sl}_n$ の単純ルート, 基本ウエイト, $(\ ,\ )$ を標準内積, Q をルート格子とする [3]. Fock 表現 $\mathcal{F}_\mu(u)$ は n 個の boson の Fock 空間

$$\mathcal{F}_\mu(u) = \mathbb{C}[H_{i,-r} \mid r > 0, i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}] \otimes \bigoplus_{\beta \in Q + \bar{\Lambda}_\mu} \mathbb{C} e^\beta \quad (\mu \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

の上に頂点作用素を用いて実現される.

$$\begin{aligned}
E_i(z) &\mapsto c_i^* u^{-\delta_{i,0}^{(n)}} \exp\Big(\sum_{r>0} \frac{q^{-r}}{[r]} H_{i,-r} z^r\Big) \exp\Big(-\sum_{r>0} \frac{1}{[r]} H_{i,r} z^{-r}\Big) \otimes e^{\bar{\alpha}_i} z^{H_{i,0}+1}\,, \\
F_i(z) &\mapsto c_i u^{\delta_{i,0}^{(n)}} \exp\Big(-\sum_{r>0} \frac{1}{[r]} H_{i,-r} z^r\Big) \exp\Big(\sum_{r>0} \frac{q^r}{[r]} H_{i,r} z^{-r}\Big) \otimes e^{-\bar{\alpha}_i} z^{-H_{i,0}+1}\,, \\
K_i^\pm(z) &\mapsto \exp\Big(\pm(q - q^{-1}) \sum_{r>0} H_{i,\pm r} z^{\mp r}\Big) \otimes q^{\pm H_{i,0}}\,, \\
C &\mapsto q\,, \quad D \mapsto q^{\mathbf{d}}\,.
\end{aligned}$$

ここで $z^{H_{i,0}} e^\beta = z^{(\bar{\alpha}_i, \beta)} e^\beta$, c_i, c_i^* は正規化定数, $\mathbf{d}$ は $\deg H_{i,-r} = r$, $\deg e^\beta = (\beta,\beta)/2 - (\bar{\Lambda}_\mu, \bar{\Lambda}_\mu)/2$ で定まる Fock 空間の次数作用素をあらわす.

2.3. 転送行列

通常の量子アフィン代数と同様に $\mathcal{E}_n$ はボレル部分代数 $\mathcal{B}_n$ の Drinfeld double となっており, 普遍 R 行列 $\mathcal{R}$ が存在する. そこで転送行列 $\mathbf{T}_\mu(u;\boldsymbol{p})$ を, Fock 空間上での重み付きトレース

$$\mathbf{T}_\mu(u;\boldsymbol{p}) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{F}_\mu(u),1}\Big(\big(\bar{p}^{\mathbf{d}} \prod_{i=1}^{n-1} \bar{p}_i^{-\bar{\Lambda}_i}\big)_1\ \mathcal{R}_{12}\Big) D \quad (\mu \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

で定義しよう. これは $U_q\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ の場合で言えば $\mathbb{C}^2$ でトレースをとった L 行列にあたる. $\bar{p}, \bar{p}_i$ はパラメタであるが, 以下の便宜上

$$\mathbf{p} = (p, p_1, \ldots, p_{n-1}), \quad p = \bar{p} C^{-1}, \quad p_i = \bar{p}_i q^{-\bar{\alpha}_i}\,,$$

と定める. スペクトルパラメタ u^{-1} での展開 (c_N は正規化定数)

$$\mathbf{T}_\mu(u;\boldsymbol{p}) = \sum_{N=0}^\infty u^{-N} c_N \mathbf{G}_{\mu,N}(\boldsymbol{p})$$

の各係数は具体的に計算可能である. 公式を述べるために dressed currents

$$\mathbf{F}_i(z) = F_i(z) \exp\Big(-(q - q^{-1}) \sum_{r>0} \frac{H_{i,r}}{1 - p^r} z^{-r}\Big)$$

を導入しよう.

[3] 正確には $e^{\bar{\alpha}_i} e^{\bar{\alpha}_j} = (-1)^{(\bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}_j)} e^{\bar{\alpha}_j} e^{\bar{\alpha}_i}$ となる twisted root lattice を考える. [Sa] を参照

命題 2.1. *[FJM]*

$$\mathbf{G}_{\mu,N}(\boldsymbol{p}) = \int\cdots\int \prod_{i=1}^{n}\prod_{a=1}^{N}\frac{dx_{i,a}}{2\pi\sqrt{-1}\,x_{i,a}} \quad \prod_{1\leqslant a\leqslant N}^{\curvearrowright}\mathbf{F}_1(x_{1,a})\cdots\prod_{1\leqslant a\leqslant N}^{\curvearrowright}\mathbf{F}_n(x_{n,a})$$
$$\times\frac{\prod_{i=1}^{n}\prod_{a<b}\Theta_p(x_{i,b}/x_{i,a},q_2x_{i,b}/x_{i,a})}{\prod_{i=1}^{n-1}\prod_{a,b}\Theta_p(q_3^{-1}x_{i+1,b}/x_{i,a})\cdot\prod_{a,b}\Theta_p(q_1x_{1,b}/x_{n,a})}$$
$$\times\prod_{i=1}^{n}\prod_{a=1}^{N}x_{i,a}^{N-2a+1}\cdot\vartheta_\mu\Bigl(\prod_{a=1}^{N}x_{1,a},\ldots,\prod_{a=1}^{N}x_{n,a};\boldsymbol{p}\Bigr).$$

ここで $\Theta_p(z)=(z;p)_\infty(pz^{-1};p)_\infty(p;p)_\infty$, $(z;p)_\infty=\prod_{j\geqslant 0}(1-zp^j)$,

$$\vartheta_\mu(z_1,\ldots,z_n;\boldsymbol{p})=\sum_{\beta\in\bar{Q}+\bar{\Lambda}_\mu}p^{(\beta,\beta)/2}\prod_{s=1}^{n-1}p_s^{-(\beta,\bar{\Lambda}_s)}\prod_{i=1}^{n}z_i^{(\beta,\bar{\alpha}_i)}.$$

積分路は$|q_1|,|q_3|<1$の時は単位円$|x_{i,a}|=1$, 一般にはそこからの解析接続とする. □

さて $\mathfrak{gl}_n$ 型代数 $\mathcal{E}_n$ の n を上付きの添え字で明示して書こう. $\mathbf{G}^{(n)}_{\mu,N}(\boldsymbol{p})$ は $\mathcal{E}_n$ の (opposite)Borel 部分代数の完備化の元であり, 特に Fock 空間 $\mathcal{F}^{(n)}_\nu(v)$ に働くが, より詳しく各 momentum e^β が一定のセクターに作用している. 各セクターは n 個のボゾンの Fock 空間であり, ベクトル空間としては $\mathcal{E}_1$ の Fock 空間の n 個のテンソル積 $\mathcal{F}^{(1)}(v_1)\otimes\cdots\otimes\mathcal{F}^{(1)}(v_n)$ と同一視することができる. したがって $\mathcal{E}_1$ から作られた $\mathbf{G}^{(1)}_M(p)$ もそこに作用する. 上記の積分表示を [FKSW] と比較することにより次の結論を得る.

命題 2.2. *[FJM]* （パラメータを適当に同一視すると）各セクター上の作用素として $\mathbf{G}^{(n)}_{\mu,N}(\boldsymbol{p})$ は *[FKSW]* の *non-local IM,* $\mathbf{G}^{(1)}_M(p)$ は *local IM* と一致する. □

なお $\mathcal{R}$ を $\mathcal{R}_{21}^{-1}$ に置き換えることにより, dual non-local IM が構成される.

2.4. $(\mathfrak{gl}_m,\mathfrak{gl}_n)$ **双対性**

local IM, non-local IM が転送行列の係数として実現されることがわかったので, それぞれの間の可換性は自明となる. しかし local IM と non-local IM が可換であることはそれだけでは説明がつかず, 今のところ直接計算に頼るしかない. この可換性は, 量子アフィン代数の場合に知られている双対性 [MTV] のトロイダル代数 $\mathcal{E}_n$, $\mathcal{E}_1$ への拡張であると解釈できる. より一般に次の結果が成り立つ.

定理 2.3. *[FJM2]* 次のような加群 $\mathbb{F}_{mn}$ を構成することができる.

- $\mathbb{F}_{mn}$ は $\mathcal{E}_m(q_1,q_2,q_3)$ 加群として $\mathcal{F}_{s_0}(c_0u_0)\otimes\cdots\otimes\mathcal{F}_{s_{n-1}}(c_{n-1}u_{n-1})$ の形の *Fock* 表現の直和である. 同時に $\mathcal{E}_n(\check{q}_1,q_2,\check{q}_3)$ 加群 として $\mathcal{F}_{s_0}(c'_0\check{u}_0)\otimes\cdots\otimes\mathcal{F}_{s_{n-1}}(c'_{m-1}\check{u}_{m-1})$ の形の *Fock* 表現の直和である.
- $U_q^v\widehat{\mathfrak{gl}}_m$ は *level* n, $U_q^v\widehat{\mathfrak{gl}}_n$ は *level* m で働く（下図参照*)*,
- $[U_q^v\widehat{\mathfrak{gl}}_m, U_q^v\widehat{\mathfrak{gl}}_n]=0$,
- パラメータ $\boldsymbol{p},\check{\boldsymbol{p}}$, スペクトルパラメータ $(u_0,\ldots,u_{n-1})$, $(\check{u}_0,\ldots,\check{u}_{m-1})$ の間に関係

$$\bar{p}=\check{q}_1^m,\quad \bar{\check{p}}=q_1^n,\quad \bar{p}_i=\frac{\check{u}_i}{\check{u}_{i-1}}\quad(1\leqslant i\leqslant m-1),\quad \bar{\check{p}}_l=\frac{u_l}{u_{l-1}}\quad(1\leqslant l\leqslant n-1)$$

があるとき, 互いの IMは可換である：

$$[\mathbf{G}^{(m)}_{\mu,\ell}(\boldsymbol{p}), \mathbf{G}^{(n)}_{\nu,\ell'}(\boldsymbol{p}^\vee)] = 0.$$

□

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{E}_m(q_1,q_2,q_3) & & & & \mathcal{E}_n(q_1^\vee,q_2,q_3^\vee) \\
\bigcup & & & & \bigcup \\
U_q^v\widehat{\mathfrak{gl}}_m & \xrightarrow{\text{level } n} & \mathbb{F}_{mn} & \xleftarrow{\text{level } m} & U_q^v\widehat{\mathfrak{gl}}_n
\end{array}$$

non-local IM は ホップ代数 $\mathcal{E}_n$ の (dressed) screening カレントの多重積分で与えられるわけであるが, 現在の場合 local IM も別のホップ代数 $\mathcal{E}_1$ の non-local IM となっている. これは A 型の特殊事情であると思われる. A 型以外の場合 W 代数の q 変形が [FR] で提案されているが local IM をどう定義すべきか講演者にはわからない.

3. Bethe 仮設

この節では $\mathfrak{gl}_1$ 型量子トロイダル代数の Fock 表現のテンソル積

$$W = \mathcal{F}(v_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}(v_M)$$

において local IM の固有値を調べよう. スペクトルパラメタ v_i は generic とする.

なお楕円パラメタ p が 0 の場合, local IM は, $M=1$ のとき Macdonald 作用素の自由場表示に他ならない. $M>1$ の場合については [AFHKSY],[Oh] などの研究がある.

3.1. TQ 関係式

現在の場合通常の代数的 Bethe 仮設法を適用することは難しいので, Baxter の Q 作用素の方法を用いる. [BLZ] は $U_q\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ の場合に Q 作用素がボレル部分代数の表現に対する転送行列であることを示した. その後この方法は一般の量子アフィン代数に拡張された [HJ, FH]. ここで用いるのはそのトロイダル代数版であり, 次のような加群の構成が鍵になる.

定理 3.1. *[FJMM] Borel部分代数 $\mathcal{B}$ の表現 $M(u)$, $N(u)$ が存在し, 表現の Grothendieck* 環において等式

$$[N(u)][M(u)] = \prod_{i=1}^{3}[M(q_i^{-1}u)] + \Big(\prod_{i=1}^{3}[M(q_iu)]\Big)\{-1\}$$

が成り立つ. ここで $V\{-1\}$ は $[V]$ の次数シフト *(*最高ウエイトの次数を 1 とする*)* を表す. □

表現 $M(u)$, $N(u)$ に対応する転送行列をそれぞれ

$$\mathcal{T}(u;p) = \mathrm{Tr}_{N(u),1}\Big(\big(\bar{p}^{\mathbf{d}}\big)_1\, \mathcal{R}_{12}\Big)D\,, \quad \mathbf{Q}(u;p) = \mathrm{Tr}_{M(u),1}\Big(\big(\bar{p}^{\mathbf{d}}\big)_1\, \mathcal{R}_{12}\Big)D\,,$$

とする. これらは互いに可換であって, 定理からただちに次の TQ 関係式が得られる.

$$\mathcal{T}(u;p)\mathbf{Q}(u;p)=\prod_{i=1}^{3}\mathbf{Q}(q_i^{-1}u;p)+p\prod_{i=1}^{3}\mathbf{Q}(q_iu;p)\,,\quad p=\bar{p}C^{-1}\,.$$

よく知られた $U_q\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ の TQ 関係式

$$T(u)Q(u)=Q(q^{-2}u)+Q(q^2u)$$

と比べると, 関係式が非線形であること, また左辺の $\mathcal{T}(u;p)$ は (IM の母関数である本来の) 転送行列 $\mathbf{T}(u;p)$ と異なること, に注意していただきたい.

3.2. IM のスペクトル

表現 $M(u)$ の著しい性質の一つとして, 無限次元であるにもかかわらず生成元 $K^{\pm}(z)$ の固有値がただ一つ（すなわち $K^{\pm}(z)$ からスカラー作用素を引いたものがべき零）となることがある. このべき零性の反映として次の正則性が成り立つ.

補題 3.2. スカラー関数 $f(u),g(u)$ が存在して $f(u)\mathbf{Q}(u;p)$, $g(u)\mathcal{T}(u;p)$ は W の各ベクトル上で u について多項式である.

正則性と TQ 関係式から Bethe 方程式が導かれる.

定理 3.3. *[FJMM, FJM]* 転送行列 $\mathbf{T}(u;p)$ の次数 N の固有ベクトル $w\in W$ に対し, u^{-1} の N 次多項式 $Q(u;p)=\prod_{i=1}^{N}(1-t_i/u)$ が存在して以下が成り立つ.

(1) $Q(u;p)$ の根 $\{t_i\}$ は *Bethe* 方程式を満たす：

$$p\prod_{j=1}^{M}\frac{t_i-v_j}{t_i-q_2^{-1}v_j}\prod_{j=1}^{N}\frac{(q_1t_i-t_j)(q_2t_i-t_j)(q_3t_i-t_j)}{(q_1^{-1}t_i-t_j)(q_2^{-1}t_i-t_j)(q_3^{-1}t_i-t_j)}=-1,\qquad i=1,\dots,N\,. \quad (3.1)$$

(2) 転送行列 $\mathbf{T}(u;p)$ の対応する固有値を $T(u;p)$ であらわすと

$$T(u;p)=\varphi(u)\frac{Q(q_2^{-1}u;p)}{Q(u;p)}\sum_{\lambda\in\mathcal{P}}\prod_{(a,b)\in\lambda}\mathfrak{a}(q_3^aq_1^bq_2u;p)\,.$$

ただし

$$\mathfrak{a}(u;p)=p\prod_{j=1}^{M}\frac{1-v_j/u}{1-q_2^{-1}v_j/u}\prod_{s=1}^{3}\frac{Q(q_su;p)}{Q(q_s^{-1}u;p)}\,,\quad p=\bar{p}q^{-M}\,,$$

$$\varphi(u)=\prod_{j=1}^{M}\exp\Bigl(\sum_{r>0}\frac{1}{r}\frac{1-q_2^{-r}}{(1-q_1^r)(1-q_3^r)}\bigl(\frac{v_j}{u}\bigr)^r\Bigr)$$

であり, λ はすべての分割を, (a,b) は分割 λ のノードをわたる. □

$T(u;p)$ を u^{-1} で展開することにより, local IM $\mathbf{G}_N(p)$ の固有値 $G_N(p)$ は Bethe 根の対称式で表される.

$$G_1(p)=C_1\mathbf{w}_1\,,\quad G_2(p)=C_2\mathbf{w}_2+\frac{1}{2!}C_{1,1}\mathbf{w}_1^2\,,$$
$$G_3(p)=C_3\mathbf{w}_3+C_{2,1}\mathbf{w}_2\mathbf{w}_1+\frac{1}{3!}C_{1,1,1}\mathbf{w}_1^3\,,\cdots$$

ここで

$$\mathbf{w}_r = \sum_{j=1}^{N} t_j^r - \frac{q_3^r q_1^r}{(1-q_3^r)(1-q_1^r)} \sum_{k=1}^{n} v_k^r\,,$$

係数 C_ℓ は p, q_i のみの関数である (たとえば $C_1 = (pq_1q_3;p)_\infty/(p;p)_\infty$).

なお $\mathfrak{gl}_n$ の場合に TQ 関係式がどうなるべきかは代数 $\mathcal{E}_n$ の定義関係式から容易に想像がつく.

予想 $\mathcal{E}_n$ については n 個の $\mathcal{T}_i(u)$, $\mathbf{Q}_i(u)$ $(i=0,\ldots,n-1)$ が定義されて次を満たす

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_i(u)\mathbf{Q}_i(u) &= a_i(u)\mathbf{Q}_{i-1}(q_1^{-1}u)\mathbf{Q}_i(q_2^{-1}u)\mathbf{Q}_{i+1}(q_3^{-1}u)\\ &\quad + p_i d_i(u)\mathbf{Q}_{i-1}(q_3u)\mathbf{Q}_i(q_2u)\mathbf{Q}_{i+1}(q_1u)\,, \quad i=0,1,\ldots,n-1.\end{aligned}$$

(正規化の係数 $a_i(u), d_i(u)$ は考えている系から定まる.) □

時間が許せばこの式と ODE/IM 対応との関係についても触れたい.

3.3. 終わりに

量子トロイダル代数はゲージ理論との関わりが起動力となって近年活発に研究されている. 可積分系の立場からは, 運動の保存量は量子トロイダル代数を対称性とする一つの具体例として興味深い. しかしエンドユーザの立場から見ると, 量子アフィン代数の場合にくらべ, 量子トロイダル代数はまだまだ未開発で使える道具が少ないと感じられる. A 型以外の場合も含めてこの方面の研究がさらに進むことを期待したい.

本講演は [FJMM, FJM, FJM2] の内容に基づいている. この場を借りて共同研究をしていただいた Boris Feigin, Evgeny Mukhin, 三輪哲二の諸氏に感謝します.

参考文献

[AFHKSY] H. Awata, B. Feigin, A. Hoshino, M. Kanai, J. Shiarishi and S. Yanagida, *Notes on Ding-Iohara algebra and AGT conjecture*, RIMS kokyuroku **1765** (2011) 12–32

[BLZ] V. Bazhanov, S. Lukyanov and A. Zamolodchikov, *Integrable structure of conformal field theory, quantum KdV theory and thermodynamic Bethe ansatz*, Commun. Math. Phys. **177** (1996) no.2, 381–398; *ibid.*(1997) no.2, 247–278; **200** (1999) no.2, 297–324

[BLZ2] V. Bazhanov, S. Lukyanov and A. Zamolodchikov, *Spectral determinants for Schrödinger equation and Q-operators of conformal field theory*, J. Stat. Phys. **102** (2001) no.3-4, 567–576; *Higher level eigenvalues of Q-operators and Schrödinger equation*, Adv. Theor. Math. Phys. **7** (2003) no.4, 711–725

[BL] V. Bazhanov and S. Lukyanov, *Integable structure of quantum field theory: classical flat connections versus quantum stationary states*, JHEP **09** (2014) 147

[EY] T. Eguchi and S.-K. Yang, *Deformations of conformal field theories and soliton equations*, Phys. Lett. **B224** (1989) no.4, 373–378

[FF] B. Feigin and E. Frenkel, *Integrals of motion and quantum groups*, Lecture Notes in Math. **1620** 349–418

[FJMM] B. Feigin, M. Jimbo, T. Miwa, and E. Mukhin, *Finite type modules and Bethe ansatz for the quantum toroidal* $\mathfrak{gl}_1$, Commun. Math. Phys., **356**, (2017), no.1, 285-327

[FJM] B. Feigin, M. Jimbo, and E. Mukhin, *Integrals of motion from quantum toroidal algebras, J.Phys.A: Math. Theor.* **50** (2017) no.46, 464001, 28pp

[FJM2] B. Feigin, M. Jimbo, and E. Mukhin, *The* $(\mathfrak{gl}_m, \mathfrak{gl}_n)$*-duality in the quantum toroidal setting*, arXiv:1801.08433

[FH] E. Frenkel and D. Hernandez, *Baxter's relations and spectra of quantum integrable models*, Duke Math. J. **164** (2015) no.12, 2407–2460

[FKSW] B. Feigin, T. Kojima, J. Shiraishi and H. Watanabe, *The integrals of motion for the deformed Virasoro algebra*, arXiv:0705.0427v2

[FKSW1] B. Feigin, T. Kojima, J. Shiraishi and H. Watanabe, *The integrals of motion for the deformed W algebra* $W_{q,t}(\widehat{\mathfrak{sl}}_N)$, arXiv:0705.0627v1

[FR] E. Frenkel and N. Reshetikhin, *Deformations of W-algebras associated with simple Lie algebras*, Commun. Math. Phys. **197** (1998) no.1, 1–32

[HJ] D. Hernandez and Michio Jimbo, *Asymptotic representations and Drinfel'd rational fractions*, Compos. Math. **148** (2012) no.5, 1593–1623

[KS] T. Kojima and J. Shiraishi, *The integrals of motion for the deformed W algebra* $W_{q,t}(\widehat{\mathfrak{sl}}_N)$ *II: Proof of the commutation relations*, Commun. Math. Phys. **283** (2008), no.3, 795–851

[Mi] K. Miki, *Toroidal braid group action and an automorphism of toroidal algebra* $U_q(\mathfrak{sl}_{n+1,tor})$ $(n \geqslant 2)$, Lett. Math. Phys. **47** (1999), no.4, 365–378

[MTV] E. Mukhin, V. Tarasov and A. Varchenko, *Bispectral and* $(\mathfrak{gl}_N, \mathfrak{gl}_M)$ *dualities*, Funct. Anal. Other Math. **1** (2006), no.1, 47–69

[Oh] Y. Ohkubo, *Kac determinant and singular vector of the level N representation of Ding-Iohara-Miki algebra*, Lett. Math. Phys. **109** (2019) no.1, 33-60

[Sa] Y. Saito, *Quantum toroidal algebras and their vertex representations*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **34** (1998), no.2, 155–177

[SKAO] J. Shiraishi, H. Kubo, H. Awata and S. Odake, *Quantum deformation of the Virasoro algebra and the Macdonald symmetric functions*, Lett. Math. Phys. **38** (1996) no.1, 647–666

[SY] R. Sasaki, I. Yamanaka, *Virasoro algebra, vertex operators, quantum Sine- Gordon and solvable Quantum Field theories*, Adv. Stud. in Pure Math. **16** (1988), 271–296