Navier-Stokes 方程式における非粘性極限問題と Prandtl 境界層展開

前川 泰則 (京都大学)*

概 要

非自明な物理境界を持つ領域を流れる高 Reynolds 数流体の研究において、境界層は重要なテーマの一つである。その中でも Prandtl の境界層理論は最も古典的かつ基本的な位置を占めるが、その数学的な正当化については未解決な問題も多く、現在も活発に研究が行われている。本講演ではシア型境界層の安定性・不安定性を中心に、Navier-Stokes 方程式における Prandtl 境界層展開の数学解析について概観したい。

1. 序

水などの非圧縮性粘性流体の運動は非線形偏微分方程式である Navier-Stokes 方程式により記述され、理学・工学の各分野から盛んに研究されている。Navier-Stokes 方程式は粘性係数をはじめとして一般に種々の物理パラメータを含んでいるため、解挙動がこうしたパラメータに対してどのように依存するかという問題は応用・理論の両面から基本的かつ重要な問題である。流体の動粘性係数を ν 、代表的な長さのスケールを L 、速度のスケールを U としたとき、無次元パラメータである Reynolds 数 $Re = \frac{LU}{\nu}$ が定義される。Reynolds 数は流体力学において最も基本的な無次元量であり、流体運動の複雑さや規模の指標を与えるものである。水などの身近な流体の動粘性係数は小さい場合が多く¹、そのため高 Reynolds 数の流体を解析することは現実の流体運動を理解する上で極めて重要である。この問題は、数学的には Navier-Stokes 方程式の粘性零極限あるいは Reynolds 数無限大の極限における解の漸近挙動の問題として定式化することができる。このような極限は、Navier-Stokes 方程式の最高階微分の項を形式的に消すことになり、偏微分方程式における特異極限問題の典型である。流体領域が全空間の場合など、非自明な境界が無い場合は、初期値等の付与データが十分な滑らかさを有していれば非粘性極限を（少なくとも時間局所的に）論じることは難しくない。しかしながら、固定壁などの非自明な境界がある場合には非粘性極限において一般に境界層が生じ、境界層に潜在する高周波不安定性により、その数学解析には多くの困難が伴う。1904年に L. Prandtl [33] によって境界層方程式（Prandtl 方程式）が導出され、Prandtl 方程式の可解性については1960年代に O. A. Oleinik [27, 28, 29, 30] らによる基礎理論が構築されていたが、Prandtl 境界層展開²について数学的に厳密な結果が得られるようになってきたのは比較的最近になってからである。特に2000年前後から Prandtl 境界層展開の数学理論は大きく発展してきた。本稿では、Navier-Stokes 方程式の非粘性極限問題について紹介し（第2節）、近年特に数学理論が進展したシア型境界層の安定性・不安定性について述べる（第3節）。

本研究は科研費(課題番号:16H06339, 16H03947, 17H02853, 17K05320)の助成を受けたものである。

キーワード: Navier-Stokes 方程式, 非粘性極限, Prandtl 境界層展開

* 〒606-8502 京都市左京区北白川追分町 京都大学大学院理学研究科

e-mail: maekawa@math.kyoto-u.ac.jp

¹ 20°Cの水の場合、およそ $1.0 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ 。

² Prandtl 方程式の可解性と Prandtl 境界層展開の可解性は、関連しているが区別すべきものである。

2. 2次元半空間 Navier-Stokes 方程式の非粘性極限問題

本節では、Navier-Stokes 方程式の非粘性極限問題についてその概略を述べる．簡単のため流体領域は2次元半空間とする．より一般の領域や3次元の場合でも問題の定式化ができるが，粘着境界条件下での数学的な結果はまだ限られている．いずれにせよ，最も単純化された2次元半空間の枠組みをまず考察することが重要である．非圧縮性粘性流体に対する Navier-Stokes 方程式は以下で与えられる．

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u^\nu + u^\nu \cdot \nabla u^\nu - \nu \Delta u^\nu + \nabla q^\nu = g^\nu, \quad t > 0, \quad (x, y) \in \Omega, \\ \operatorname{div} u^\nu = 0, \quad t \geq 0, \quad (x, y) \in \Omega, \\ u^\nu|_{\partial\Omega} = 0, \quad t > 0, \\ u^\nu|_{t=0} = u_0^\nu, \quad (x, y) \in \Omega. \end{array} \right. \quad (\text{NS}_\nu)$$

ここで，流体領域 Ω は $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ (但し $\mathbb{R}_+ = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$)，あるいは接方向変数 x には周期境界条件を課して $\Omega = \mathbb{T} \times \mathbb{R}_+$ ， $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ とする．未知関数は流体の速度場 $u^\nu = (u_1^\nu(x, y, t), u_2^\nu(x, y, t))$ 及び圧力場 $q^\nu = q^\nu(x, y, t)$ であり， $g^\nu = (g_1^\nu(x, y, t), g_2^\nu(x, y, t))$ は外力， $u_0^\nu = (u_{0,1}^\nu(x, y), u_{0,2}^\nu(x, y))$ は初期速度場である．微分記号はそれぞれ $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$ ， $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$ ， $\partial_y = \frac{\partial}{\partial y}$ ， $\nabla = (\partial_x, \partial_y)$ ， $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$ ， $\operatorname{div} u^\nu = \partial_x u_1^\nu + \partial_y u_2^\nu$ であり，また， $u^\nu \cdot \nabla = u_1^\nu \partial_x + u_2^\nu \partial_y$ である．正定数 ν は流体の動粘性係数を表し， $\operatorname{div} u^\nu = 0$ は流体の非圧縮性を意味する．境界 $\partial\Omega$ (つまり $y = 0$) での境界条件は古典的な粘着境界条件であり，流体が固体壁上では流れないことを意味する．

ここで，よく使われる関数空間について先に定義しておく．

$$L_\sigma^2(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega)^2 \mid \operatorname{div} f = 0 \text{ in } \Omega, \quad f_2|_{y=0} = 0\}.$$

ただし， $\operatorname{div} f = 0$ や $f_2|_{y=0} = 0$ はそれぞれ超関数及び generalized trace の意味で定義されている． $W^{m,p}(\Omega)$ ($m \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$) や $H^s(\Omega)$ ($s \geq 0$) は通常 Sobolev 空間を表し，特に $W_0^{1,2}(\Omega) = \{f \in W^{1,2}(\Omega) \mid f|_{y=0} = 0\}$ とおく．また，直交射影作用素 $\mathbb{P} : L^2(\Omega)^2 \rightarrow L_\sigma^2(\Omega)$ を Helmholtz 射影作用素という．

各正定数 ν に対して，2次元 Navier-Stokes 方程式 (NS_ν) には，例えば L^2 ノルムが有限な初期値 u_0^ν と十分良いクラスの外力 g^ν に対して，時間大域的かつ一意的に解が存在することが知られている．さらに，例えば $g^\nu = 0$ の場合，放物型方程式の平滑化効果により解は正の時刻で無限回微分可能となる．非粘性極限問題とは「 $\nu \rightarrow 0$ における u^ν の挙動を記述せよ」という問題である．そこで方程式 (NS_ν) において形式的に $\nu = 0$ とすると次の Euler 方程式を得る．

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u^0 + u^0 \cdot \nabla u^0 + \nabla q^0 = g^0, \quad t > 0, \quad (x, y) \in \Omega, \\ \operatorname{div} u^0 = 0, \quad t \geq 0, \quad (x, y) \in \Omega, \\ u_2^0|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \geq 0, \\ u^0|_{t=0} = u_0^0, \quad (x, y) \in \Omega. \end{array} \right. \quad (\text{E})$$

ここで，Euler 方程式の境界条件はもはや粘着境界条件ではなく，境界での流体の流入が無いことを意味する non-penetration condition となることに注意する．実際，粘着境界条件は Euler 方程式に対しては過剰な条件となり適切でない．Euler 方程式 (E) も

また、十分良いクラスの初期値 u^0 と外力 g^0 に対して時間大域的に一意可解であることが知られている。例えば $g^0 = 0$ で u^0 が C^1 級のクラスに埋め込まれるような Sobolev 空間に属していればよい（この点については本稿の主眼ではないので詳細は割愛する³⁾。Navier-Stokes 方程式 (NS $_\nu$) も Euler 方程式 (E) も十分高い Sobolev クラスの正則性をもつ付与データに対して一意的に可解であるので、 u^ν が $\nu \rightarrow 0$ の極限で u^0 に何らかの意味で収束すると期待したい。しかしながら、この問題は (NS $_\nu$) の最高階項 $\nu \Delta u^\nu$ の零極限を考える特異極限問題であるので、解が $\nu \rightarrow 0$ でつながる保証はない。特に、(NS $_\nu$) の粘着境界条件と (E) の境界条件の不一致を反映した境界層の出現とその潜在的な不安定性により、数学解析には一般に大きな困難を伴う。以下、非粘性極限の問題設定についてももう少し正確に述べる。なお、外力 g^ν と g^0 、初期値 u_0^ν と u_0^0 等の付与データは古典解の存在を保証する程度に十分滑らかで解の L^2 ノルムが有限となる程度には空間減衰しているものとする。

非粘性極限問題では、どのような位相で u^ν から u^0 への収束を議論するのかが技術的な取り扱いが変わり、既存の多くの研究もこの観点から次の二つに分けられる：

- (i) L^2 収束性 (ii) L^∞ 収束性（もしくはそれに準ずる位相での収束性）。

問題 (i) は次のように述べられる： ν に依存しないある正数 $T > 0$ が存在して、

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \sup_{0 < t < T} \|u^\nu(t) - u^0(t)\|_{L^2(\Omega)} = 0 \quad (2.1)$$

が成り立つか。この問題は Navier-Stokes 方程式および Euler 方程式の古典解が満たすエネルギー等式

$$\|u^\nu(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\nu \int_0^t \|\nabla u^\nu(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds = \|u_0^\nu\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2 \int_0^t \int_\Omega g^\nu \cdot u^\nu dx ds, \quad (2.2)$$

$$\|u^0(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|u_0^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2 \int_0^t \int_\Omega g^0 \cdot u^0 dx ds, \quad (2.3)$$

を考慮しても自然な問題設定である。勿論、(2.1) を考察する際は、外力 g^ν や初期値 u_0^ν が十分強い位相で g^0, u_0^0 に収束することを予め仮定しておく。

一方、問題 (ii) は (i) の (2.1) での L^2 位相を単に $L^\infty(\Omega)$ にするわけではない。実際、(NS $_\nu$) の境界条件と (E) の境界条件の不一致により、 u_1^ν が u_1^0 に L^∞ ノルムで収束することは一般に成り立たない。つまり、 L^∞ 位相での収束の議論では (NS $_\nu$) と (E) の境界条件の不一致を反映した流れの構造（境界層）を理解する必要がある、原理的に (i) よりも高次の漸近展開を議論することになる。境界近傍において粘性の影響が真に残り続ける境界層の概念は L. Prandtl [33] によって明確に提示され⁴、境界層を記述する方程式（Prandtl 方程式）が形式的に導出された。その概略は、境界層の厚さを δ とすると境界層の構造を持つ流れに対しては ∂_y が δ^{-1} の増大度を与えると見積もられ、非圧縮性条件から境界層領域で $u_2^\nu \sim O(\delta)$ 、さらに (NS $_\nu$) の第 1 式から $\delta = \sqrt{\nu}$ が形式的に得られる。そこで解 u^ν が境界近傍で

$$(U_1^P(x, \frac{y}{\sqrt{\nu}}, t), \sqrt{\nu} U_2^P(x, \frac{y}{\sqrt{\nu}}, t))$$

³ Navier-Stokes 方程式や Euler 方程式の数学解析に関する入門書（和書）については [11, 26, 39] などがある。なお、流体力学の境界層の専門書としては洋書 [37] が有名である。

⁴ 正確には、L. Prandtl が [33] で考察したのは定常問題である。

という形で近似されるとして (NS_ν) に代入し、形式的に $\nu \rightarrow 0$ とすれば、次の Prandtl 方程式が得られる：

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t U_1^P + U_1^P \partial_x U_1^P + U_2^P \partial_Y U_1^P - \partial_Y^2 U_1^P = -\partial_x q^0 + G_1^P, \quad t > 0, (x, Y) \in \Omega, \\ \partial_x U_1^P + \partial_Y U_2^P = 0, \quad t \geq 0, (x, Y) \in \Omega, \\ U_1^P|_{\partial\Omega} = 0, \quad \lim_{Y \rightarrow \infty} U_1^P = u_1^0|_{\partial\Omega}, \quad t \geq 0, \\ U_1^P|_{t=0} = U_{0,1}^P, \quad (x, Y) \in \Omega. \end{array} \right. \quad (\text{P})$$

ここで変数 Y は境界層スケールの変数であり、もとの変数 y とは $Y = \frac{y}{\sqrt{\nu}}$ と対応し、 G_1^P は外力に対応する。Prandtl 方程式 (P) においてまず特筆すべきは、未知関数が本質的に U_1^P というスカラー関数のみになることである。実際、未知関数 U_2^P は非圧縮性条件と境界条件により $U_2^P = -\int_0^Y \partial_x U_1^P dZ$ で与えられる。また、 q^0 は Euler 流の圧力場であるので、Prandtl 方程式においては圧力場は未知関数ではない。 $Y \rightarrow \infty$ での条件は接合条件であり、境界層 U_1^P が Navier-Stokes 方程式での粘着境界条件と Euler 方程式の解の接方向成分 u_1^0 の境界トレースとをつなぐことを要請する。Prandtl 方程式の解 U^P と Euler 方程式の解 u^0 を用いて U^{BL} を

$$U_1^{BL}(x, Y, t) = U_1^P(x, Y, t) - u_1^0(x, 0, t), \quad U_2^{BL}(x, Y, t) = U_2^P(x, Y, t) - Y \partial_y u_2^0(x, 0, t)$$

とおく。問題 (ii) は以下のように述べられる： ν に依存しない正数 $T > 0$ が存在して、時間区間 $[0, T]$ において

$$u^\nu(x, y, t) = u^0(x, y, t) + (U_1^{BL}(x, Y, t), \sqrt{\nu} U_2^{BL}(x, Y, t)) + O(\nu^k) \quad \text{in } L^\infty \quad (2.4)$$

という漸近展開が、ある $k > 0$ に対して成り立つか。つまり、Navier-Stokes 方程式の解を "Euler 方程式の解 + Prandtl 方程式の解" という形で近似できるかという問題である。この漸近展開を **Prandtl 境界層展開** という。

ここで、本稿の主題である問題 (ii) について、既存の結果を述べたい。Navier-Stokes 方程式の解に対して (2.4) を数学的に正当化するためには、

Step 1. Euler 方程式 (E) を解く (outer flow の主要部の構成)

Step 2. Prandtl 方程式 (P) を解く (境界層の主要部の構成)

Step 3. Remainder 項の評価 (境界層の安定性)

の三つのステップが必要である。先に述べたように、初期値等の付与データが Sobolev クラスの十分な正則性を持っていれば、**Step 1** については問題なく遂行できる。しかしながら、**Step 2** と **Step 3** については対象となる方程式それぞれに微分損失構造 (高周波不安定性) が現れ、Sobolev クラスの枠組みで解くことが難しくなる。

まず **Step 2** については、大まかに言うと、 $u_1^0|_{y=0} > 0$ 及び初期値が単調性条件

$$\partial_Y U_{0,1}^P > 0, \quad (x, y) \in \bar{\Omega} \quad (2.5)$$

を満たせば⁵ 十分高い Sobolev クラスにおける Prandtl 方程式 (P) の時間局所解の一意存在が成り立つ。これについては、Crocco 変換を用いた古典的な結果が文献 O. A. Oleinik

⁵ 実際には整合条件をはじめ、より細かな仮定がつく。

and V. N. Samokhin [30] で詳しく論じられている．近年, Crocco 変換を用いない, より直接的なエネルギー法に基づく証明法が R. Alexandre, Y.-G. Wang, C.-J. Xu, and T. Yang [1] や N. Masmoudi and T. Wong [24] によって与えられている．単調性条件 (2.5) が成り立たない場合, Sobolev クラスで Prandtl 方程式を解くことは期待できない．これについて, D. Gérard-Varet and E. Dormy [7] によるシア型境界層の線形不安定性に関する次の結果が知られている．まず, $u_1^0|_{y=0}$ は正定数 U^E 及び $-\partial_x q^0 = 0$, $g^0 = 0$ とし, 初期値が $U_{0,1}^P(x, Y) = U(Y) + u_{0,1}^P(x, Y)$ という形であるとする． $u_{0,1}^P = 0$ のときは (P) は線形熱方程式

$$\begin{cases} \partial_t U_s - \partial_Y^2 U_s = G_1^P, & t > 0, Y > 0, \\ U_s|_{Y=0} = 0, \quad \lim_{Y \rightarrow \infty} U_s = U^E, & t \geq 0, \\ U_s|_{t=0} = U, & Y > 0, \end{cases} \quad (2.6)$$

に帰着し, 初期値 U に対する整合条件や外力 G_1^P の条件のもとで容易に解くことができる．この $(U_s(Y, t), 0)$ という単純な形の境界層 (もしくは単に初期値 $(U(Y), 0)$) をシア型境界層という． $u_{0,1}^P \neq 0$ が U に比べて十分小さいと見なせるとき, シア型境界層 $(U_s, 0)$ の近傍で (P) を解くことを試みるのは自然なアイデアである．そこで次の線形化方程式

$$\begin{cases} \partial_t u_1^P + U_s \partial_x u_1^P + u_2^P \partial_Y U_s - \partial_Y^2 u_1^P = 0, & t > 0, (x, Y) \in \Omega, \\ \partial_x u_1^P + \partial_Y u_2^P = 0, & t \geq 0, (x, Y) \in \Omega, \\ u_1^P|_{\partial\Omega} = 0, \quad \lim_{Y \rightarrow \infty} u_1^P = 0, & t \geq 0, \\ u_1^P|_{t=0} = u_{0,1}^P, & (x, Y) \in \Omega. \end{cases} \quad (2.7)$$

を考える． U_s の初期値 U が (適当な正則性や整合条件, U の微分の空間減衰等の他に) ある $Y_0 > 0$ において

$$\partial_Y U(Y_0) = 0, \quad \partial_Y^2 U(Y_0) \neq 0 \quad (2.8)$$

を満たすとする．このとき, $\partial_Y U_s$ は時間局所的に (2.5) を満たさない．(2.7) の係数は x 変数に依存しないことに注意して, x について Fourier 級数展開 (もしくは Fourier 変換) すると, 各周波数 n を固定するごとに (2.7) は独立変数が (Y, t) の摂動線形熱方程式と見なせる．これに付随する発散作用素 $T_n(t, s)$ を $L^2(\mathbb{R}_+)$ 上で構成すること自体は容易である．[7] では十分大きな $|n|$ に対して $T_n(t, s)$ の $L^2(\mathbb{R}_+)$ での作用素ノルムが $e^{c|n|^{\frac{1}{2}}(t-s)}$ ($c > 0$ はある定数) の形で増大することが本質的に示されている．この微分損失は (2.7) を x 変数について Sobolev クラスの枠組みで解くことができないことを意味する．なお, 上記のような微分損失に対して少なくとも時間局所的に耐えうる初期値のクラスは Gevrey クラス 2 に相当することに注意する．ここで, $e^{c|n|^{\frac{1}{\gamma}}(t-s)}$ のオーダーの微分損失と適合するのは Gevrey クラス γ であり, Gevrey クラス 1 は解析的な正則性をもつ関数のクラスである．

初期値が単調性条件 (2.5) を満たさない場合の (P) の時間局所的な一意可解性については, K. Asano [2] によるアイデアの後, M. Sammartino and R. E. Caflisch [35] によって解析的な正則性を持つ初期値に対して示された．その後, 解析的な正則性の仮定は

x 変数のみについてでよいことが M. C. Lombardo, M. Cannone, and M. Sammartino [18] 等で示された. 渦渡場の非退化性条件のもと, D. Gérard-Varet and N. Masmoudi [10] は x 変数に関する Gevrey クラス $\frac{7}{4}$ での局所可解性を示し, この結果は D. Chen, Y. Wang, and Z. Zhang [3] 及び W.-X. Li and T. Yang [17] により Gevrey クラス 2 まで拡張された. さらに最近, H. Dietert and D. Gérard-Varet [5] により, x 変数についての Gevrey クラス 2 における時間局所可解性は (2.8) のような構造条件なしに一般的な仮定の下で成り立つことが示された. [5] は, 上記の具体的な線形化方程式で観察される微分損失オーダーの観点から, optimal な結果を与えている. この他, Prandtl 方程式の解の有限時間爆発に関する結果もいくつか知られている⁶.

Prandtl 方程式を解くことで境界層の主要部 (と期待される流れ) が構成されたとして, 実際に "Euler 方程式の解+Prandtl 方程式の解+remainder" の形で Navier-Stokes 方程式の解を構成できるか, というのが **Step 3** であり, これは本質的に境界層の安定性の問題となる. **Step 3** までこめて Prandtl 境界層展開 (2.4) を (時間局所的に) 正当化する試みは, 解析的な正則性をもつクラスにおいて K. Asano [2] によりその枠組みが提示され, M. Sammartino and R. E. Caflisch [35] により (2.4) が $k = \frac{1}{2}$ として達成された. 文献 [35] は Prandtl 境界層展開を非自明な枠組みで厳密に正当化した最初の結果である. 初期時刻において境界付近では outer flow が irrotational な流れであるとし, その後の境界層の生成を考えるとという枠組みは物理的にも自然であるが, この枠組みでの Prandtl 境界層展開は以下のように Y. M. [20] で与えられた.

定理 2.1 ([20]). 初期速度場 u_0^ν は ν に依存しない (つまり, $u_0^\nu = u_0^0 =: u_0$) とし, 初期渦渡場 $\text{rot } \omega_0 = \partial_x u_{0,2} - \partial_y u_{0,1} \in W^{4,1}(\mathbb{R}_+^2) \cap W^{4,2}(\mathbb{R}_+^2)$ が $d_0 := \text{dist}(\text{supp } \text{rot } u_0, \partial\mathbb{R}_+^2) > 0$ を満たすとする. このとき, (NS_ν) の解 u^ν に対して (2.4) がある時間区間 $[0, T]$ で $k = \frac{1}{2}$ として成り立つ. また, T は $T \geq C \min\{d_0, 1\}$ のように評価される. ここで C は $\|\text{rot } u_0\|_{W^{4,1} \cap W^{4,2}}$ のみに依存する定数.

定理 2.1 において, 初期値は $\mathbb{R}_+^2$ 全体では Sobolev クラスの正則性しか仮定されていないことに注意する. また, [35] ではその解析性の仮定により $C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)$ など典型的なテスト関数のクラスの初期値を扱うことはできないが, 定理 2.1 の枠組みには入る. 定理 2.1 の証明のポイントは, まず, Euler 方程式の解の渦渡場 $\text{rot } u^0$ については有限伝搬性により時間局所的に $\text{dist}(\text{supp } \text{rot } u^0, \partial\mathbb{R}_+^2) \geq \frac{d_0}{2}$ が成り立つことである. これによって, (NS_ν) の解 u^ν が境界付近では x 変数について (収束半径が ν に一様な) 解析性をもつことになり, 微分損失を伴う境界層の高周波不安定性が時間局所的にはコントロールできる. さらに, outer flow の渦渡場と境界層領域の渦渡場の直接的な相互作用は $O(e^{-\frac{c}{\nu}})$ のように指数的に小さいと見積もることができ, 両者の相互作用の leading part は境界条件を通じた間接的なものとなる⁷. これらを正当化するため, [20] では [19] で考察された渦渡方程式による問題の定式化を本質的に用いている. なお, [20] の 3次元半空間に対応する結果が M. Fei, T. Tao, and Z. Zhang [6] で得られている.

定理 2.1 でも境界付近では初期値や解は解析的な正則性をもつことになる. 境界付近でのこのような強い正則性の仮定を真に弱めることができるか否かは重要な問題であ

⁶ ここ数年の Prandtl 方程式の数学理論の発展は目覚ましい. 上記文献の reference や [21] を参照されたい.

⁷ Sobolev クラスの outer flow の渦渡場が境界層の渦渡場と直接的に相互作用する状況になると境界層の不安定性を制御するのは困難である. 定理 2.1 は [31, 25] などの outer flow の局所渦と固体壁との相互作用に関する数値計算や実験に着想を得ている.

る。特に、Prandtl 方程式は単調性条件 (2.5) の下では適当な Sobolev クラス, (2.5) が仮定されない状況でも x 変数について Gevrey クラス 2 で時間局所可解性が成り立つので, このような, 「Prandtl 方程式 (P) が解ける枠組みでは Prandtl 境界層展開 (2.4) も正当化できるか」と問うことは自然である。しかしながら, 高周波における不安定性 (微分損失) が最も強く現れるのは, 実はこの **Step 3** であることがわかっている。実際, 境界層が単調性条件 (2.5) を満たす (したがって Prandtl 方程式については Sobolev クラスでの可解性が成り立つ) 場合でも, **Step 3** において x に関する Gevrey クラス 1 に相当する微分損失が生じ, Prandtl 境界層展開が Sobolev クラスでは成り立たない場合があることが E. Grenier [12] によって指摘された。[12] ではシア型境界層 $(U(Y), 0)$ の近傍で議論が展開されている。Step 3 におけるこのような高周波不安定性の研究について, シア型境界層周りにおける Prandtl 境界層展開の問題として次節でより詳しく述べることにする。

本稿の主眼は問題 (ii), 特に次節で述べる枠組みでの Prandtl 境界層展開であるが, その前に問題 (i) の L^2 収束性の問題について再度触れておきたい。なお, 問題 (ii) は u^ν の高次展開を要請するため, 実質的には問題 (i) の方が問題 (ii) よりも弱い主張であることに注意する。問題 (i) においては, T. Kato [16] による以下の criterion が基本的である。既に述べたように, 各初期値 u_0^ν と u_0^0 は十分滑らかでかつ十分速く空間減衰しているものとする。また, 簡単のため外力 g^ν と g^0 は 0 とする。

定理 2.2 ([16]). $g^\nu = g^0 = 0$ 及び $\lim_{\nu \rightarrow 0} u_0^\nu = u_0^0$ in $L^2(\Omega)$ とする。このとき, ある $T > 0$ に対して (2.1) が成り立つことと次は同値: 任意の正定数 c を固定したとき,

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \nu \int_0^T \|\nabla u^\nu(t)\|_{L^2(\Gamma_{c\nu})}^2 dt = 0 \quad (2.9)$$

が成り立つ。ただし, $\Gamma_{c\nu} = \{(x, y) \in \Omega \mid 0 < y < c\nu\}$.

この criterion の重要なところは, ∇u^ν の Ω 全体での L^2 ノルムではなく, 境界のごく近傍の領域 $\Gamma_{c\nu}$ での L^2 ノルムによって L^2 収束性の成立・不成立が論じられるということである。この $\Gamma_{c\nu}$ の幅 $O(\nu)$ というオーダーは上で述べた古典的な Prandtl の境界層のオーダー $O(\sqrt{\nu})$ よりもはるかに小さい。一見するとエネルギー等式 (2.2) を鑑みて (2.9) が成立するのではないかと思われるかもしれない。しかし, $T > 0$ が十分小さいとしても, 一般に (2.9) が成り立つかは今なお未解決である。著者が知る限り, はるかに強い主張であるはずの, 問題 (ii) が解ける (つまり, Prandtl 境界層展開を正当化できる) 状況以外に, Kato criterion (2.9) (したがって (2.1)) の成立が示された例はまだ無い⁸。多くの研究者は, 少なくとも T が十分小さくない場合は条件 (2.9) が一般には成り立たないと予想している。R. Nguyen van yen, M. Farge, and K. Schneider [25] の数値計算はこうした予想を支持している。

⁸ 粘着境界条件とは別の境界条件を採用すればこの限りではない。なお, 流体領域と付与データがよい対称性を持つ場合には, 粘着境界条件の下でも S. Matsui [23] をはじめ肯定的な結果が多く知られている。

3. シア一型境界層周りにおける Prandtl 境界層展開

本節ではシア一型境界層周りにおける Prandtl 境界層展開について述べる．流体領域 Ω は $\Omega = \mathbb{T} \times \mathbb{R}_+$ とする．Navier-Stokes 方程式 (NS $_\nu$) の初期速度場が

$$u_0^\nu(x, y) = (U^E(y), 0) + \left(U\left(\frac{y}{\sqrt{\nu}}\right) - U^E(0), 0 \right) + v_0^\nu(x, y), \quad x \in \mathbb{T}, \quad y > 0$$

という形で与えられているとしよう．ここで，どのような U^E を選んでも， $(U^E(y), 0)$ は Euler 方程式 (E) で $g^0 = 0$ のときの定常解となることに注意する．上式右辺第2項に現れる $(U(\frac{y}{\sqrt{\nu}}), 0)$ は初期時刻におけるシア一型境界層であり，整合条件 $U(0) = 0$ および $\lim_{Y \rightarrow \infty} U(Y) = U^E(0)$ を満たすとする． $v_0^\nu = (v_{0,1}^\nu(x, y), v_{0,2}^\nu(x, y))$ は初期摂動であり，何らかの位相で ν に関して十分小さい（ある $m > 0$ が存在して $\|v_0^\nu\|_{X(\Omega)} \leq \nu^m$ ，但し $X(\Omega)$ は適当な Banach 空間）とする．つまり，シア一型の定常 Euler 流とシア一型境界層が漸近展開の主要部となるような Navier-Stokes 方程式の解を構成しようということである．最も単純な場合は初期摂動 v_0^ν や外力 g^ν もシア一型 $(v_{0,1}^\nu(y), 0)$, $g^\nu = (g_1^\nu(y, t), 0)$ のときであり，この場合は u^ν もシア一型 $(u_1^\nu(y, t), 0)$ として1次元半空間における線形熱方程式を解くことに帰着されるので，Sobolev クラスで Prandtl 境界層展開を正当化するのに困難は生じない．では初期摂動 v_0^ν がシア一型でない一般の場合はどうであろうか． $v_0^\nu = 0$ のときの (NS $_\nu$) のシア一型の解を $(U_1^\nu(y, t), 0)$ としたとき， $v_0^\nu \neq 0$ のときの解 u^ν を $(U_1^\nu(y, t), 0)$ の近傍で構成しようとすることは自然である．そこで u^ν を $u^\nu(x, y, t) = (U_1^\nu(y, t), 0) + v^\nu(x, y, t)$ で求めようとするれば， v^ν の方程式は次の摂動 Navier-Stokes 方程式となる．

$$\begin{cases} \partial_t v^\nu + U_1^\nu \partial_x v^\nu + v_2^\nu \partial_y U_1^\nu \mathbf{e}_1 - \nu \Delta v^\nu + \nabla p^\nu = -v^\nu \cdot \nabla v^\nu, & t > 0, \quad (x, y) \in \Omega, \\ \operatorname{div} v^\nu = 0, & t \geq 0, \quad (x, y) \in \Omega, \\ v^\nu|_{\partial\Omega} = 0, & t > 0, \\ v^\nu|_{t=0} = v_0^\nu, & (x, y) \in \Omega. \end{cases} \quad (3.1)$$

但し， $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ ．ここで，境界層の安定性のエッセンスをとらえるために，人為的ではあるが (NS $_\nu$) の外力 g^ν を予め $(-\nu \partial_y^2 (U^E(y) + U(\frac{y}{\sqrt{\nu}})), 0)$ ととっておくことにする．このとき U_1^ν は

$$U_1^\nu(y, t) = U^E(y) + U\left(\frac{y}{\sqrt{\nu}}\right) - U^E(0) \quad (3.2)$$

となり，(3.1) の線形化作用素の係数が時間に依存しないので解析が行いやすくなる．なお，境界層の安定性といっても，ここでの目的は v^ν の時間局所的な評価を得ることであり， U_1^ν を定常にすることで問題の本質が失われるわけではない．

方程式 (3.1) の解析は前節の三つのステップのうち **Step 3** のみに焦点を当てたものといえる．シア一型境界層 $(U(Y), 0)$ の安定性問題として，以下のような問題を考える．

(問題 P) 初期摂動 v_0^ν がある Banach 空間 $X(\Omega)$ (例えば Sobolev 空間 $H^s(\Omega)$) で，ある $m > 0$ に対して $\|v_0^\nu\|_{X(\Omega)} \leq \nu^m$ を満たすならば， ν に依らない正定数 T, k, C が存在して，(3.1) の解 v^ν に対して $\sup_{0 < t < T} \|v^\nu(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \nu^k$ が成り立つか．

これは「シア型境界層 $(U(Y), 0)$ 周りにおいて、どのようなクラスの初期摂動に対して Prandtl 境界層展開 (2.4) を正当化できるか」という問題に他ならない。初期摂動の空間 $X(\Omega)$ の設定は本質的である。空間 $X(\Omega)$ を Sobolev 空間 $H^s(\Omega)$ としたときの不安定性について、E. Grenier [12] は以下を示した。

定理 3.1 ([12]). U^E は正定数とし、シア型境界層 $(U(Y), 0)$ が Euler 方程式の定常解として線形不安定とする。このとき、 $X(\Omega) = H^s(\Omega)$ ならば、正数 s と m をどのように大きくとっても、問題 **P** で $k > \frac{1}{4}$ とした結果は成り立たない。

M. Sammartino and R. E. Caflisch [35] により、 $X(\Omega)$ として解析的な正則性を持つ適当なクラスを取ると、問題 **P** は $m \geq \frac{1}{2}$ のとき少なくとも $k = \frac{1}{2}$ として成り立つことに注意する⁹。定理 3.1 は最近 E. Grenier and T. Nguyen [13] によりさらに改良され、 $X(\Omega) = H^s(\Omega)$ の枠組みではどのように s と m を大きくとっても問題 **P** で $k > 0$ とはできないと結論づけている¹⁰。シア型境界層 $(U(Y), 0)$ は常に Euler 方程式の定常解であることに注意する。Euler 方程式の定常解として線形不安定となる U の存在は知られている (P. G. Drazin and W. H. Reid [4], M. Paddick [32] 等)。E. Grenier [12] の議論の鍵は、 $(U(Y), 0)$ 周りで Euler 方程式を線形化したときに (仮定により) 得られる不安定固有値の固有関数 (の ν^m 倍) を v_0^ν とすることで、(3.1) の解 v^ν に対し、時間区間 $[0, T_\nu]$, $T_\nu = \frac{\nu^{\frac{1}{2}} \log \nu^{-1}}{C_1} (m - \frac{1}{4})$, において $\|v^\nu(t)\|_{L^2(\Omega)} \geq C \nu^m e^{C_1 \nu^{-\frac{1}{2}} t}$ なる評価を確立することにある。この下からの評価は、次の摂動 Stokes 方程式 (Navier-Stokes 方程式の $(U, 0)$ 周りでの線形化方程式)

$$\begin{cases} \partial_t v^\nu + U_1^\nu \partial_x v^\nu + v_2^\nu \partial_y U_1^\nu \mathbf{e}_1 - \nu \Delta v^\nu + \nabla p^\nu = 0, & t > 0, \quad (x, y) \in \Omega, \\ \operatorname{div} v^\nu = 0, & t \geq 0, \quad (x, y) \in \Omega, \\ v^\nu|_{\partial\Omega} = 0, & t > 0, \\ v^\nu|_{t=0} = v_0^\nu, & (x, y) \in \Omega. \end{cases} \quad (3.3)$$

を考えた際、 x に関する周波数 n が $|n| \sim O(\nu^{-\frac{1}{2}})$ となる高周波領域において、 v^ν の n Fourier mode が $O(e^{c|n|t})$ のように増大することと関係する [13]。このような高周波不安定性は、たとえ Prandtl 方程式が Sobolev クラスで可解であったとしても、Prandtl 境界層展開 (2.4) を正当化するためには、付与データに対して境界付近における解析的な正則性が一般に要求されることを示唆している。

さて、(3.3) の解に対してよい評価を得ることがなぜ難しいか、簡単なエネルギー計算をすると垣間見ることができる。まず、(3.3) の輸送項 $U_1^\nu \partial_x v^\nu$ は $L^2(\Omega)^2$ において歪称であり、 $\langle U_1^\nu \partial_x v^\nu, v^\nu \rangle_{L^2(\Omega)^2} = 0$ が成り立つので、部分積分により等式

$$\frac{d}{dt} \|v^\nu(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\nu \|\nabla v^\nu(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = -2 \langle v_2^\nu \partial_y U^\nu, v_1^\nu \rangle_{L^2(\Omega)} \quad (3.4)$$

を得る。ただし、 $\operatorname{div} v^\nu = 0$ と境界条件により $\langle \nabla p^\nu, v^\nu \rangle_{L^2(\Omega)^2} = 0$ であることも用いている。ここで、 $\partial_y U^\nu(y) \sim \partial_y U(\frac{y}{\sqrt{\nu}}) = O(\nu^{-\frac{1}{2}})$ であるので、単純に Gronwall の不等式

⁹ なお、[35] はシア型境界層周りに限って議論しているわけではなく、境界層の形状としては一般的なものを扱っている。

¹⁰ ただし、シア型境界層 $(U(Y), 0)$ の Euler 方程式の定常解としての線形不安定に関し、ある種の非退化性が仮定されており、その仮定が実際に成り立つか否かに関する厳密な議論は与えられていないようである。

を適用すると $\|v^\nu(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq e^{C\nu^{-\frac{1}{2}}t} \|v_0^\nu\|_{L^2(\Omega)}^2$ という評価しか得られない。さすがにこの計算が naive すぎるだけで実際にはより良い評価が成り立つのではないかと、思いたいところであるが、[12, 13] の結果は U の形状によってはこの評価が実質的に optimal であることを主張している。摂動 $v^\nu(t)$ を $O(1)$ の時間にわたって小さく抑えることが如何に非自明であるかがわかる。

3.1. Tollmien-Schlichting 不安定性

定理 3.1 では、シア型境界層 $(U(Y), 0)$ が Euler 方程式の定常解として線形不安定であることが本質的である。それでは、 $(U(Y), 0)$ が Euler 方程式の定常解として線形中立安定である場合はどうであろうか。このような U は数多く存在する。次の Rayleigh criterion がよく知られている（ここでは形式的な記述に留める）。

定理 3.2 ([34]). シア型流れ $(U(Y), 0)$ が Euler 方程式の定常解として線形不安定であるならば、 U は *inflection point* ($\partial_y^2 U$ の符号が変わる点) を持つ。

特に、 $\mathbb{R}_+$ 上で $-\partial_y^2 U \geq 0$ であるならば、 $(U(Y), 0)$ は Euler 方程式の定常解として線形中立安定である。例えば、指数関数型の境界層 $U(Y) = U^E(0)(1 - e^{-Y})$ は下に凸であるので Euler 方程式の定常解として線形中立安定であり、また、狭義単調増大であるので Prandtl 方程式との相性も良く、自然な対象である。それでは、このような良い形状の境界層に対しては、高周波不安定性は回避できるのであるだろうか。結論から言うと、残念ながら、単調凸の境界層周りでも高周波不安定性が生じる。これは Tollmien-Schlichting 不安定性と呼ばれるもので、20 世紀半ば頃には流体力学の理論 (W. Tollmien [41], H. Schlichting [36]) や実験 (G. B. Schubauer and H. K. Skramstad [38]) 等で知られており¹¹、微小な粘性項と粘着境界条件に起因する generic な不安定性である (例えば流体力学からの解説としては [4] が詳しく、和書でも [40] に記述がある)。より具体的には、固定壁における粘着境界条件のもと、シア型流れの周りで Navier-Stokes 方程式の線形化方程式を考えたとき、高い Reynolds 数において generic に現れる線形不安定性である。興味深い特徴として、線形化方程式から微分の最高階である粘性項を取り除くと一般には現れない不安定性であり、この意味で微小粘性による拡散効果が trigger となる不安定性といえる¹²。数学的に厳密にこの不安定性が示されたのはごく最近で、E. Grenier, Y. Guo, and T. Nguyen [14] による。線形化方程式 (3.3) に対する結果として紹介するため、 $L_\sigma^2(\Omega)$, $\Omega = \mathbb{T} \times \mathbb{R}_+$, における摂動 Stokes 作用素 L_ν を

$$\begin{aligned} D(L_\nu) &= W^{2,2}(\Omega)^2 \cap W_0^{1,2}(\Omega)^2 \cap L_\sigma^2(\Omega), \\ L_\nu v &= -\nu \mathbb{P} \Delta v + \mathbb{P} (U_1^\nu \partial_x v + v_2 \partial_y U_1^\nu \mathbf{e}_1), \quad v \in D(L_\nu) \end{aligned} \tag{3.5}$$

とおき、さらに x 変数についての n Fourier mode への射影 $\mathcal{P}_n$ を

$$(\mathcal{P}_n v)(x, y) = v^{(n)}(y) e^{inx}, \quad v^{(n)}(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} v(x, y) e^{-inx} dx$$

¹¹ 但し、Prandtl 境界層展開の正当化という枠組みの中で、Tollmien-Schlichting 不安定性が具体的にどのような数学的困難を与えるかが明確に理解されたのはここ 2, 3 年とあってよいと思われる。実際、Prandtl 境界層展開を示す上で数学的に障害となるのは微分損失であるので、Tollmien-Schlichting 不安定性がどのような level の微分損失を引き起こすのか、という観点で理解する必要がある。

¹² より正確には、粘着境界条件の付随した微小粘性項と密接に関係する。境界条件を変えると必ずしも現れない。

と定める．作用素 L_ν の係数が x に依存しないことに注意して， L_ν の $\mathcal{P}_n L_\sigma^2(\Omega)$ への制限を $L_{\nu,n}$ と書くことにすると， L_ν の解析は各 $L_{\nu,n}$ の解析に帰着される．

定理 3.3 ([14]). U^E を正定数とし， $U_1^\nu(y) = U(\frac{y}{\sqrt{\nu}})$ ，及び U は

$$U(0) = 0, \quad \partial_Y U(0) > 0, \quad \sum_{k=0}^4 \sup_{Y>0} |e^{mY} \partial_Y^k (U(Y) - U^E)| < \infty$$

をある正数 η_0 に対して満たすとする．このとき，十分小さな $\nu > 0$ と $|n| \sim O(\nu^{-\frac{3}{8}})$ なる n に対して，

$$C_1 |n|^{\frac{2}{3}} \leq \operatorname{Re} \lambda \leq C_2 |n|^{\frac{2}{3}}$$

を満たすような $-L_{\nu,n}$ の固有値 λ が存在する¹³．

定理3.3では U の凸性などの形状は仮定されていないことに注意する．そのため，たとえ U が良い形状をしていても， $-L_{\nu,n}$ が $\mathcal{P}_n L_\sigma^2(\Omega)$ で生成する半群 $e^{-tL_{\nu,n}}$ は $|n| \sim O(\nu^{-\frac{3}{8}})$ の高周波領域で少なくとも $O(e^{C|n|^{\frac{2}{3}}t})$ なる増幅を一般に呈することになる．したがって，(3.3) に対して初期値が単に Sobolev クラスの場合には，時間局所的であっても解の ν に関する一様な有界性が保証されないことになる．

3.2. 単調凸シア一型境界層の Gevrey 安定性

上述したように，単調凸シア一型という良い形状の境界層周りでも，Tollmien-Schlichting 不安定性によって Sobolev クラスの初期値に対して問題 **P** のような Prandtl 境界層展開を正当化することは困難である．しかしながら，定理3.3で与えられる微分損失は x 変数について Gevrey クラス $\frac{3}{2}$ のオーダーに相当し，解析的な正則性を要求する Gevrey クラス1よりも真に弱い．そのため，Gevrey クラス1よりも真に広い Gevrey クラスで問題 **P** を肯定的に解ける可能性がある．実際，単調凸シア一型境界層周りにおいて，D. Gérard-Varet, Y. M., and N. Masmoudi [9] では下記の定理が示された．正数 γ, l, K に対してノルム $\|v\|_{X^{\gamma,l,K}(\Omega)}$ を以下のように定義する：

$$\|v\|_{X^{\gamma,l,K}(\Omega)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (1 + |n|^l) e^{K|n|^{\frac{1}{\gamma}}} \|v^{(n)}\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} . \quad (3.6)$$

定理 3.4 ([9]). $U^E, U \in C^2(\overline{\mathbb{R}_+})$ とし，さらに

$$U^E(0) > 0, \quad U(0) = 0, \quad \partial_Y U(0) > 0, \quad \lim_{Y \rightarrow \infty} U = U^E(0), \\ \sum_{k=0,1,2} \sup_{Y>0} |(1 + Y^k) \partial_Y^k U(Y)| + \sum_{k=0,1,2} \sup_{y>0} |\partial_y^k U^E(y)| < \infty,$$

及びある $M > 0$ が存在して

$$-M \partial_Y^2 U \geq (\partial_Y U)^2, \quad Y \geq 0 \quad (3.7)$$

が成り立つとする．このとき，十分大きな正数 l, m と任意の正数 K に対してある正数 C, T, K' が存在し，次が成り立つ．初期値 $v_0' \in L_\sigma^2(\Omega)$ が $\|v_0'\|_{X^{\frac{3}{2},l}(\Omega)} \leq \nu^m$ を満たすなら

¹³ 本稿では [14] での主張の述べ方とは異なる形で述べている．[9] で指摘されたように，[14] の結果を高周波不安定性や微分損失オーダーが明確になる形で読み替えると定理3.3のようになる．

ば, (3.1)-(3.2) の解 $v^\nu \in C([0, T]; L_\sigma^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; W_0^{1,2}(\Omega)^2)$ で次の評価を満たすものが唯一存在する:

$$\sup_{0 < t \leq T} \left(\|v^\nu(t)\|_{X^{\gamma, l, K}(\Omega)} + (\nu t)^{\frac{1}{4}} \|v^\nu(t)\|_{L^\infty(\Omega)} + (\nu t)^{\frac{1}{2}} \|\nabla v^\nu(t)\|_{L^2(\Omega)} \right) \leq C \|v_0^\nu\|_{X^{\frac{3}{2}, l, K}(\Omega)}. \quad (3.8)$$

補足 3.5. (1) 定理 3.4 の条件 (3.7) は U の凸性に関する条件である. 条件を満たす U として典型的なものは $U(Y) = U^E(0)(1 - e^{-Y})$ などがある.

(2) 評価 (3.8) における重み $(\nu t)^{\frac{1}{4}}$ や $(\nu t)^{\frac{1}{2}}$ は初期値 v_0^ν の y に関する正則性が L^2 のみであることに起因しており, y について例えば $H_0^1(\mathbb{R}_+)$ の正則性を仮定してノルム $\|\cdot\|_{X^{\gamma, l, K}(\Omega)}$ を適宜定義し直せば, 取り除くことができる.

(3) 定理 3.4 の意義は主に, (i) 解析的な正則性よりも真に弱い仮定の下で Prandtl 境界層展開を正当化した最初の結果であること, (ii) 単調凸シア型境界層周りにおいては, Tollmien-Schlichting 不安定性による微分損失オーダー (Gevrey クラス $\frac{3}{2}$ 相当) よりも悪い微分損失オーダーを与えるような高周波不安定性は存在しないことを示したこと, の二点である.

定理 3.4 を証明する上で, 半群 $\{e^{-tL_{\nu, n}}\}_{t \geq 0}$ に対する次の評価が鍵となる. 簡単のため, L^2 - L^2 評価についてのみ述べる.

命題 3.6 ([9]). $\gamma \in [1, \frac{3}{2}]$ とする. U^E, U は定理 3.4 の仮定を満たすとする. このとき, $-L_{\nu, n}$ は $\mathcal{P}_n L_\sigma^2(\Omega)$ で C_0 -解析半群を生成し, また, 任意の $t > 0$ と $f_n \in \mathcal{P}_n L_\sigma^2(\Omega)$ に対して次の評価が成り立つ.

$$\|e^{-tL_{\nu, n}} f_n\|_{L^2(\Omega)} \leq \begin{cases} C_1(1 + |n|^{2(1-\frac{1}{\gamma})})e^{C_2|n|^{\frac{1}{\gamma}}t} \|f_n\|_{L^2(\Omega)}, & 0 \leq |n| \leq C_3\nu^{-\frac{3}{4}}, \\ C_1e^{-\frac{1}{4}\nu n^2 t} \|f_n\|_{L^2(\Omega)}, & |n| \geq C_3\nu^{-\frac{3}{4}}. \end{cases} \quad (3.9)$$

ここで C_1, C_2, C_3 は γ, ν, n, t, f_n に依存しない正定数.

命題 3.6 で $\gamma = \frac{3}{2}$ と取れることに注意する. Tollmien-Schlichting 不安定性により, γ を $\frac{3}{2}$ よりも大きくとることはできない. 評価 (3.9) のように, $|n| \geq C_3\nu^{-\frac{3}{4}}$ の Fourier mode については粘性によるエネルギー消散が十分に強く, 指数減衰する. $|n| \leq O(1)$ における (3.9) の導出は難しくなく, 実際に非自明な周波数領域は $1 \ll |n| \ll C_3\nu^{-\frac{3}{4}}$ である. 定理 3.3 のようにスペクトル不安定性を示す際には, 形式的に知られている, 不安定固有値を捕まえやすい特定の (時間周波数や n などの) パラメータ領域に絞って解析を行えば十分であるが, 命題 3.6 のような半群評価を得るためには広範のパラメータ領域でレゾルベント評価を導出しなければならない. また, 命題 3.6 では U の凸性は本質的である (先述したように, 凸性が無い場合には半群 $e^{-tL_{\nu, n}}$ が高周波 n で $e^{C|n|t}$ のような増幅を起こし得る). 命題 3.6 を示す上で重要なステップはレゾルベント問題を解くことであるが, 本質的には高周波領域 $|n| \gg 1$ において 4 階の線形常微分方程式である次の Orr-Sommerfeld 方程式を解くことに帰着される:

$$\begin{cases} OS[\phi] := \frac{i}{n}(\partial_Y^2 - \alpha^2)^2\phi + (V - c)(\partial_Y^2 - \alpha^2)\phi - (\partial_Y^2 V)\phi = h, & Y > 0, \\ \phi|_{Y=0} = \partial_Y\phi|_{Y=0} = 0. \end{cases} \quad (3.10)$$

ここで、 $\alpha = n\sqrt{\nu}$, $c = \frac{i\lambda}{n}$, $V(Y) = U^E(\sqrt{\nu}Y) - U(Y) + U^E(0)$ であり、 $\lambda \in \mathbb{C}$ はレゾルベントパラメータである。未知関数 ϕ は未知速度場の stream function に対応する。(3.10) を解く大まかな道筋は以下の通りである： U の凸性は 0 階の項 $-(\partial_Y^2 V)\phi$ の主要部の非負性を与え、4 階の項を消去した Rayleigh 方程式 $(V - c)(\partial_Y^2 - \alpha^2)\phi - (\partial_Y^2 V)\phi = h$ の可解性を $\text{Im } c \neq 0$ のときに保証する。そこで、Rayleigh 方程式の解を第 1 次近似として (3.10) を解きたいが、粘着境界条件を反映した (3.10) の境界条件のもとでこれを直接遂行することは難しく、まずは $\phi|_{Y=0} = \partial_Y^2 \phi|_{Y=0}$ のような別の境界条件で解く。次に、 $(V - c)(\partial_Y^2 - \alpha^2)\phi - (\partial_Y^2 V)\phi = 0$ の $Y \rightarrow \infty$ で減衰する解の周りで $OS[\phi] = 0$ の解 ϕ_{slow} を構成し、また、 $\frac{i}{n}(\partial_Y^2 - \alpha^2)^2 \psi + (V - c)(\partial_Y^2 - \alpha^2)\psi = 0$ の $Y \rightarrow \infty$ で減衰する解の周りで $OS[\phi] = 0$ の解 ϕ_{fast} を構成する。この ϕ_{slow} と ϕ_{fast} を用いてもとの境界条件を回復する。その際、非退化条件 $\det \begin{pmatrix} \phi_{slow}(0) & \phi_{fast}(0) \\ \partial_Y \phi_{slow}(0) & \partial_Y \phi_{fast}(0) \end{pmatrix} \neq 0$ 及びその具体的な評価を得る必要がある。少なくとも条件 $|n|(\text{Im } c)^3 \gg 1$ (及び U^E, U の仮定) のもとでは定量評価とともにこれらの議論を正当化できる。このパラメータ領域は丁度 $\text{Re } \lambda \gg |n|^{\frac{2}{3}}$ に対応する。

4. 関連する話題と今後の課題等

前節で述べたように、Prandtl 境界層展開を実際に正当化しようとする、シアー型の単純な境界層の周りであっても高周波における強い不安定性と直面することになる。一方、Tollmien-Schlichting 不安定性や定理 3.1 の不安定性は time frequency と深く結びついており、実は非定常問題特有の性質である。そのため、定常問題であれば Sobolev クラスにおいて Prandtl 境界層展開を正当化できることが期待される。実際、D. Gérard-Varet and Y. M. [8] において、逆流の無いシアー型境界層周りで定常 Navier-Stokes 方程式の線形化問題が Sobolev クラスで可解であることが示された（非定常問題ではこれは不可能である）。非線形問題についても、(3.1) を適当な外力項の付いた定常 Navier-Stokes 方程式に置き換えて問題 **P** を定常問題として定式化したものについては、Sobolev クラスで肯定的に解決されている [8]。一方、定常境界層としては Blasius 境界層が古典的で物理的により自然な対象であるが、Blasius 境界層は x 変数に依存し単純なシアー型ではないため [8] では扱えていない。Blasius 境界層を含むより一般の枠組みにおける定常 Prandtl 境界層展開は最近 Y. Guo and S. Iyer [15] により肯定的に解かれている。

単調凸シアー型境界層周りでの Gevrey 安定性 [9] の結果を、 x 変数にも依存したより一般の単調凸境界層周りに拡張し理論を整備することは重要で、今後の課題である。また、シアー型境界層の場合でも、[9] の結果を 3 次元半空間の場合に拡張できるかはまだ知られていないように思われる。

本稿では問題 (i) で述べた L^2 収束性についてはあまり触れなかったが、「Prandtl 境界層展開は正当化できなくとも L^2 収束は正当化できる場合があるのか否か」は不明である。これに関連した結果として、M. Paddick [32] は粘着境界条件ではなく $\partial_y u_1 - \nu^{-\beta} u_1 = 0$ という動粘性係数に依存した Navier slip 境界条件の下で非粘性極限問題を考察している。興味深いことに、 $\beta \in [0, 1)$ のときは Sobolev クラスの初期値に対して L^2 収束が成り立ち、一方で $\beta \geq \frac{1}{2}$ のときは、粘着境界条件の場合に [12] で示されたような高周波不安定性が存在し、Prandtl 型の境界層展開は Sobolev クラスで成り立たないことが示されている。粘着境界条件とは異なるものの、これは Prandtl 境界層展開と L^2 収束の間に実際には大きな隔たりがあることを示唆している。なお、M. Paddick and Y. M.

[22] で指摘されているように，粘着境界条件の場合でも，例えば

$$\lim_{T \rightarrow 0} \left(\limsup_{\nu \rightarrow 0} \sup_{0 < t < T} \|u^\nu(t) - u^0(t)\|_{L^2(\Omega)} \right) = 0 \quad (4.1)$$

が (Sobolev クラスの初期値に対して) 成り立つことが T. Kato [16] の証明からわかる¹⁴。本稿で述べた境界層の強い高周波不安定性の観点からは，これは不思議な事実に感じられる。実際 (4.1) は，「 $o(1)$ の時間においては境界層の高周波不安定性が流れの大きな構造を変えるほどには非線形増幅しない」ことを示唆している。このあたりの詳しいメカニズムは全く分かっていないと思われる。

参考文献

- [1] R. Alexandre, Y.-G. Wang, C.-J. Xu, and T. Yang, Well-posedness of the prandtl equation in sobolev spaces. *J. Am. Math. Soc.* **28** (3), 745-784 (2015)
- [2] K. Asano, Zero-viscosity limit of the incompressible Navier-Stokes equations. II. *Math. Anal. Fluid Plasma Dyn., Sūrikaiseikikenkyūsho Kōkyūroku* **656**, 105-128 (1988)
- [3] D. Chen, Y. Wang, and Z. Zhang, Well-posedness of the linearized Prandtl equation around anon-monotonic shear flow. *Ann. I.H.Poincaré-AN* **35** 1119-1142 (2018)
- [4] P. G. Drazin and W. H. Reid, *Hydrodynamic Stability*, 2nd ed., Cambridge Math. Lib., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004
- [5] H. Dietert and D. Gérard-Varet, Well-posedness of the Prandtl equation without any structural assumption. [arXiv:1809.11004](https://arxiv.org/abs/1809.11004)
- [6] M. Fei, T. Tao, and Z. Zhang, On the zero-viscosity limit of the Navier-Stokes equations in $\mathbb{R}_+^3$ without analyticity. *J. Math. Pures Appl.* **112** 170-229 (2018)
- [7] D. Gérard-Varet and E. Dormy, On the ill-posedness of the Prandtl equation. *J. Am. Math. Soc.* **23** (2), 591-609 (2010)
- [8] D. Gérard-Varet, Y. Maekawa, Sobolev stability of Prandtl expansions for the steady Navier-Stokes equations. [arXiv:1805.02928](https://arxiv.org/abs/1805.02928)
- [9] D. Gérard-Varet, Y. Maekawa, and N. Masmoudi, Gevrey stability of Prandtl expansions for 2-dimensional Navier-Stokes flows. *Duke Math. J. Vol.* **167**, No. 13, 2531-2631 (2018)
- [10] D. Gérard-Varet and N. Masmoudi, Well-posedness for the Prandtl system without analyticity or monotonicity. *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.* **48** (4), 1273-1325 (2015)
- [11] 儀我美一・儀我美保，「非線形偏微分方程式」 共立講座 21 世紀の数学 (25)，共立出版 (1999)
- [12] E. Grenier, On the nonlinear instability of Euler and Prandtl equations. *Commun. Pure Appl. Math.* **53** (9), 1067-1091 (2000)
- [13] E. Grenier, T. T. Nguyen, L^∞ instability of Prandtl layers. [arXiv:1803.11024](https://arxiv.org/abs/1803.11024)
- [14] E. Grenier, Y. Guo, and T. T. Nguyen, Spectral instability of characteristic boundary layer flows. *Duke Math. J.* **165**, 3085-3146 (2016)
- [15] Y. Guo and S. Iyer, Validity of steady Prandtl layer expansions. [arXiv:1805.05891](https://arxiv.org/abs/1805.05891)
- [16] T. Kato, Remarks on zero viscosity limit for nonstationary Navier-Stokes flows with boundary. in *Seminar on Nonlinear Partial Differential Equations, Berkeley, 1983. Volume 2 of Mathematical Sciences Research Institute Publications* (Springer, New York, 1984), pp. 85-98

¹⁴ $\lim_{\nu \rightarrow 0} \left(\limsup_{T \rightarrow 0} \sup_{0 < t < T} \|u^\nu(t) - u^0(t)\|_{L^2(\Omega)} \right) = 0$ は自明であるが，特異極限問題であるので二つの limit が交換できるかは証明が必要。

- [17] W.-X. Li and T. Yang, Well-posedness in Gevrey space for the Prandtl equations with non-degenerate critical points. arXiv:1609.08430
- [18] M. C. Lombardo, M. Cannone, and M. Sammartino, Well-posedness of the boundary layer equations. *SIAM J. Math. Anal.* **35** (4), 987-1004 (2003, electronic)
- [19] Y. Maekawa, Solution formula for the vorticity equations in the half plane with application to high vorticity creation at zero viscosity limit. *Adv. Differential Equations* **18**, no. 1-2, 101-146, (2013)
- [20] Y. Maekawa, On the inviscid limit problem of the vorticity equations for viscous incompressible flows in the half-plane. *Commun. Pure Appl. Math.* **67** (7), 1045-1128 (2014)
- [21] Y. Maekawa and A. Mazzucato, The Inviscid Limit and Boundary Layers for Navier-Stokes Flows. in *Handbook of Mathematical Analysis in Mechanics of Viscous Fluids*, Y. Giga, A. Novotný (eds.), Springer International Publishing AG, part of Springer Nature 2018
- [22] Y. Maekawa and M. Paddick, On convergence criteria for incompressible Navier-Stokes equations with Navier boundary conditions and physical slip rates. arXiv:1701.08003
- [23] S. Matsui, Example of zero viscosity limit for two-dimensional nonstationary Navier-Stokes flows with boundary. *Jpn J. Indust. Appl. Math.* **11** (1), 155-170 (1994)
- [24] N. Masmoudi and T. Wong, Local-in-time existence and uniqueness of solutions to the Prandtl equations by energy methods. *Commun. Pure Appl. Math.* **68**, 1683-1741 (2015)
- [25] R. Nguyen van yen, M. Farge, , and K. Schneider, Energy dissipating structures produced by walls in two-dimensional flows at vanishing viscosity. *Phys. Rev. Lett.* **106**, 184502 (2011)
- [26] 岡本久, 「ナヴィエ-ストークス方程式の数理」 東京大学出版会 (2009)
- [27] O. A. Oleinik, On the system of equations of the boundary layer theory. *Zh. vychisl. matem. i matem. fiz.* **3** (3), 489-507 (1963)
- [28] O. A. Oleinik, On the mathematical theory of boundary layer for an unsteady flow of incompressible fluid. *J. Appl. Math. Mech.* **30**, 951-974 (1967/1966)
- [29] O. A. Oleinik, On the stability of solutions of the system of boundary layer equations for a nonstationary flow of an incompressible fluid. *PMM* **30** (3), 417-423 (1966)
- [30] O. A. Oleinik and V. N. Samokhin, *Mathematical Models in Boundary Layer Theory*. Volume **15** of Applied Mathematics and Mathematical Computation (Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 1999)
- [31] P. Orlandi, Vortex dipole rebound from a wall. *Phys. Fluids A* **2**, 1429 (1990)
- [32] M. Paddick, Stability and instability of Navier boundary layers. *Differ. Integral Equ.* **27**, 893-930 (2014)
- [33] L. Prandtl, Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. *Verh. III Intern. Math. Kongr. Heidelberg, 1904*, pp. 485-491
- [34] Lord Rayleigh, On the stability, or instability, of certain fluid motions. *Proc. London Math. Soc.* (3) **S1-11**, 57-70 (1880)
- [35] M. Sammartino and R. E. Caflisch, Zero viscosity limit for analytic solutions of the Navier-Stokes equation on a half-space. I, II. *Commun. Math. Phys.* **192** (2), 433-491 (1998)
- [36] H. Schlichting, Zur Entstehung der Turbulenz bei der Plattenströmung. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Kl.* 181-208; *Z. Angew. Math. Mech.* **13**, 171-174 (1933)
- [37] H. Schlichting and K. Gersten, *Boundary-Layer Theory*, Enlarged edn. (Springer, Berlin, 2000). With contributions by Egon Krause and Herbert Oertel, Jr., Translated from the ninth German edition by Katherine Mayes
- [38] G. B. Schubauer and H. K. Skramstad, Laminar boundary layer oscillations and transi-

- tion on a flat plate. J. Res. Nat. Bur. Stand. **38**, 251-292; J. Aero. Sci. **14**, 69-78 (1947)
- [39] 柴田良弘・久保隆徹, 「非線形偏微分方程式」 (現代基礎数学), 朝倉書店 (2012)
- [40] 巽友正 「流体力学」 (新物理学シリーズ), 培風館 (1995)
- [41] W. Tollmien, Über die entstehung der Turbulenz. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 21-44 (1929)