

滑らかな写像芽の間の幾何学的同値関係

—Thom-Mather 理論へのオマージュ—

泉屋 周一 (北海道大学名誉教授)*

1. 序文

C^∞ 写像の特異点論の源流は、20世紀初頭の「Morse理論」とWhitneyによる「はめ込み埋め込みの理論」に端を発しているが、それらの元々の目的自体は特異点論からやや離れているので、特異点論前史の意味合いをもち、その後Whitneyにより特異点の研究が開始され、本格的に近代化された特異点論はThomによると言うてよいであろう。Thomは元々微分位相幾何学の研究者なので C^∞ 写像の特異点論を「 C^∞ 写像の微分位相幾何学」として捉えようとしていたように見える。多様体 N, P の間の C^∞ 写像 $f: N \rightarrow P$ は局所的に考えても微分位相幾何学的に自明ではなく、ましてや大域的に分類するということはほとんど不可能に近い。多様体の定義から、点 $x_0 \in N$ における C^∞ 写像芽 $f: (N, x_0) \rightarrow (P, y_0)$ は N と P の局所座標を取り替えると、その座標変換により互いに移りあうので、写像の局所的分類については、以下の $\mathcal{A}$ 同値が自然に考えられる：二つの C^∞ 写像芽 $f, g: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ が $\mathcal{A}$ 同値であるとは C^∞ 微分同相芽 $\phi: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$, $\psi: (\mathbb{R}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ が存在して、 $\psi \circ f = g \circ \phi$ を満たすことである。この同値関係は C^∞ 写像の(局所)微分位相幾何学的同値関係であると言うことが出来る。Thomはこの同値関係を研究するために、Malgrangeの準備定理や大域的性質を調べるためのジェット横断性定理を開発・整理し、考えるべきいくつかの問題を提出した[26]。それらの問題は、1970年前後にまだ大学院生であったMatherによってほとんど全て解かれた。その過程で、Mather[31, 32]は C^∞ 写像芽の $\mathcal{A}$ 同値を研究するための補助手段として $\mathcal{K}$ 同値を導入した(と思われる)：二つの C^∞ 写像芽 $f, g: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ が $\mathcal{K}$ 同値であるとは、 $H(x, y) = (\phi(x), \Phi(x, y))$ という形をしていて $\Phi(x, 0) = 0$ を満たす微分同相芽 $H: (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0)$ が存在して、 $H(x, f(x)) = (\phi(x), g \circ \phi(x))$ が任意の $x \in (\mathbb{R}^n, 0)$ に対して成り立つことである。最後の式は、 $\Phi(x, f(x)) = g \circ \phi(x)$ を意味しており、また条件 $\Phi(x, 0) = 0$ から、 $\Phi(x, y) = \sum_{i=1}^p \Phi_i(x, y)y_i$ と書き表され、 $\Phi(x, f(x)) = \sum_{i=1}^p \Phi_i(x, f(x))f_i(x)$ となる。従って、以下の定理が成り立つ。

定理 1.1 (Mather[31]) 二つの C^∞ 写像芽 $f, g: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ が $\mathcal{K}$ 同値であるための必要十分条件は、微分同相芽 $\phi: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ と C^∞ 写像芽 $A: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow GL(p, \mathbb{R})$ が存在して任意の点 $x \in (\mathbb{R}^n, 0)$ に対して $A(x)^t f(x) = g \circ \phi(x)$ が成り立つことである。ただし、 $f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))$ として ${}^t f(x)$ は $f(x)$ の転置としての列ベクトルを表す。

また、 f, g が、微分同相芽 ϕ, ψ により $\mathcal{A}$ 同値であるとき $H(x, y) = \phi(x) \times \psi(y)$ とすると、 $H(x, f(x)) = (\phi(x), g \circ \phi(x))$ が成り立ち、 f, g は $\mathcal{K}$ 同値となる。

本研究は、高橋雅朋氏(室蘭工業大学)、寺本央氏(北大電子研)、その他多くの方々との共同研究の成果である。この場を借りて感謝の意を表したい。

* 〒062-0934 札幌市豊平区平岸4条12丁目5-3

e-mail: izumiya@math.sci.hokudai.ac.jp

web: <http://researchmap.jp/izumiya/>

$\mathcal{A}$ 同値において、特に、 $\psi = 1_{\mathbb{R}^p}$ のとき、 **$\mathcal{R}$ 同値 (右同値)** であると言い、 $\phi = 1_{\mathbb{R}^n}$ の時は **$\mathcal{L}$ 同値 (左同値)** であると言う。 $\mathcal{A}$ 同値は時によっては **$\mathcal{RL}$ 同値 (右左同値)** とも呼ばれる。また、 $\mathcal{K}$ 同値において、 $\phi = 1_{\mathbb{R}^n}$ の時は **$\mathcal{C}$ 同値** であると言う。今後、定理 1.1 による言い換えを $\mathcal{K}$ 同値とする。この言い換えは、 C^∞ 写像芽 $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ を自明なベクトル束 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ への C^∞ 切断芽 $s_f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0); s_f(x) = (x, f(x))$ と見なした場合の、構造群 $GL(p, \mathbb{R})$ に対応した自然な同値関係と見ることが出来る。

ここでは、値域の多様体が Riemann 構造や Lorentz 構造などの G 構造を持つ場合に $\mathcal{A}$ 同値をその幾何構造に対応したものに一般化することと、自明ベクトル束 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ の構造群が縮小された場合に対応して $\mathcal{K}$ 同値を一般化することを考える。その意味で、表題の「幾何学的同値関係」[24, 25] と言う言葉が使われる。

全体を通してほとんどの場合、写像などは C^∞ 級のものを扱うので、断らない限り、 C^∞ 写像芽を単に「写像芽」と呼ぶ。

2. 写像芽の間の幾何学的同値関係

Thom-Mather による写像芽の同値関係が写像の微分位相幾何学に対応した同値関係であると理解すると、様々な幾何構造に付随した同値関係が考えられる。ここでは、写像芽 $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ の値域に、ある幾何構造が存在する場合の幾何学的 $\mathcal{A}$ 同値と、自明ベクトル束 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ 上の構造群が縮小された場合の幾何学的 $\mathcal{K}$ 同値を考える。ここで、 p 次正則行全体 $GL(p, \mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\}$ は自然な位相でリー群となる。一方、 $GL(\mathbb{R}^p) = \{L \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p) \mid L : \mathbb{R}\text{-同型}\}$ は合成で群となるが、基底 $\Sigma = \{v_1, \dots, v_p\}$ を任意に選ぶと、群同型 $r_\Sigma : GL(\mathbb{R}^p) \rightarrow GL(p, \mathbb{R})$ が Σ に対応する表現行列を対応させることによって得られる。この群同型 r_Σ が $GL(\mathbb{R}^p)$ 上の微分構造を定め、 $GL(\mathbb{R}^p)$ はリー群となる。このようにして $GL(\mathbb{R}^p)$ と $GL(p, \mathbb{R})$ はリー群としては同一視できるが、ここでは区別することに注意する。ここで、以下の二つの場合を考える：一つは、 $G \subset GL(p, \mathbb{R})$ が線形リー群の場合であり、もう一つは G をリー群として、 $\rho : G \rightarrow GL(\mathbb{R}^p)$ を C^∞ 表現とする場合である。ただし、 $G \subset GL(p, \mathbb{R})$ の場合は、 $\mathbb{R}^p$ の標準基底 $\{e_1, \dots, e_p\}$ により、 $GL(p, \mathbb{R}) = GL(\mathbb{R}^p)$ と同一視することにより、恒等表現 $\iota : G \subset GL(\mathbb{R}^p)$ を考え、二つ目の場合の特別な場合であると見做すことも出来る。

さて、 $\text{Diff}(m) = \{\phi \mid \phi : (\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^m, 0) : \text{微分同相芽}\}$ と置くと、合成に関して群となり、線形リー群 $G \subset GL(p, \mathbb{R})$ に対して、

$$\text{Diff}[G](p) = \{\psi \in \text{Diff}(p) \mid J_y \psi \in G \text{ for any } y \in (\mathbb{R}^p, 0)\}$$

と置くと、 $\text{Diff}(p)$ の部分群となる。ただし、 $J_y \psi$ は ψ の $y \in (\mathbb{R}^p, 0)$ におけるヤコビ行列とする。また、 $\psi \in \text{Diff}[G](p)$ が**恒等写像芽にイソトープ**とは、写像芽 $\Psi : (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}, 0 \times [0, 1]) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ で、任意の $t \in [0, 1]$ で $\psi_t \in \text{Diff}[G](p)$ を満たし、 $\psi_0 = 1_{\mathbb{R}^p}$ かつ $\psi_1 = \psi$ となるものが存在することとする。ただし、 $\psi_t(x) = \Psi(x, t)$ である。この時、恒等写像芽にイソトープな $\psi \in \text{Diff}[G](p)$ 全体を $\text{Diff}_0[G](p)$ と表すと $\text{Diff}[G](p)$ の部分群となる。この時、**幾何学的 $\mathcal{A}$ 同値** を以下のように定義する：写像芽 $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ が **$\mathcal{A}[G]$ 同値** であるとは $\phi \in \text{Diff}(n)$ と $\psi \in \text{Diff}[G](p)$ が存在して $\psi \circ f = g \circ \phi$ を満たすこととする。特に、 $\psi \in \text{Diff}_0[G](p)$ と取れる時は、 **$\mathcal{A}_0[G]$ 同値** であると言う。また、 $\phi = 1_{\mathbb{R}^n}$ の時は **$\mathcal{L}[G]$ 同値** や **$\mathcal{L}_0[G]$ 同値** であると言う。さらに、 $G = \{I_p\}$ の時は、 $f = g \circ \phi$ となり、 **$\mathcal{A}[\{I_p\}]$ 同値** は $\mathcal{R}$ 同値であり、 $G = GL(p, \mathbb{R})$ の時は、 **$\mathcal{A}[GL(p, \mathbb{R})]$**

同値は $\mathcal{A}$ 同値である。また、 f, g が $\mathcal{R} \times G$ 同値であるとは、 $\phi \in \text{Diff}(n)$ と $A \in G$ が存在して、任意の $x \in (\mathbb{R}^n, 0)$ に対して $f \circ \phi(x) = A^t g(x)$ が成り立つこととする。ここで、 $A \in G$ に対して、線形写像 $\psi_A: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ を $\psi_A(y) = A^t y$ と定めると、 $\psi_A \in \text{Diff}[G](p)$ なので、 $\mathcal{R} \times G$ 同値ならば $\mathcal{A}[G]$ 同値が成り立ち、特に G が連結リー群の時は $\mathcal{A}_0[G]$ 同値となる。定義から $\mathcal{A}[G]$ 同値は値域の空間 $\mathbb{R}^p$ の接束上の G 構造に付随した幾何学的 $\mathcal{A}$ 同値と見ることが出来る。一方、 G をリー群として、 $\rho: G \rightarrow GL(\mathbb{R}^p)$ を C^∞ 表現とする場合、自明ベクトル束 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ 上の構造群 G に対応して、**幾何学的 $\mathcal{K}$ 同値** を以下のように定義する：写像芽 $f, g: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ が $\mathcal{K}[(\rho, G)]$ 同値であるとは $\phi \in \text{Diff}(n)$ と写像芽 $a: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow G$ が存在して、任意の $x \in (\mathbb{R}^p, 0)$ に対して $\rho(a(x))(f(x)) = g \circ \phi(x)$ が成り立つこととする。特に、 $\phi = 1_{\mathbb{R}^n}$ と取れる時、 $\mathcal{C}[(\rho, G)]$ 同値であると言う。一方、線形リー群 $G \subset GL(p, \mathbb{R})$ に対しては、標準基底を取ることにより、 $\iota: G \subset GL(p, \mathbb{R}) = GL(\mathbb{R}^p)$ と見なせ、 $\mathcal{K}[(\iota, G)]$ 同値が考えられる。この場合は $\mathcal{K}[(\iota, G)]$ を単に $\mathcal{K}[G]$ と書き、 **$\mathcal{K}[G]$ 同値** と呼ぶ。さらに、 $\mathcal{R} \times G$ 同値ならば $\mathcal{K}[G]$ 同値も成り立つ。また、 $\mathcal{K}[\{I_p\}]$ 同値は $\mathcal{R}$ 同値に、 $\mathcal{K}[GL(p, \mathbb{R})]$ 同値は $\mathcal{K}$ 同値に一致する (cf. 定理 1.1 参照). $\mathcal{K}[G]$ 同値は Tougeron[37] によって導入されたもので、そこでは $\mathcal{K}[G]$ 同値を **G 同値** と呼んでいる。この G 同値は当時、Gervais[17, 18] によっていくつか基本的な性質が研究されているが、その後、研究がほとんど途絶えている。また、彼らの文献の中では、 G を色々変えれば、多くの例が得られると言う事が一言述べられているが、実際の例としては上記の自明な場合 ($G = \{I_p\}, G = GL(p, \mathbb{R})$) のみ挙げられている。

3. $\mathcal{A}[G]$ 同値の無限小代数構造

最初に、Mather の $\mathcal{A}$ 同値の無限小代数構造について復習する。 $\mathcal{E}_n$ を原点における n 変数関数芽全体のなす **局所 $\mathbb{R}$ 代数** とする。そのただ一つの **極大イデアル** は $\mathfrak{M}_n = \{h \in \mathcal{E}_n \mid h(0) = 0\}$ である。写像芽 $f: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ に対して、 $\mathbb{R}$ 代数としての **引き戻し準同型** $f^*: \mathcal{E}_p \rightarrow \mathcal{E}_n$ が $f^*(h) = h \circ f$ と定義される。さらに、 f に沿ったベクトル場芽全体のなす (有限生成) $\mathcal{E}_n$ 加群が

$$\theta(f) = \left\{ \eta = \sum_{j=1}^p \eta_j(x) \frac{\partial}{\partial y_j} \circ f \mid \eta_j \in \mathcal{E}_n, (j = 1, \dots, p) \right\},$$

と定まる。さらに、 $\mathfrak{M}_n \theta(f)$ は、 $\theta(f)$ の $\mathcal{E}_n$ 部分加群で $\eta(0) = 0$ を満たす $\theta(f)$ の元 η 全体の集合である。ここで、 $\mathcal{A}(n, p) = \text{Diff}(n) \times \text{Diff}(p)$ と置く。 $\mathfrak{M}(n, p)$ を写像芽 $(\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ 全体とする。この時、群 $\mathcal{A}(n, p)$ の $\mathfrak{M}(n, p)$ 上への作用を $\mu((\phi, \psi), f) = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$ と定義すると、 f の軌道は f に $\mathcal{A}$ 同値な写像芽全体となる。そこで、 f の $\mathcal{A}$ 軌道の形式的な接空間を求める。 $\mathfrak{M}(n, p)$ の f における形式的接ベクトルは $c(0) = f$ を満たす「曲線」 $c(t) \in \mathfrak{M}(n, p)$ の接ベクトル $d(c(t))/dt|_{t=0}$ である。「曲線」は $c(t)(x) = f_t(x)$ で $f_0 = f$ を満たすものと理解できるので

$$\frac{d(c(t)(x))}{dt} \Big|_{t=0} = \sum_{j=1}^p \eta_j(x) \frac{\partial}{\partial y_j} \circ f, \quad \eta_j(0) = 0$$

という形をしている。この事より、 $\mathfrak{M}(n, p)$ の f における形式的接ベクトル空間を $T_f \mathfrak{M}(n, p) = \mathfrak{M}_n \theta(f)$ と定義して良い。さらに、**拡張された接空間**を $T_f \mathfrak{M}(n, p)_e = \theta(f)$ と定義する。

今、 $\theta(n) = \theta(1_{\mathbb{R}^n})$ ($(\mathbb{R}^n, 0)$ におけるベクトル場芽全体) に対して、Mather [31] に従って、 $\mathcal{E}_n$ 準同型写像 $tf : \theta(n) \rightarrow \theta(f)$ を $tf(\zeta) = df \circ \zeta$ と定義する。ただし、 $df : T\mathbb{R}^n \rightarrow T\mathbb{R}^p$ は f の微分写像芽を表す。さらに、写像 $\omega f : \theta(p) \rightarrow \theta(f)$ を $\omega f(\xi) = \xi \circ f$ 定義する。この時、 $\theta(f)$ は引き戻し準同型 $f^* : \mathcal{E}_p \rightarrow \mathcal{E}_n$ を通して $\mathcal{E}_p$ 加群となるが、 ωf はその意味での $\mathcal{E}_p$ 準同型写像 ($f^*(\mathcal{E}_p)$ 準同型写像) である。5つ組み $(\omega f, tf, \theta(p), \theta(n), \theta(f))$ は [31] において、 $f^* : \mathcal{E}_p \rightarrow \mathcal{E}_n$ 上の **(有限形) 混合準同型** と呼ばれた。有限形混合準同型は Mather 理論 [31, 32] において重要な役割を演じた。ここで、 f の $\mathcal{A}$ 軌道の **(形式的) 接空間** は $T\mathcal{A}(f) = tf(\mathfrak{M}_n\theta(n)) + \omega f(\mathfrak{M}_p\theta(p))$ と、**拡張された接空間** は $T\mathcal{A}_e(f) = tf(\theta(n)) + \omega f(\theta(p))$ と定義される。

さて、線形リー群 $G \subset GL(p, \mathbb{R})$ に対して、 $\mathcal{A}(n, p)$ の二つの部分群を $\mathcal{A}[G](n, p) = \text{Diff}(n) \times \text{Diff}[G](p)$ 、 $(\mathcal{R} \times G)(n, p) = \text{Diff}(n) \times G$ とする。 $\mathcal{A}[G]$ 同値を Mather 理論に沿って研究するために、 $\text{Diff}[G](p)$ の無限小代数構造を調べる。リー群 $G \subset GL(p, \mathbb{R})$ のリー環を $\mathfrak{g} = T_{I_p}G \subset M_p(\mathbb{R})$ とする。ただし、 $M_p(\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}$ 上の p 次正方行列全体のなすリー環である。前と同様な計算により、群 $\text{Diff}[G](p)$ の形式的な接空間 (リー環) は

$$T_{1_{\mathbb{R}^p}}\text{Diff}[G](p) = \left\{ \xi = \sum_{i=1}^p \xi_i(y) \frac{\partial}{\partial y_i} \mid \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial y_j}(y) \right) \in \mathfrak{g} \text{ for any } y \in (\mathbb{R}^p, 0), \xi_i(0) = 0 \right\}.$$

となる。この空間を $\theta[G]_0(p)$ と表し、拡張された接空間を

$$\theta[G](p) = \left\{ \xi = \sum_{i=1}^p \xi_i(y) \frac{\partial}{\partial y_i} \mid \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial y_j}(y) \right) \in \mathfrak{g} \text{ for any } y \in (\mathbb{R}^p, 0) \right\}$$

と定めると、 $\theta[G]_0(p) \subset \theta[G](p)$ は共に $\theta(p)$ の部分ベクトル空間である。ここで、 $G = GL(p, \mathbb{R})$ の時は $\theta[GL(p, \mathbb{R})](p) = \theta(p)$ なので $\mathcal{E}_p$ 加群の構造をもつ。一般の $G \subset GL(p, \mathbb{R})$ ではどうか？ G のリー環 $\mathfrak{g}$ に対して、 $\mathcal{E}_p$ -加群 $\mathfrak{g}(\mathcal{E}_p)$ を

$$\mathfrak{g}(\mathcal{E}_p) = \{ \zeta \mid \zeta : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathfrak{g} : \text{写像芽} \}$$

とする。任意の $\lambda \in \mathcal{E}_p$ に対して、写像芽 $\text{grad}_y \lambda : \theta(p) \rightarrow M_p(\mathcal{E}_p)$ を

$$\text{grad}_y \lambda(\xi) = \xi \otimes \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial \lambda}{\partial y_p} \right) = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \lambda}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial \lambda}{\partial y_p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \frac{\partial \lambda}{\partial y_1} & \cdots & \xi_1 \frac{\partial \lambda}{\partial y_p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \xi_p \frac{\partial \lambda}{\partial y_1} & \cdots & \xi_p \frac{\partial \lambda}{\partial y_p} \end{pmatrix}$$

と定義する。この時、 $\mathcal{E}_p$ の部分集合を

$$\mathcal{E}_p[G] = \left\{ \lambda \in \mathcal{E}_p \mid \text{任意の } \xi \in \theta[G]_0(p) \text{ に対して } \text{grad}_y \lambda(\xi) \in \mathfrak{g}(\mathcal{E}_p) \right\}$$

と定めると、 $\mathcal{E}_p[G]$ は $\mathcal{E}_p$ の部分 $\mathbb{R}$ 代数であり、 $\theta[G]_0(p)$ は $\mathcal{E}_p[G]$ 加群であることが示される。さらに以下の定理が成り立つ。

定理 3.1 ([24]) R を $\theta[G]_0(p)$ が $\theta(p)$ の部分 R 加群となるような $\mathcal{E}_p$ の部分 $\mathbb{R}$ 代数とする。この時、 $R \subset \mathcal{E}_p[G]$ が成り立つ。

この定理から、 $\mathcal{E}_p[G]$ を $\theta[G]_0(p)$ に付随した $\mathcal{E}_p$ の最大部分 $\mathbb{R}$ 代数と呼ぶ。さらに、 $\mathcal{E}_p[G]$ は Dubuc [9, 20] の意味での C^∞ 環となる。 $\mathcal{E}_p$ の $\mathbb{R}$ 部分代数 R が C^∞ 部分環であるとは任意の $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in R$ と $f \in \mathcal{E}_r$ に対して $f(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in R$ を満たすことと定義する。この時、 R はただ一つの極大イデアル $\mathfrak{M}_R = \mathfrak{M}_p \cap R$ を持つ局所環となる。

命題 3.2 ([24]) $\theta[G]_0(p)$ に付随した $\mathcal{E}_p$ の最大部分 $\mathbb{R}$ 代数は $\mathcal{E}_p$ の C^∞ 部分環である。

写像の特異点論において基本的役割を担う Malgrange の準備定理が成立するためには、環が DA 代数というクラスに属していることが必要である [27]。 $\mathbb{R}$ 代数 A が **可微分代数** (または、 **DA 代数**) とは、ある $n \in \mathbb{N}$ に対して $\mathbb{R}$ 代数としての全射準同型 $\phi: \mathcal{E}_n \rightarrow A$ が存在することと定義する。このクラスの性質については、ここでは詳しく述べないが準同型や部分代数などの標準的な代数系の概念が存在する。詳しくは Malgrange の著書 [27] を参照して欲しい。一般に C^∞ 部分代数は DA 代数となるとは限らないが、そうなるための判定条件が存在する [21, Appendix]。

命題 3.3 C^∞ 部分代数 $R \subset \mathcal{E}_p$ が DA 代数となる為の必要十分条件は R が C^∞ 代数として有限生成となることである。

ここで、写像芽 $f: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ の $\mathcal{A}[G]$ 同値に関する無限小代数構造を考えると、定義域には幾何構造を考えていないので、定義域の微分同相に対応する部分は、Mather の元々のものと同一である。考える群は $\mathcal{A}[G](n, p) = \text{Diff}(n) \times \text{Diff}[G](p)$ と $(\mathcal{R} \times G)(n, p) = \text{Diff}(n) \times G$ である。ここで、 $tf: \theta(n) \rightarrow \theta(f)$ は $\text{Diff}(n)$ の形式的接空間に対応しているので、Mather 理論と変わらない。一方、 $\omega f: \theta(p) \rightarrow \theta(f)$ に対して、 $\mathbb{R}$ 線形写像 $\omega f_{[G]} = \omega f|_{\theta[G](p)}: \theta[G](p) \rightarrow \theta(f)$ を考える。この時、 $\theta(f)$ は引き戻し準同型 $f_{[G]}^* = f^*|_{\mathcal{E}_p[G]}: \mathcal{E}_p[G] \rightarrow \mathcal{E}_n$ を通して $\mathcal{E}_p[G]$ 加群となり、 $\omega f_{[G]}$ は $f_{[G]}^*: \mathcal{E}_p[G] \rightarrow \mathcal{E}_n$ 上の $\mathcal{E}_p[G]$ 準同型写像となる。従って、5つ組 $(\omega f_{[G]}, tf, \theta[G](p), \theta(n), \theta(f))$ は Mather [31] の意味で $f_{[G]}^*$ 上の混合準同型となるが、有限形かどうかは G に依存する。 $\mathcal{A}[G](n, p) \subset \mathcal{A}(n, p)$ なので、 $\mathfrak{M}(n, p)$ への誘導された作用による f の軌道が $\mathcal{A}[G]$ 同値の f を含む同値類を表すので、その形式的接空間は $T\mathcal{A}[G](f) = tf(\mathfrak{M}_n\theta(n)) + \omega f_{[G]}(\theta[G]_0(n))$ と定義され、拡張された接空間は $T\mathcal{A}[G]_e(f) = tf(\theta(n)) + \omega f_{[G]}(\theta[G](n))$ と定義される。これらは $G = GL(p, \mathbb{R})$ の場合は元々の Mather による接空間や拡張された接空間に一致する。次に $\mathcal{R} \times G$ 同値について考える。定義から $(\mathcal{R} \times G)(n, p) \subset \mathcal{A}[G](n, p) \subset \mathcal{A}(n, p)$ である。写像芽 $f: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ に対して、 $\mathfrak{g}(f) = \{X.f \mid X \in \mathfrak{g}\}$ と定義する。ただし、任意の $x \in (\mathbb{R}^n, 0)$ に対して $X.f(x) = X.t_f(x)$ である。この時 f を通る $\mathcal{R} \times G$ 軌道の接空間は $T(\mathcal{R} \times G)(f) = tf(\mathfrak{M}_n\theta(n)) + \mathfrak{g}(f)$ と定義され拡張された接空間は $T(\mathcal{R} \times G)_e(f) = tf(\theta(n)) + \mathfrak{g}(f)$ と定義される。任意の $X \in \mathfrak{g}$ に対して、 $\xi_X: (\mathbb{R}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ を $\xi_X(y) = X.t_y$ と定義すると ξ_X は $\theta(p)$ の元であるとみなせる。その意味で $\mathfrak{g} \subset \theta(p)$ が成り立ち、 $\omega f: \theta(p) \rightarrow \theta(f)$ の制限 $\omega f|_{\mathfrak{g}}: \mathfrak{g} \rightarrow \theta(f)$ は $\mathbb{R}$ 線形写像である。さらに $\mathfrak{g}(f) = \omega f(\mathfrak{g})$ が成り立つ。この時、5つ組み $(\omega f_{\mathfrak{g}}, tf, \mathfrak{g}, \theta(n), \theta(f))$ は $f^*|_{\mathbb{R}} = \iota: \mathbb{R} \subset \mathcal{E}_n$ 上の有限形混合準同型となる。したがって、Damon の意味での「 **A または K の幾何学的部分群**」 [6, 7] となり、写像の特異点論における基本的定理は皆成り立つ。この事は、非常に良い結論のように思えるが、残念ながら以下の命題が成り立つ。

命題 3.4 $G \subset GL(p, \mathbb{R})$ を線形リー群として、 $f: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ を写像芽とする。 $p > 1$ かつ $\dim_{\mathbb{R}} \theta(f)/T(\mathcal{R} \times G)_e(f) < \infty$ ならば f は沈めこみ芽である。

特に、 $n < p$ の場合、沈めこみは存在しないので、この命題から $\mathcal{R} \times G$ 同値に有限余次元の写像芽は存在しないこととなる。

4. $\mathcal{A}[G]$ 同値の例

この節では、いくつかの G に対応した $\mathcal{A}[G]$ 同値の幾何学的意味について解説する。

4.1. 等長的 $\mathcal{A}$ 同値

G として回転群 $SO(p) \subset GL(p, \mathbb{R})$ を考える。この時、

$$\theta[SO(p)]_0(p) = \left\langle y_j \frac{\partial}{\partial y_i} - y_i \frac{\partial}{\partial y_j} \mid 1 \leq i < j \leq p \right\rangle_{\mathbb{R}}.$$

が成り立ち、リー環として $\theta[SO(p)]_0(p) \cong \mathfrak{so}(p)$ であることも解る。また、 $\mathcal{E}_p[SO(p)] = \mathbb{R}$ となる。従って、 $\theta[SO(p)]_0(p)$ は有限生成 $\mathcal{E}_p[G](= \mathbb{R})$ 加群である。さらにこの場合は以下の定理が成り立つ。

定理 4.1 $\text{Diff}_0[SO(p)](p) = SO(p)$ である。

古典的微分幾何学における合同の概念を写像芽に対して適用すると、 $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ が**合同**であるとは、 f, g が $\mathcal{R} \times SO(p)$ 同値であることと定義する。定理 4.1 から以下が成り立つ。

定理 4.2 $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ が $\mathcal{A}_0[SO(p)]$ 同値である為の必要十分条件は f, g が合同であることである。

特に平面曲線 $f : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ の場合、古典的微分幾何学の結果をこの立場から解釈すると以下が成り立つ。

命題 4.3 $f, g : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ を正則曲線とする。この時、 f, g が $\mathcal{A}_0[SO(2)]$ 同値（即ち、合同）である為の必要十分条件は $\kappa_f, \kappa_g : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ が $\mathcal{R}$ 同値となることである。ただし、 κ_f, κ_g はそれぞれ f, g の曲率とする。

さらに、特異点を持つ平面曲線の場合も**フロンタル**というクラスに属する曲線については、各々の曲線に対して2つの曲率が存在し、そのある種の同値類が合同（すなわち、 $\mathcal{A}_0[SO(2)]$ 同値）の完全不変量となることが知られている [15]。さらに曲面 $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$ の場合も正則曲面については、以下の古典的な Monge 標準形がある。

命題 4.4 $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$ を正則曲面の芽とする。この時、 f は以下の写像芽に合同（すなわち、 $\mathcal{A}_0[SO(3)]$ 同値）である：

$$g(x_1, x_2) = (x_1, x_2, \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + a_{30} x_1^3 + a_{21} x_1^2 x_2 + a_{12} x_1 x_2^2 + a_{03} x_2^3 + O(4)).$$

ただし、 λ_1, λ_2 は f の原点 0 における主曲率である。

さらに、近年 $\mathcal{R} \times SO(3)$ 同値は $\mathbb{R}^3$ 内の特異点を持つ曲面の微分幾何学的性質の研究に応用されている ([14, 16, 29, 30, 38] 参照)。さらに、**ローレンツ群** $SO(1, q)$ を考えると、 $\mathcal{A}_0[SO(1, q)]$ 同値はミンコフスキー空間 $\mathbb{R}_1^{q+1}$ への写像芽の**ローレンツ合同**（すなわち、 $\mathcal{R} \times SO(1, q)$ 同値）となることも解る。

4.2. 体積保存 $\mathcal{A}$ 同値

G として特殊線形群 $SL(p, \mathbb{R}) \subset GL(p, \mathbb{R})$ を考える。この場合、 $\theta[SL(p, \mathbb{R})](p)$ は $p-1$ 次完全微分形式全体の空間と同一視されることがわかる。さらに、 $\mathcal{E}_p[SL(p, \mathbb{R})] = \mathbb{R}$ が成り立ち、 $\theta[SL(p, \mathbb{R})]_0(p)$ は $\mathcal{E}_p[SL(p, \mathbb{R})](= \mathbb{R})$ 加群として無限生成となる。この場合、 $\mathcal{A}[SL(p, \mathbb{R})]$ 同値は値域の体積 Ω_p を保存する微分同相による幾何学的 $\mathcal{A}$ 同値で、5 つ組みが有限型の混合準同型とはならないので、写像の特異点論の基本的定理を使うことができない。しかし、にも関わらず、 $SL(p, \mathbb{R})$ は $GL(p, \mathbb{R})$ と比較してもかなり大きな部分群なので、意味のある分類結果が得られる [10, 28]。この場合の $\mathcal{R} \times SL(p, \mathbb{R})$ 同値は**等積アフライン合同**と呼ぶべき同値関係で、これらの群の差が等積アフライン微分幾何学と体積保存幾何学との差を表している。

4.3. 双 $\mathcal{A}$ 同値

G として

$$D^*(p_1, p_2) = \left\{ \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \in GL(p, \mathbb{R}) \mid A \in GL(p_1, \mathbb{R}), B \in GL(p_2, \mathbb{R}) \right\}$$

を考える。この時、写像芽 $f = (f_1, f_2) : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^{p_1} \times \mathbb{R}^{p_2}, 0)$ を**写像芽の発散図式** $(\mathbb{R}^{p_1}, 0) \xleftarrow{f_1} (\mathbb{R}^n, 0) \xrightarrow{f_2} (\mathbb{R}^{p_2}, 0)$ と見なすと、自然な同値関係として双 $\mathcal{A}$ 同値が考えられる [5, 12]。写像芽 $f = (f_1, f_2)$ と $g = (g_1, g_2)$ が**双 $\mathcal{A}$ 同値**であるとは微分同相芽 $\phi \in \text{Diff}(n)$ と $\psi_i : (\mathbb{R}^{p_i}, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^{p_i}, 0)$, $(i = 1, 2)$ が存在して $f_i \circ \phi = \psi_i \circ g_i$ を満たすことと定義する。それは $f = (f_1, f_2)$ と $g = (g_1, g_2)$ が $\mathcal{A}[D^*(p_1, p_2)]$ 同値であることに必要十分条件である。この場合も 5 つ組みは混合準同型とはならず、特異点論の通常の基本定理は成り立たない。しかし、Dufour[13] は**強い意味での双 $\mathcal{A}$ 同値** (即ち、 $\psi_1 = 1_{\mathbb{R}^{p_1}}$ とする) を用いて、 $p_1 = 1, n = p_2 = 2$ の場合の生成的分類を与えている。

4.4. ラグランジュ同値

$p = 2n$ として、 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 上に標準的シンプレクティック構造 $\omega = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i$ が与えられているとき、 G として

$$L(2n) = \left\{ \begin{pmatrix} {}^t C^{-1} & {}^t C^{-1} D \\ O & C \end{pmatrix} \mid C \in GL(n, \mathbb{R}), {}^t D = D \right\} \subset Sp(2n, \mathbb{R}).$$

を考える。ただし、 $Sp(2n, \mathbb{R})$ は実シンプレクティックリー群とする。この時、 $\Psi(p, q) \in \text{Diff}[L(2n)](2n)$ となる必要十分条件は $\psi_2 \in \text{Diff}(n)$ が存在して $\Psi(p, q) = (\psi_1(p, q), \psi_2(q))$ という形のシンプレクティック微分同相となることである。この形のシンプレクティック微分同相 Ψ はラグランジュ特異点論 [2, Part III] において**ラグランジュ微分同相**と呼ばれた。写像芽 $f, g : (\mathbb{R}^m, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, 0)$ が**ラグランジュ同値**とは $\phi \in \text{Diff}(m)$ とラグランジュ微分同相 $\Psi \in \text{Diff}[L(2n)](2n)$ が存在して $\Psi \circ f = g \circ \phi$ となる事と定義する。 f, g がラグランジュ同値である為の必要十分条件は f, g が $\mathcal{A}[L(2n)]$ 同値である事である。また、 $\theta[L(2n)]_0(2n)$ は

$$\left\{ - \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial \xi_k}{\partial q_i}(y) x_k + \frac{\partial \eta}{\partial q_i}(q) \right) \frac{\partial}{\partial p_i} + \sum_{i=1}^n \xi_i(q) \frac{\partial}{\partial q_i} \mid \xi_i(q) \in \mathfrak{M}_n, \eta(q) \in \mathfrak{M}_n^2 \right\}$$

となる。この時、形式的接空間は $T\mathcal{A}[L(2n)](f) = tf(\mathfrak{M}_m \theta(m)) + \omega f(\theta[L(2n)]_0)$ であり、拡張された接空間は $T\mathcal{A}[L(2n)]_e(f) = tf(\theta(m)) + \omega f(\theta[L(2n)])$ である。

5. $\mathcal{K}[(\rho, G)]$ 同値の無限小代数構造

$\mathcal{K}[(\rho, G)]$ 同値は $\mathcal{A}[G]$ 同値と比較すると、より単純な無限小代数構造を持ち、旧来の写像の特異点論の手法がそのまま適用できる為、応用範囲が広い。Mather は $\mathcal{A}$ 同値を研究する為の補助的概念として $\mathcal{K}$ 同値を導入したように思えるが、「応用特異点論」という立場から見ると $\mathcal{K}$ 同値が主役となる。最初に $\mathcal{C}[(\rho, G)]$ 同値に対応する $\text{Diff}(n+p)$ の部分群を考える：

$$\mathcal{C}[(\rho, G)](n, p) = \{(1_{\mathbb{R}^n}, H_a^\rho) \mid a : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow G : \text{写像芽}\} \subset \text{Diff}(n+p)$$

とする。ただし、写像芽 $H_a^\rho : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ は $H_a^\rho(x, y) = \rho(a(x))(y)$ とする。さらに

$$\mathcal{K}[(\rho, G)](n, p) = \{(\phi, H_a^\rho) \mid \phi \in \text{Diff}(n), a : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow G : \text{写像芽}\} \subset \text{Diff}(n+p)$$

と置くと、 $\mathcal{K}[(\rho, G)](n, p) = \text{Diff}(n) \rtimes \mathcal{C}[(\rho, G)](n, p)$ となり、 $T_{1_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p}} \mathcal{K}[(\rho, G)](n, p) = \mathfrak{M}_n \theta(n) \oplus T_{1_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p}} \mathcal{C}[(\rho, G)](n, p)$ となる。 $\mathfrak{M}_n \theta(n)$ は $\mathcal{E}_n$ 加群なので $T_{1_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p}} \mathcal{C}[(\rho, G)](n, p)$ の構造を調べれば、 $T_{1_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p}} \mathcal{K}[(\rho, G)](n, p)$ の構造が解る。ここで、 G のリー環 $\mathfrak{g} = T_e G$ に対して、 $\mathcal{E}_n$ 加群 $\mathfrak{g}(\mathcal{E}_n)$ が $\mathfrak{g}(\mathcal{E}_n) = \{\zeta \mid \zeta : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow \mathfrak{g}; C^\infty\}$ と定義される。ここで、任意の $\xi \in L(\mathbb{R}^p)(\mathcal{E}_n)$ と $x \in (\mathbb{R}^n, 0)$ に対して $\xi(x) \in L(\mathbb{R}^p)$ なので、写像芽 $\bar{\xi} : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) \longrightarrow \mathbb{R}^p$ を $\bar{\xi}(x, y) = \xi(x)(y)$ と定義すると $\theta(\pi_p)$ の $\mathcal{E}_n$ 部分加群 $\theta(\mathcal{C}) = \{\bar{\xi} \mid \xi \in L(\mathbb{R}^p)(\mathcal{E}_n)\}$ が与えられる。また、対応 $\xi \mapsto \bar{\xi}$ は $\mathcal{E}_n$ 準同型となる。さらに、 C^∞ 表現 $\rho : G \longrightarrow GL(\mathbb{R}^p)$ に対して、微分写像 $d\rho_e : \mathfrak{g} \longrightarrow L(\mathbb{R}^p)$ が定まる。ただし、 $L(\mathbb{R}^p)$ は $\mathbb{R}^p$ 上の自己 $\mathbb{R}$ 線形写像全体のなすベクトル空間であり、リー群 $GL(\mathbb{R}^p)$ のリー環でもある。ここで、任意の $\zeta \in \mathfrak{g}(\mathcal{E}_n)$ に対して、 $\overline{d\rho_e \circ \zeta} : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ が $\overline{d\rho_e \circ \zeta}(x, y) = (d\rho_e \circ \zeta)(x)(y)$ と定まる。この時、 $\theta(\mathcal{C})$ の部分集合 $\theta(\mathcal{C}[(\rho, G)])$ が

$$\theta(\mathcal{C}[(\rho, G)]) = \left\{ \overline{d\rho_e \circ \zeta} \mid \zeta \in \mathfrak{g}(\mathcal{E}_n) \right\} \subset \theta(\mathcal{C}) \subset \theta(\pi_p)$$

と定義される。写像芽の 1 径数族 $a_t : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (G, e)$ について $da_t(x)/dt|_{t=0} \in \mathfrak{g}(\mathcal{E}_n)$ なので、 $\zeta(x) = da_t(x)/dt|_{t=0}$ と置く

$$\frac{dH_{a_t}^\rho(x, y)}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{d\rho(a_t(x))(y)}{dt} \Big|_{t=0} = d\rho_e \circ \zeta(x)(y) = \overline{d\rho_e \circ \zeta}(x, y)$$

が得られる。従って、 $\theta(\mathcal{C}[(\rho, G)])$ は $\mathcal{C}[(\rho, G)](n, p)$ の $1_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p}$ における (形式的) 接空間である。ここで、 $\mathcal{E}_n$ 準同型 $(d\rho_e)_* : \mathfrak{g}(\mathcal{E}_n) \longrightarrow L(\mathbb{R}^p)(\mathcal{E}_n)$ を $(d\rho_e)_*(\zeta) = d\rho_e \circ \zeta$ と定義すると、 $\overline{(d\rho_e)_*(\zeta)} = \overline{d\rho_e \circ \zeta}$ で定義される $\mathcal{E}_n$ 準同型 $\overline{(d\rho_e)_*} : \mathfrak{g}(\mathcal{E}_n) \longrightarrow \theta(\mathcal{C})$ の像が $\theta(\mathcal{C}[(\rho, G)])$ に一致する。従って、 $\theta(\mathcal{C}[(\rho, G)])$ は $\theta(\mathcal{C}) \subset \theta(\pi_p)$ の $\mathcal{E}_n$ 部分加群である。ここで、 $\mathbb{R}^p$ の基底 $\Sigma = \{v_1, \dots, v_p\}$ を任意に 1 組選ぶ。この時、リー群の同型写像 $r_\Sigma : GL(\mathbb{R}^p) \longrightarrow GL(p, \mathbb{R})$ によって、表現 $\rho_\Sigma = r_\Sigma \circ \rho : G \longrightarrow GL(p, \mathbb{R})$ が得られる。今、 $d(r_\Sigma)_{1_{\mathbb{R}^p}} \circ d\rho_e = d(\rho_\Sigma)_e : \mathfrak{g} \longrightarrow M_p(\mathbb{R})$ が成り立つので、 $(d(r_\Sigma)_*(\bar{\xi})) = d(r_\Sigma)_{1_{\mathbb{R}^p}} \circ \xi$ と定めると $\mathcal{E}_n$ 同型 $d(r_\Sigma)_* : \theta(\mathcal{C}) \longrightarrow M_p(\mathcal{E}_n)$ が得られる。ただし、 $M_p(\mathcal{E}_n) = M_p(\mathbb{R})(\mathcal{E}_n)$ とおく。 $d(r_\Sigma)_*(\overline{d\rho_e \circ \zeta}) = d(\rho_\Sigma)_e \circ \zeta$ なので、 $d(r_\Sigma)_*(\theta(\mathcal{C}[(\rho, G)])) = (d(\rho_\Sigma)_e)_*(\mathfrak{g}(\mathcal{E}_n))$ が成り立つ。ここでさらにリー環 $\mathfrak{g}$ のベクトル空間としての基底 $\Delta = \{\delta_1, \dots, \delta_r\}$ を任意に選ぶと、任意の元 $\zeta \in \mathfrak{g}(\mathcal{E}_n)$ は、ある $\zeta_k \in \mathcal{E}_n$ によって $\zeta(x) = \sum_{k=1}^r \zeta_k(x) \delta_k$ と書かれる。 $\delta_k \in \mathfrak{g} \subset L(\mathbb{R}^p)$ なので、 $d(\rho_\Sigma)_e(\delta_k) = (\lambda_{ij}^k) \in M_p(\mathbb{R})$ と書き表すことが出来る。この時以下が成り立つ。

命題 5.1 同じ記号の下で、 $d(r_\Sigma)_*(\theta(\mathcal{C}[(\rho, G)])) = \langle (\lambda_{ij}^1), \dots, (\lambda_{ij}^r) \rangle_{\mathcal{E}_n}$ が成り立つ。さらに、 $d(r_\Sigma)_*$ は $\mathcal{E}_n$ 同型なので、 $\theta(\mathcal{C}[(\rho, G)]) = \langle d\rho_e(\delta_1), \dots, d\rho_e(\delta_r) \rangle_{\mathcal{E}_n}$ が成り立つ。

写像芽 $f: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ に対して、対応する切断芽 $s_f: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0)$ を考えると $\mathcal{C}$ 同値に対する形式的接空間は $TC(f) = \{\bar{\xi} \circ s_f \mid \xi \in M_p(\mathcal{E}_n)\} \subset \theta(s_f)$ であるが、 $\bar{\xi} \circ s_f(x) = \bar{\xi}(x, f(x)) = \xi(x)(f(x)) \in \mathbb{R}^p$ なので、 $\bar{\xi} \circ s_f \in \theta(f)$ となり、 $TC(f) \subset \theta(f)$ が成り立つ。従って、 $\mathcal{C}[(\rho, G)]$ 同値の形式的接空間は

$$TC[(\rho, G)](f) = \{\overline{d\rho_e \circ \zeta} \circ s_f \mid \zeta \in \mathfrak{g}(\mathcal{E}_n)\} \subset TC(f) \subset \theta(f)$$

で与えられる。ここで、 $\mathcal{E}_n$ 加群を $M_p(\mathcal{E}_n)(f) = \{(\zeta_{ij})^{tf} \mid (\zeta_{ij}) \in M_p(\mathcal{E}_n)\}$ と置き、 $\mathbb{R}^p$ の基底 Σ に対して、 $\mathcal{E}_n$ 同型 $d(r_{\Sigma, f}): TC(f) \rightarrow M_p(\mathcal{E}_n)(f)$ を $d(r_{\Sigma, f})(\bar{\xi} \circ s_f)(x) = d(r_\Sigma)_{1_{\mathbb{R}^p}} \circ \xi(x)(f(x)) = (\xi_{ij}(x))^{tf}(x)$ と定める。ただし、 $(\xi_{ij}) = d(r_\Sigma)_{1_{\mathbb{R}^p}} \circ \xi \in M_p(\mathcal{E}_n)$ である。従って、 $d(r_{\Sigma, f})(TC[(\rho, G)](f)) = (d(\rho_\Sigma)_e)_*(\mathfrak{g}(\mathcal{E}_n))(f) = \{(\zeta_{ij})^{tf} \mid (\zeta_{ij}) \in (d(\rho_\Sigma)_e)_*(\mathfrak{g}(\mathcal{E}_n))\}$ が得られる。

命題 5.2 リー環 $\mathfrak{g}$ の基底 Δ に対して、 $d(r_{\Sigma, f})(TC[(\rho, G)](f)) = \langle (\lambda_{ij}^1)^{tf}, \dots, (\lambda_{ij}^r)^{tf} \rangle_{\mathcal{E}_n}$ である。さらに、 $TC[(\rho, G)](f) = \langle d\rho_e(\delta_1) \circ s_f, \dots, d\rho_e(\delta_r) \circ s_f \rangle_{\mathcal{E}_n}$ も成り立つ。

特に、線形リー群 $G \subset GL(p, \mathbb{R})$ の時は、 $\mathfrak{g} \subset M_p(\mathbb{R})$ の基底を $\{\Lambda_1, \dots, \Lambda_r\}$ とすると、 $TC[G](f) = \langle \Lambda_1^{tf}, \dots, \Lambda_r^{tf} \rangle_{\mathcal{E}_n}$ である。また、 $\mathcal{K}[(\rho, G)]$ 同値の形式的接空間は $TK[(\rho, G)](f) = tf(\mathfrak{M}_n \theta(n)) + TC[(\rho, G)](f)$ 、拡張された接空間は $TK[(\rho, G)]_e(f) = tf(\theta(n)) + TC[(\rho, G)](f)$ となる。従って、以下が成り立つ。

定理 5.3 $TK[(\rho, G)](f)$ と $TK[(\rho, G)]_e(f)$ は有限生成 $\mathcal{E}_n$ 加群である。

$\mathcal{A}[G]$ 同値の場合は形式的接空間は混合準同型となったが、それに比べて $\mathcal{K}[(\rho, G)]$ 同値の場合は $\mathcal{E}_n$ 加群という遥かに単純な代数構造を持つことが解った。この事実は $\mathcal{K}[(\rho, G)]$ 同値が Damon[6, 7] による「**A または K の幾何学的部分群**」となることを意味し、従来の写像の特異点論における様々な基本定理が全て成り立つことを意味している。しかし、Damon による枠組みは一般的かつ抽象的すぎて、結果的には個別の場合に Damon の条件を満たすことを確認するだけでもかなりの労力を要する。ここで考えている $\mathcal{K}[(\rho, G)]$ 同値は常に Mather の $\mathcal{K}$ 同値と $\mathcal{R}$ 同値の間にあるので、標語的には $\mathcal{K}$ と $\mathcal{R}$ 双方で成り立つ事は $\mathcal{K}[(\rho, G)]$ でも成り立つ事となる。共同研究者の一人の寺本は、この接空間が有限生成 $\mathcal{E}_n$ 加群であると言う事実から、「**包括的グレブナー系**」を用いることにより、 $\mathcal{K}[(\rho, G)]$ 同値に関する**自動分類プログラム**を開発中である[36]。 $\mathcal{K}[(\rho, G)]$ 同値に関する様々な定理を列挙するには紙数が足りないのので、次節では、表現 (ρ, G) を考えることにより、独自に成り立つことのいくつかを述べる。

6. 表現の同値と群の縮小・拡大

最初に表現の間の同値関係を考える。 $\rho_i: G \rightarrow GL(\mathbb{R}^p)$ ($i = 1, 2$) をリー群 G の表現とする。表現 ρ_1, ρ_2 が**同値**であるとは $\mathbb{R}$ 同型 $\psi: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ が存在して、任意の $a \in G$ に対して $\psi \circ \rho_1(a) \circ \psi^{-1} = \rho_2(a)$ が成り立つことと定義する。この時以下が成り立つ。

命題 6.1 リー群 G の表現 ρ_1, ρ_2 が $\mathbb{R}$ 同型 $\psi: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ によって同値であるとする。この時、 $f, g: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ が $\mathcal{K}[(\rho_1, G)]$ 同値である為の必要十分条件は $\psi \circ f, \psi \circ g$ が $\mathcal{K}[(\rho_2, G)]$ 同値となることである。

この命題から、 $\mathcal{K}[(\rho, G)]$ 同値は表現の同値によらないことがわかり、同値の範囲内でより解りやすい表現を選ぶことができる。実際、 Σ を $\mathbb{R}^p$ の基底として、群同型 $r_\Sigma : GL(\mathbb{R}^p) \rightarrow GL(p, \mathbb{R})$ に対して、 $\rho_\Sigma = r_\Sigma \circ \rho : G \rightarrow GL(p, \mathbb{R})$ とする。このとき、 $\mathbb{R}^p$ の標準基底 e_i ($1 \leq i \leq p$) によつて $\psi_\Sigma(e_i) = v_i$ となる $\mathbb{R}$ 同型写像 $\psi_\Sigma : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ を考えると ρ と ρ_Σ は ψ_Σ によつて同値となるので、 f の $\mathcal{K}[(\rho, G)]$ 同値類は $\psi_\Sigma \circ f$ の $\mathcal{K}[\rho(G)]$ 同値類に対応する。この場合、 $\rho(G) \subset GL(p, \mathbb{R})$ がよく知られた古典群に一致する場合は分類の為の計算がより簡単となる。

次に、部分リー群 $H < G$ を考える。この時、 $\rho_H = \rho|_H : H \rightarrow GL(\mathbb{R}^p)$ もリー群の表現となるので、 $\mathcal{K}[(\rho, G)]$ 同値と $\mathcal{K}[(\rho_H, H)]$ 同値を比較することが考えられる。この時、写像芽 $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ に対して、 (ρ, ρ_H) に関する**無限小相対的モジュライ空間**を

$$\mathcal{M}(\mathcal{K}[(\rho, G; H)].f) = \frac{\mathcal{K}[(\rho, G)](f)}{\mathcal{K}[(\rho_H, H)](f)} \cong \frac{\mathcal{C}[(\rho, G)](f)}{\mathcal{C}[(\rho_H, H)](f)}$$

と定義する。以後、簡単のため、 $\iota : G \subset GL(p, \mathbb{R})$ の場合について述べる。この場合、 $\mathcal{M}(\mathcal{K}[(\iota, G; H)].f) = \mathcal{M}(\mathcal{K}[G; H].f)$ と書く。ここで、 $M_p(\mathcal{E}_n)$ の $\mathcal{E}_n$ 部分加群を $M_p(\mathcal{E}_n)_f = \{(\zeta_{ij}) \in M_p(\mathcal{E}_n) \mid (\zeta_{ij})^t f = 0\}$ とする。この時、 G のリー環 $\mathfrak{g}$ に対して、 $\mathfrak{g}(\mathcal{E}_n)_f = \mathfrak{g}(\mathcal{E}_n) \cap M_p(\mathcal{E}_n)_f$ と定義する。さらに、 $\mathfrak{h}$ を H のリー環とすると以下が成り立つ。

定理 6.2 $\mathcal{E}_n$ 同型 $\mathcal{M}(\mathcal{K}[G; H].f) \cong \frac{\mathfrak{g}(\mathcal{E}_n)}{\mathfrak{h}(\mathcal{E}_n) + \mathfrak{g}(\mathcal{E}_n)_f}$ が成り立つ。

次に $\mathbb{R}^p$ の部分ベクトル空間 V で $\rho : G \rightarrow GL(\mathbb{R}^p)$ が ρ 不変でない場合を考える。この時、 $G_V = \{a \in G \mid \rho(a)(V) \subset V\}$ と置くと、以下が成り立つ。

命題 6.3 G_V は G の閉部分リー群となり、表現 $\rho_V = \rho|_{G_V} : G_V \rightarrow GL(V)$ が定義可能である。

8節では、この命題6.3の構成が必要な応用例が与えられる。

7. $\mathcal{K}[G]$ 同値の例

ここでは、より簡単な構造を持つ $\mathcal{K}[G]$ 同値の例をいくつか述べる。 $\mathcal{K}[G]$ 同値は Tougeron が [37] で導入した G 同値そのものである。今後、 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする。

7.1. 零点集合の旗

G として、左三角行列のなす線形リー群

$$T_\ell^*(p) = \left\{ A = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{p1} & \lambda_{p2} & \cdots & \lambda_{pp} \end{pmatrix} \in GL(p, \mathbb{K}) \mid \lambda_{11}\lambda_{22}\cdots\lambda_{pp} \neq 0 \right\}$$

を考える。写像芽 $f = (f_1, \dots, f_p) : (\mathbb{K}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{K}^p, 0)$ に対して、 $V_j(f) = \cap_{i=1}^{j-1} f_i^{-1}(0)$ ($j = 1, \dots, p$) と置くと、 $V_1(f) \supset V_2(f) \supset \cdots \supset V_p(f)$ となる。この時、 $FV(f) = (V_1(f), V_2(f), \dots, V_p(f))$ を f の**零点集合の旗**と呼ぶ。写像芽 $f, g : (\mathbb{K}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{K}^p, 0)$ に対して、 $FV(f), FV(g)$ が**旗 $\mathcal{K}$ 同値**であるとは f, g が $\mathcal{K}[T_\ell^*(p)]$ 同値である事と定義する。この時、 $\phi \in \text{Diff}(n)$ が存在して全ての $j = 1, \dots, p$ に対して（同時に） $\phi(V_j(f)) = V_j(g)$ が成り立つ。

7.2. 超曲面配置

G として、対角行列のなす線形リー群

$$D^*(p) = \left\{ A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_p \end{pmatrix} \in GL(p, \mathbb{K}) \mid \lambda_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_p \neq 0 \right\}$$

を考える。写像芽 $f = (f_1, \dots, f_p) : (\mathbb{K}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{K}^p, 0)$ に対して、 $V(f_i) = f_i^{-1}(0)$ ($i = 1, \dots, p$) と置き、 $AV(f) = (V(f_1), \dots, V(f_p))$ を f の**超曲面配置**と呼ぶ。 $AV(f), AV(g)$ が**配置として $\mathcal{K}$ 同値**であるとは f, g が $\mathcal{K}[D^*(p)]$ 同値である事と定義する。この時、 $\phi \in \text{Diff}(n)$ が存在して全ての $i = 1, \dots, p$ に対して（同時に） $\phi(V_i(f)) = (V_i(g))$ が成り立つ。

ここで、双 $\mathcal{A}$ 同値の定義と同様に G として $D^*(p_1, p_2)$ を考えると、2つの零点集合の配置に関する同値関係が定義できる。この場合は**双 $\mathcal{K}$ 同値**と呼ばれ、[5, 33] において研究されている。またこの場合の類似として、零点集合上の関数芽の分類理論も考えることができる [8, 23]

7.3. その他の同値関係

その他、 G として古典リー群を採用すると、 $\mathcal{K}[SO(p)]$ 同値、 $\mathcal{K}[SO(1, p)]$ 同値、 $\mathcal{K}[SL(p, \mathbb{K})]$ 同値、 $\mathcal{K}[Sp(2p)]$ 同値など様々な同値関係を考える事ができる。特に、 $\mathcal{K}[SO(p)]$ 同値は次節における行列特異点との関係から重要である。

8. $\mathcal{K}[(\rho, G)]$ 同値の例

$\mathcal{K}[(\rho, G)]$ 同値の興味深い例としては、行列特異点の研究が挙げられる。

8.1. 一般の行列特異点

歴史的には、行列特異点の研究は Arnol'd[1] による、行列族のジョルダン標準形に関する研究が最初である。 $\rho : GL(m, \mathbb{K}) \rightarrow GL(M_m(\mathbb{K}))$ を $X \in M_m(\mathbb{K})$ に対して、 $\rho(A)(X) = AXA^{-1}$ と定義する。Arnol'd は写像芽 $f : (\mathbb{K}^n, 0) \rightarrow M_m(\mathbb{K})$ を行列の族と考え、 $\mathcal{K}[(\rho, GL(m, \mathbb{K}))]$ 同値による分類の標準形を**行列族のジョルダン標準形**と呼んだ。この理論は常微分方程式の分岐の研究などに応用された。Bruce[3] は、対称行列全体の空間 $\text{Sym}(m)$ について、表現 $\rho : GL(m, \mathbb{K}) \rightarrow \text{Sym}(m)$ を $X \in \text{Sym}(m)$ に対して、 $\rho(A)(X) = AX^tA$ とした場合を考えた。Bruce は $\mathcal{K}[(\rho, GL(m, \mathbb{K}))]$ 同値を **$\mathcal{G}$ 同値**と呼び、標準形を求めた。この研究の動機の一つとしては、微分方程式 $a(x, y)dy^2 + 2b(x, y)dxdy + c(x, y)dx^2 = 0$ に対応する判別集合（対応する対称行列の行列式がゼロとなる集合）の形状を求めることが挙げられる。さらに Bruce-Tari[4] は正方行列全体の集合 $M_m(\mathbb{K})$ に $\text{Sym}(m)$ と同様な $GL(m, \mathbb{K})$ の表現を考えている。この場合、群を $SL(m, \mathbb{K})$ に制限すると行列式が保存され、より興味深いと思われる。その後、一般の行列空間 $M_{m \times q}(\mathbb{K})$ と表現 $\rho : GL(m, \mathbb{K}) \times GL(q, \mathbb{K}) \rightarrow GL(M_{m \times q}(\mathbb{K}))$ を $\rho(A, B)(X) = AXB^{-1}$ とした場合の研究が、主にヨーロッパやブラジルの特異点論研究者達により開始された。この場合の動機の主なものとしては、いわゆる行列の**行列式的特異点 (determinantal singularities)**の研究にある。 $M_{m \times q}(\mathbb{K})$ 部分集合を $M_{m \times q}^r = \{A \mid \text{rank } A < r\}$ 、($r \leq \min(m, q)$) とする。写像芽 $f : (\mathbb{K}^n, 0) \rightarrow M_{m \times q}(\mathbb{K})$ に対して、 $X_f^r = f^{-1}(M_{m \times q}^r)$ を

(m, q, r) **型の行列式的集合**と呼ぶ。 $(1, q, 1)$ 型の行列式的集合や $(m, 1, 1)$ 型の行列式的集合は f の零点集合 $V(f) = f^{-1}(0)$ となり、行列式的特異点論は解析的集合や代数的集合の特異点論の一般化とみなせる。その為、解析的集合に対して成り立つ性質がどこまで成り立つかと言う（やや安直な）動機から近年盛んに研究されていると思われる。この場合、 $\mathcal{K}[(\rho, GL(m, \mathbb{K}) \times GL(q, \mathbb{K}))]$ 同値がこの行列式的集合の分類に対応するので、応用として使われている。

8.2. トレースが零のエルミート行列

ここでは、 G を特殊ユニタリ群 $SU(m)$ して、トレースが零のエルミート行列全体の空間 $\text{Herm}_0(m) = \{X \in M_m(\mathbb{C}) \mid X^* = X, \text{Trace } X = 0\}$ を考える。ただし、 X^* は X の随伴行列とする。 $\text{Herm}_0(m)$ は $m^2 - 1$ 次元 $\mathbb{R}$ ベクトル空間である。さらに、 $(X, Y) = \text{Trace } XY^*$ と置くと、 $(,)$ は $\text{Herm}_0(m)$ 上の正定値内積となる。随伴表現 $Ad : SU(m) \rightarrow GL(\text{Herm}_0(m))$ を $Ad(A)(X) = AXA^*$ とすると、 $\text{Trace } AXA^* = \text{Trace } X$ なので、 $Ad(SU(m)) \subset \text{Iso}^+(\text{Herm}_0(m))$ となる。ただし $\text{Iso}^+(\text{Herm}_0(m))$ は $\text{Herm}_0(m)$ 上の向きを保つ等長写像全体のなす群である。ここで、 $\Sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_p\}$ を $\text{Herm}_0(m)$ の正規直交基底とする。この時、標準内積を持つユークリッド空間 $\mathbb{R}^p$ への等長写像 $\phi_\Sigma : \text{Herm}_0(m) \rightarrow \mathbb{R}^p$ が定まる。従って、 $\text{Iso}^+(\text{Herm}_0(m))$ はこの基底に依存して標準的に $SO(p)$ ($p = m^2 - 1$) と同一視することができる。さらに、リー群の表現 $\rho_\Sigma : SU(m) \rightarrow SO(p) \subset GL(p, \mathbb{R})$ が $y \in \mathbb{R}^p$ に対して $\rho_\Sigma(A)(y) = \phi_\Sigma \circ Ad(A) \circ \phi_\Sigma^{-1}(y)$ と定まる。写像芽 $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\text{Herm}_0(m), O)$ の間の同値関係として $\mathcal{K}[(Ad, SU(m))]$ 同値を考えると、 $TK[(Ad, SU(m))](f) = tf(\mathfrak{M}_n\theta(n)) + \{[\zeta, f] \mid \zeta \in \mathfrak{su}(m)(\mathcal{E}_n)\}$ となる。ここで、写像芽 $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\text{Herm}_0(m), O)$ の**固有関数芽**（微分可能とは限らない）が得られるが、それらを（重複を込めて） $E(f)_i : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, m$) と書き表すと $X \in \text{Herm}_0(m)$ と $A \in SU(m)$ に対して、 X の固有値と AXA^* の固有値は一致するので、以下の重要な命題が成り立つ。

命題 8.1 写像芽 $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\text{Herm}_0(m), O)$ が $\mathcal{K}[(Ad, SU(m))]$ 同値とするならば、 $\phi \in \text{Diff}(n)$ が存在して、 $E(f)_i \circ \phi = E(g)_i$ ($i = 1, \dots, m$) が成り立つ。

この命題から、写像芽が $\mathcal{K}[(Ad, SU(m))]$ 同値ならば、対応する固有値関数芽のグラフの形状は等高線も含めて微分同相で移り会うことを意味している。さらに命題 6.1 の系として以下が成り立つ。

命題 8.2 写像芽 $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\text{Herm}_0(m), O)$ が $\mathcal{K}[Ad(SU(m))]$ 同値であるための必要十分条件は $\phi_\Sigma \circ f, \phi_\Sigma \circ g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ が $\mathcal{K}[\rho_\Sigma(SU(m))]$ 同値となることである。

$\mathcal{K}[\rho_\Sigma(SU(m))]$ 同値に関しては

$$TK[\rho_\Sigma(SU(m))](\phi_\Sigma \circ f) = t(\phi_\Sigma \circ f)(\mathfrak{M}_n\theta(n)) + \{\phi_\Sigma([\zeta, f]) \mid \zeta \in \mathfrak{su}(m)(\mathcal{E}_n)\}$$

である。この $\mathcal{K}[(Ad, SU(m))]$ 同値を考える動機としては、以下の**トポロジカル絶縁体の理論**や**分子伝播の理論**への応用が見込まれる。Hagedorn[19] は分子伝播を量子力学における**エネルギーバンド交差**の観点から記述するため、**ハミルトン作用素**

$$\hat{H}(\varepsilon) = -\frac{\varepsilon^4}{2}\Delta_x + H(x)$$

により定まる、**シュレディンガー方程式** $i\varepsilon^2 \frac{d\psi}{dt} = \hat{H}(\varepsilon)\psi$ を考え、さらに、分子の運動では、原子核と電子の運動のスピードの差が大きいため、 $H(x)$ の部分で近似できるという、**ボルン・オッペンハイマー近似**を採用して、準古典解析的な近似理論（WKB 解析）を展開している。この場合、 $H(x)$ は原子核の位置 $x \in \mathbb{R}^n$ に依存するトレース零のエルミート行列でその固有値関数がエネルギーを表す。Hagedorn は固有値が2つである場合を想定し、その2つの固有値を $E_A(x) \geq E_B(x)$ とあらわす時、 $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n \mid E_A(x) = E_B(x)\}$ を**交差集合**と名付け、ジェネリックには Γ は多様体となり、さらにその余次元は、1, 2, 3, 5 の4つの場合しかないことを示した。さらに、これらの場合が、11種類に分類され、そのうち余次元1の場合が7種類あり、詳しいWKB解析を行っている。残された場合は余次元2の場合（**タイプI**）、余次元3の場合（**タイプBとタイプK**）、余次元5の場合（**タイプJ**）である。

8.2.1. タイプBとK

この場合、Hagedorn の標準形によると空間は $\text{Herm}_0(2)$ であり、その元は一般的に

$$H = \begin{pmatrix} h_3 & h_1 - ih_2 \\ h_1 + ih_2 & -h_3 \end{pmatrix}$$

という形をしている。この空間上の正定値内積を $\langle X, Y \rangle = \frac{1}{2}(X, Y) = \frac{1}{2}\text{Trace } XY$ とすると、**パウリ行列** $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ によって、正規直交基底 $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ が得られる。この時、 $H = h_1\sigma_1 + h_2\sigma_2 + h_3\sigma_3$ となり、表現 $\rho_\Sigma : SU(2) \rightarrow SO(3) \subset GL(3, \mathbb{R})$ が得られる。この ρ_Σ は $SO(3)$ の二重被覆写像となることがわかり、 $SU(2) = Spin(3)$ という事実に対応している。従って、写像芽 $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\text{Herm}_0(2), O)$ は $f(x) = f_1(x)\sigma_1 + f_2(x)\sigma_2 + f_3(x)\sigma_3$ という形をしていて、 $\phi_\Sigma \circ f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x)) \in \mathbb{R}^3$ となる。 f の固有値関数芽は $E_\pm(x) = \pm\sqrt{f_1^2(x) + f_2^2(x) + f_3^2(x)}$ となり、 $E_+(x)$ が非負値の固有値関数芽、 $E_-(x)$ が非正値の固有値関数芽で、 $(\mathbb{R}^n, 0)$ の原点で値が零となり一致する（エネルギー交差が起こる）。命題 8.2 から、以下の命題が成り立つ。

命題 8.3 $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\text{Herm}_0(2), O)$ が $\mathcal{K}[(Ad, SU(m))]$ 同値である為の必要十分条件は $\phi_\Sigma \circ f, \phi_\Sigma \circ g$ が $\mathcal{K}[SO(3)]$ 同値となることである。

写像芽 f の $\mathcal{K}[(\rho, G)]$ **余次元** を $\dim_{\mathbb{R}} \theta(f)/TK[(\rho, G)]_e(f)$ と定義すると以下が成り立つ。

定理 8.4 ([34]) $\mathcal{K}[(Ad, SU(2))]$ 余次元7以下の写像芽 f について、 $\phi_\Sigma \circ f$ は下記の芽のどれかに $\mathcal{K}[SO(3)]$ 同値である：

$\phi_\Sigma \circ f$	条件	$\mathcal{K}[(Ad, SU(2))]$ 余次元
(x_1, x_2, x_3)		0
(x_1, x_2, x_3^ℓ)	$\ell = 2, 3, \dots, 8$	$\ell - 1$
$(x_1, x_2^2, x_3^2 + rx_2^2)$	$r \in [0, \infty)$	5
$(x_1, x_2x_3, \frac{r}{2}(x_2^2 - x_3^2))$	$r \in (0, 1)$	5
$(x_1, x_2^2 + x_3^2, r(x_2^3 + x_3^3))$	$r \in (0, \infty)$	7
$(x_1, x_1x_2, r(x_2^3 + x_3^3))$	$r \in (0, \infty)$	7
$(x_1, x_2x_3 + \frac{r}{2}x_2(x_2^2 - x_3^2), \frac{1}{2}(x_2^2 - x_3^2)(1 + rx_3))$	$r \in (0, \infty)$	7

8.2.2. タイプI

この場合の空間は、トレースが零の実対称2次行列の空間 $\text{Sym}_0(2)$ である。またリー群 G として $SO(2)$ を考える。さらに $SO(2) = SU(2) \cap M_2(\mathbb{R})$ なので、 $\text{Sym}_0(2)$ 上にも正定値内積 $\langle X, Y \rangle = \frac{1}{2} \text{Trace} XY$ が誘導される。この時、パウリ行列の一部 $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_3\}$ は $\text{Sym}_0(2)$ の正規直交基底となる。さらに $\rho_\Sigma(SO(2)) = SO(2)$ も成り立つ。この時、写像芽 $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\text{Sym}_0(2), 0)$ は $f(x) = f_1\sigma_1 + f_2(x)\sigma_3$ と書き表され、従って、 $\phi_\Sigma \circ f(x) = (f_1(x), f_2(x)) \in \mathbb{R}^2$ となる。命題 8.2 から、以下の命題が成り立つ。

命題 8.5 写像芽 $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \text{Sym}_0(2)$ が $\mathcal{K}[(Ad, SO(2))]$ 同値であるための必要十分条件は $\phi_\Sigma \circ f, \phi_\Sigma \circ g$ が $\mathcal{K}[SO(2)]$ 同値となることである。

定理 8.6 ([25]) $n \geq 2$ かつ $\mathcal{K}[(Ad, SO(2))]$ 余次元 6 以下の写像芽 f について、 $\phi_\Sigma \circ f$ は下記の芽のどれかに $\mathcal{K}[SO(2)]$ 同値である：

$\phi_\Sigma \circ f$	条件	$\mathcal{K}[(Ad, SO(2))]$ 余次元
(x_1, x_2)		0
$(x_1, x_2^\ell \pm x_3^2 \pm x_4^2 \pm \cdots \pm x_n^2)$	$\ell = 2, 3, \dots, 7$	$\ell - 1$
$(x_1, x_2^2 x_3 \pm x_3^3 \pm x_4^2 \pm \cdots \pm x_n^2)$	$n \geq 3$	4
$(x_1, x_2^2 x_3 + x_3^4 \pm x_4^2 \pm \cdots \pm x_n^2)$	$n \geq 3$	5
$(x_1^2, x_2^2 + r x_1^2)$	$n = 2, r \in [0, \infty)$	5
$(x_1 x_2, \frac{r}{2}(x_1^2 - x_2^2))$	$n = 2, r \in (0, 1)$	5
$(x_1, x_2^2 x_3 \pm x_3^5 \pm x_4^2 \pm \cdots \pm x_n^2)$	$n \geq 3$	6
$(x_1, x_2^3 \pm x_3^4 \pm x_4^2 \pm \cdots \pm x_n^2)$	$n \geq 3$	6

写像芽 f の固有値関数芽は $E_\pm(x) = \pm \sqrt{f_1(x)^2 + f_2(x)^2}$ なので、 $n = 2$ の場合、それぞれの標準形に対してそのグラフを描くことができる。ここでは、 $\mathcal{K}[(Ad, SO(2))]$ 余次元が 0 と 5 の場合の図は以下になる：余次元 0 のグラフが**デイルック錐**と呼ば



余次元 0; rank 2 余次元 5; rank 1 余次元 5; rank 0 余次元 5; rank 0

れるエネルギー交差で、質量が零のフェルミ粒子に対応している。その他のものは、余次元分だけの変形をすると普遍変形（開折）が得られる。例えば余次元 1 のものの普遍変形は $\phi_\Sigma \circ f(x_1, x_2) = (x_1, x_2^3 + u)$ となり、その分岐も描くことが出来る（講演ではお見せする予定）。

8.2.3. タイプJ

この場合、空間は $\text{Herm}_0(4)$ の 5 次元部分空間 $H_J(4)$ でその元は

$$H = \begin{pmatrix} h_1 & 0 & h_2 + ih_3 & h_4 + ih_5 \\ 0 & h_1 & -h_4 + ih_5 & h_2 - ih_3 \\ h_2 - ih_3 & -h_4 - ih_5 & -h_1 & 0 \\ h_4 - ih_5 & h_2 + ih_3 & 0 & -h_1 \end{pmatrix}, \quad (*)$$

という形をした行列である。 $H_J(4)$ にも正定値内積 $\langle X, Y \rangle = \frac{1}{4} \text{Trace} XY$ が定まり、ここで、

$$\bar{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \bar{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \bar{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_3 \\ -i\sigma_3 & 0 \end{pmatrix}, \bar{\sigma}_4 = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_2 \\ -i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, \bar{\sigma}_5 = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_1 \\ -i\sigma_1 & 0 \end{pmatrix}$$

と置くと、 $\Sigma = \{\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3, \bar{\sigma}_4, \bar{\sigma}_5\}$ は $H_J(4)$ の正規直交基底となる。ここで、 $H_J(4)$ は表現 $Ad : SU(4) \rightarrow \text{Herm}_0(4)$ で不変でないので、命題 6. 3 で構成した $SU(4)$ の部分群 $SU(4)_{H_J(4)}$ の連結成分を $SU(4)_J$ として、随伴表現の制限 $Ad_J = Ad|_{SU(4)_J} : SU(4)_J \rightarrow \text{Isom}^+(H_J(4))$ を考える。さらに、 Σ により、表現行列を考えると $\rho_\Sigma : SU(4)_J \rightarrow SO(5)$ が得られる。

命題 8.7 $\rho_\Sigma : SU(4)_J \rightarrow SO(5)$ は上への写像である。

命題 6. 1 とその後の説明から、以下が成り立つ。

定理 8.8 ([25]) 写像芽 $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (H_J(4), 0)$ が $\mathcal{K}[(Ad_J, SU(4)_J)]$ 同値であるための必要十分条件は $\phi_\Sigma \circ f, \phi_\Sigma \circ g$ が $\mathcal{K}[SO(5)]$ 同値となることである。

この定理からタイプ J の量子力学的ハミルトニアンをエネルギーを保つように分類するには写像芽 $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^5, 0)$ を $\mathcal{K}[SO(5)]$ 同値により分類すれば良いことがわかる。これについては、現在、共同研究者の高橋、寺本両氏と共に研究中である。特に寺本が開発中の自動分類プログラムが力を発揮すると思われる。

8.2.4. 展望

ここでは、今後の展望と問題について箇条書きにする。

(1) **分岐理論**: 考えている系に新たに(電圧、圧力、熱などの)外力が加わった場合の系の分岐を研究するためにはそれらの情報をすべてパラメータとして含む**普遍変形**を求めれば良く、その構成法は、**無限小普遍変形**を求めれば良いこととなり、その計算方法はすでにこの枠組みで確立されている。しかし、系の分岐を考える場合、ある特殊なパラメータ(例えば、電圧)が元々与えられている系を考える場合も想定される。そのために、パラメータを分解することが必要となる。この場合については、以前に研究した[22]の方法を $\mathcal{K}[(\rho, G)]$ 同値の場合に適用する事が可能である。

(2) **同変理論**: 固体物理学では、結晶などを扱うことが多いので、その対称性を記述する有限群で不変な理論が必要となる。この場合も、一般的な枠組みは、1980年代に開発された、「同変写像の特異点論」が有効であり、基本的枠組みはすでに確立している。しかし、応用上は、具体的な対称性を持つ結晶群に対する分類を行わなければならない。この場合は、興味深い現象を記述する場合の個別の分類が重要である。実際、共同研究者の寺本氏が中心になって Bi_2SE_3 というトポロジカル絶縁体の場合に分類が実行されている。ここでも自動分類プログラムが有効である[35, 36]。

(3) **定義域の幾何構造**: $G' \subset GL(n, \mathbb{R})$ に対して、 $\text{Diff}[G'](n)$ を考えることにより、

$$\begin{aligned} \mathcal{A}[G'; G](n, p) &= \text{Diff}[G'](n) \times \text{Diff}[G](p) \\ \mathcal{K}[G'; (\rho, G)](n, p) &= \text{Diff}[G'](n) \rtimes \mathcal{C}[(\rho, G)](n, p) \end{aligned}$$

を考えることができる。この場合は、ラグランジュ特異点論、WKB解析理論、(1)の意味での変形理論等、さらに多くの例[11]が含まれるが、無限小代数構造はより複雑と

なる。例えば、 $G' = O(n)$ として斉次2次関数芽 $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ の $\mathcal{A}_0[O(n); \{1\}]$ 同値は2次形式としての同値関係に対応していて、対称行列の対角化理論に対応する。

(4) **大域的性質**: 大域的な分類は元々の Thom-Mather 理論においても不可能なので、Thom の戦略では、最初に局所的分類を実施し、その後それらの標準形のつながりを研究するという方針であった。その為には、**多重写像芽** の分類理論を構成する必要がある。また、局所理論の分類の標準形から、**ヴァシリエフ型位相不変量** 等が求められる事が予測され、その物性物理的な意味づけが興味深い問題である。

(5) **その他**: 幾何学的同値関係の例でここで述べたもの以外の興味深いものを探すことは重要な問題だと思われる。例えば、8.2 で述べたトレース零のエルミート行列の場合 $\text{Herm}_0(3)$ にはゲルマン行列という素粒子論において基本的役割を担う正規直交基底が知られている。この場合の分類とは何を意味するのか等、興味は尽きない。また、トレースが零とは限らない一般のエルミート行列の場合の応用も考えられる。

参考文献

- [1] V. I. Arnol'd, On matrices depending on parameters. *Uspechi. Math. Nauk* **26** (1971)
- [2] V. I. Arnol'd, S. M. Gusein-Zade and A. N. Varchenko, *Singularities of Differentiable Maps vol. I*. Birkhäuser, Basel 1986.
- [3] J. W. Bruce, On families of symmetric matrices. *Moscow Math. J.* **3**, 335–360, (2003)
- [4] J. W. Bruce and F. Tari, On families of square matrices. *Proc. London Math. Soc.* **89**, 738–762, (2004)
- [5] J. C. F. Costa, H. A. Pedroso and M. J. Saia, A note on equivalence relations of pair of germs. *RIMS Kôkyûroku Bessatsu*, **B55**, 17–39 (2016)
- [6] J. Damon, The unfolding and determinacy theorems for subgroups of $\mathcal{A}$ and $\mathcal{K}$. *Memoirs of A.M.S.* **50** No. **306**, (1984)
- [7] J. Damon, Topological triviality and versality for subgroups of $\mathcal{A}$ and $\mathcal{K}$. *Memoirs of A.M.S.* **75** No. **389**, (1988)
- [8] A. Dimca, Function germs on isolated hypersurface singularities. *Compositio Math.* **53**, 245–268, (1984)
- [9] E. J. Dubuc, C^∞ -schemes. *Amer. J. Math.*, **103**, 683–690, (1981)
- [10] W. Domitrz and J. H. Rieger, Volume preserving subgroups of $\mathcal{A}$ and $\mathcal{K}$ and singularities in unimodular geometry. *Math. Ann.* **345**, 783–817, (2009)
- [11] W. Domitrz, S. Izumiya and H. Teramoto, Unimodular families of symmetric matrices. In preparation
- [12] J. P. Dufour, Bi-stabilité des fronts. *C. R. Acad. Sci. Paris* **285**, 445–448 (1977)
- [13] J. P. Dufour, Families de courbes planes différentiables. *Topology*, **22**, 449–474, (1983)
- [14] T. Fukui and M. Hasegawa, Fronts of Whitney umbrella- a differential geometric approach via blowing up. *J. Singul.* **4**, 35–67, (2012)
- [15] T. Fukunaga and M. Takahashi, Existence and uniqueness for Legendre curves. *J. of Geometry* **104**, 297–307, (2013)
- [16] T. Fukunaga and M. Takahashi, Framed surface in the Euclidean space. *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)* (2018) DOI:10.1007/s00574-018-0090-z
- [17] J. J. Gervais, Sufficiency of jets. *Pacific Journal of Mathematics*, **72**, 419–422, (1977)
- [18] J. J. Gervais, G-stability of mappings and stability of bifurcation diagrams. *J. London Math. Soc.* **25**, 551–563, (1982)
- [19] G. A. Hagedorn, Molecular propagation through electron energy level crossings. *Mem. Amer. Math. Soc.* **111**, 130pp (1994)

- [20] G. Ishikawa, Families of functions dominated by distributions of $\mathcal{C}$ -classes of mappings. *Annales de l'institute de Fourier*, **33**, 199–217, (1981)
- [21] G. Ishikawa, Singularities of frontals. *Advanced Studies in Pure Mathematics*, **78**, 55–106, (2018)
- [22] S. Izumiya, Generic bifurcations of varieties. *manuscripta math.*, **46**, 137–164, (1984)
- [23] S. Izumiya and S. Matsuoka, Notes on smooth function germs on varieties. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **97**, 146–150, (1986)
- [24] S. Izumiya, M. Takahashi and H. Teramoto, Geometric equivalence among smooth map germs. Preprint, 2018
- [25] S. Izumiya, M. Takahashi and H. Teramoto, Geometric equivalence among smooth section germs of vector bundle with respect to structure groups. In preparation
- [26] H. Levine, Singularities of differentiable mappings, notes of lectures by R. Thom, University of Bonn, 1960, reprinted in *Proceedings of Liverpool Singularities-Symposium I*, *Lecture Notes in Math.* **192**, Springer Verlag, New York 1971, 1–89.
- [27] B. Malgrange, *Ideals of differentiable functions*. Oxford Univ. Press, London, 1966
- [28] J. Martinet, *Singularities of smooth Functions and Maps*. *Lecture Note Series*, vol. **58**, Cambridge University Press, Cambridge (1982)
- [29] L. F. Martins and K. Saji, Geometric invariants of cuspidal edges. *Canadian Journal of Mathematics*, **68**, 445–562, (2016)
- [30] L. F. Martins and K. Saji, Geometry of cuspidal edges with boundary. *Topology and its Applications*, **234**, 209–219, (2018)
- [31] J. Mather, Stability of C^∞ -Mappings III. Finitely Determined Map Germs. *Publ. Math. I.H.E.S.* **36**, 127–156, (1968)
- [32] J. Mather, Stability of C^∞ -Mappings IV. Classification of stable germs by $\mathbb{R}$ -algebras. *Publ. Math. I.H.E.S.* **37** 223–248, (1969)
- [33] E. A. da Silva and L. A. Favaro, Bi- $\mathcal{K}$ -equivalence and local $\mathbb{R}$ -algebras (Portuguese). *Rev. Mat. Estatist.* **1** 15–20, (1983)
- [34] H. Teramoto, K. Kondo, S. Izumiya, M. Toda and T. Komatsuzaki, Classification of Hamiltonians in neighborhoods of band crossings in terms of the theory of singularities. *J. Math. Phys.* **58** no. 7, 073502, 39 pp, (2017)
- [35] 寺本央、結晶点群、時間反転対称性の下でのバンド構造の幾何学的分類 —特異点論の観点から—。第65回トポロジーシンポジウム講演集、81–89、(2018)
- [36] H. Teramoto, Lecture Note for Application of Comprehensive Gröbner system to Singularity Theory. Unpublished note (2018)
- [37] J. C. Tougeron, *Ideaux fonctions différentiables*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1972
- [38] J. M. West, The differential geometry of the cross-cap. Ph.D. thesis, The University of Liverpool, 1995.