

異なる Dynkin 型のアフィン量子群の有限次元表現 圏の間に見られる類似性について

大矢 浩徳 (芝浦工大システム理工)*

概 要

本稿では, $A_{2n-1}^{(1)}$ 型と $B_n^{(1)}$ 型の量子アフィン代数の有限次元表現圏の量子 Grothendieck 環の間に得られた同型について報告する. この同型の系として, $B_n^{(1)}$ 型量子アフィン代数の既約表現の (q, t) -指標の様々な正値性が得られる. さらにこの同型が Kashiwara-Kim-Oh によって得られた同型に特殊化されることから, $B_n^{(1)}$ 型量子アフィン代数の既約表現の q -指標が Kazhdan-Lusztig アルゴリズムによって求められるという Hernandez の予想が証明されることを述べる. 本研究は David Hernandez 氏との共同研究である.

1. 導入

1.1. 問題設定

複素単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ に対し, 対応するアフィン Lie 環 $\hat{\mathfrak{g}}$ とはこのループ化 $\mathcal{L}\mathfrak{g} := \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t^{\pm 1}]$ を以下の形で中心拡大した Lie 環 $\hat{\mathfrak{g}} = \mathcal{L}\mathfrak{g} \oplus \mathbb{C}K$ である:

$$[X \otimes t^m + aK, Y \otimes t^n + bK] = [X, Y] \otimes t^{m+n} + \delta_{m+n,0} m\kappa(X, Y)K.$$

ここで, $X, Y \in \mathfrak{g}, m, n \in \mathbb{Z}, a, b \in \mathbb{C}$ であり, $\kappa(-, -)$ は $\mathfrak{g}$ 上の Killing 形式とする. $\mathfrak{g}$ の Dynkin 型が $X_n (X = A, \dots, G)$ であるとき, $\hat{\mathfrak{g}}$ は $X_n^{(1)}$ 型アフィン Lie 環と呼ばれる.

量子アフィン代数 (= アフィン量子群) $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ とは, アフィン Lie 環 $\hat{\mathfrak{g}}$ の普遍展開環 $\mathcal{U}(\hat{\mathfrak{g}})$ にパラメータ q を入れて変形 (q -変形) した代数であり, Drinfeld, Jimbo によって '80 年代の中頃に導入された. 量子アフィン代数 $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ は $\mathcal{U}(\hat{\mathfrak{g}})$ と同様に Hopf 代数の構造を持つが, 顕著な違いとして量子アフィン代数の方は余可換ではない. 表現の言葉で述べると, 2つの $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ の表現 V, W に対し, テンソル表現 $V \otimes W$ を定義することができるが, 一般にはこれは $W \otimes V$ と成分の入れ替えでは同型にならない. 一方で, V, W が有限次元既約表現のとき, $V \otimes W$ と $W \otimes V$ は “generic には” 同型となることが知られている. しかし, このときの同型写像も成分の入れ替えではなく, 非自明な写像となり, こうして得られる非自明な写像の族が量子逆散乱法, 結び目理論, Schur-Weyl 双対性など様々な場面において現れる量子 Yang-Baxter 方程式のスペクトルパラメータ付きの非自明解を与える. このことに動機づけられ, 様々な角度から $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ の有限次元表現論の研究が行われてきたが, $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ の有限次元表現圏はモノイダルアーベル圏として, 半単純でもなければブレイディングも存在せず, その構造は今もよく理解されていない点が多い. さらに, 既約表現の分類は Chari-Pressley によって '90 年代前半に行われたものの, それ

本研究は the European Research Council under the European Union's Framework Programme H2020 with ERC Grant Agreement number 647353 Qaffine の助成を受けたものである.

2010 Mathematics Subject Classification: 17B37, 81R50, 81R10, 13F60

キーワード: 量子アフィン代数, 量子 Grothendieck 環, Kazhdan-Lusztig アルゴリズム, 量子団代数, 双対標準基底

* 〒337-8570 埼玉県さいたま市見沼区深作 307 芝浦工業大学 システム理工学部 数理科学科
e-mail: hoyo@shibaura-it.ac.jp
web: <http://www.sic.shibaura-it.ac.jp/~hoya>

それぞれの次元や“指標”(q -指標と呼ばれる)を与える一般公式は存在しない。そこで、ここでは以下の2つの基本的な未解決問題を考える：

(Q1) $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ の既約表現の次元、および q -指標を一般的に求める方法はあるか？

(Q2) $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ の有限次元表現圏の Grothendieck 環の“良い記述”は存在するか？

(Q1) は量子アフィン代数の個々の表現に関する問題、(Q2) は表現圏のモノイダル圏としての構造に関する問題である。

量子アフィン代数 $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ は対応する $\hat{\mathfrak{g}}$ の Dynkin 型 $X_n^{(1)}$ の X が ADE のいずれかであるとき対称型と呼ばれ、それ以外るとき非対称型と呼ばれる。(Q1), (Q2) についてもう少し詳しく背景を述べるが、ここでは $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ が対称型か非対称型かという点が重要な違意を生んでいることが見て取れると思われる。

(Q1) について：既約表現の q -指標の計算について、アフィン Lie 環の Dynkin 型が対称型の場合に、Nakajima は既約表現の q -指標を求めるアルゴリズムを与えた [N04]。つまり、この場合には (Q1) には一つの解答が与えられている。これは q -指標の t -変形 ((q, t) -指標) を考え、Kazhdan-Lusztig アルゴリズムの結果として既約表現の q -指標を得るというものであった。Nakajima の t -変形の構成は次数付き叢多様体の幾何に基づいており、この構成が Kazhdan-Lusztig アルゴリズムの結果が正当な既約表現の q -指標の t -変形である ($= t = 1$ で正しく q -指標に特殊化される) ことを保証していた。

非対称型の場合への拡張の試みとして、Hernandez は Frenkel-Reshetikhin のオリジナルの q -指標の構成を基に代数的に標準表現の q -指標の t -変形を構成した [H04]。これを用いて、形式的に Kazhdan-Lusztig アルゴリズムを働かせることで、“既約表現の (q, t) -指標”が得られるが、この代数的な構成からは $t = 1$ でこれが実際の q -指標に特殊化されるという事実は保証されない。つまりこの場合は以下は一般には未だ予想である。

予想 1.1. 非対称型の場合も、既約表現の (q, t) -指標は $t = 1$ で q -指標に特殊化される。つまり、既約表現の q -指標は Kazhdan-Lusztig アルゴリズムによって求めることができる。

(Q2) について：ここではまず何が“良い記述”であるかということを述べておく必要がある。我々は、既約表現のなす Grothendieck 環の基底に関して、積に関する構造定数の情報が組織的に得られる場合に“構造が記述されている”と考える。この種の問題へのアプローチの一つのとして Hernandez-Leclerc によって導入された団代数のモノイダル圏化という指導原理がある [HL10]。

団代数とは Fomin-Zelevinsky によって '00 年代前半に導入された抽象的な代数系であって、団変数と団単項式と呼ばれる特別な元が指定されている環である [FZ02]。ここで、この代数系の特徴は団変数、団単項式という元たちを有限の初期データからあるアルゴリズムによって一般には無限に作る手続き (変異と呼ばれる) が与えられていることにある。

量子アフィン代数の有限次元表現圏の Grothendieck 環を考えると、ここに団代数の構造が入ることが知られている [HL16]。ここでの団変数、団単項式が既約表現の類に含まれるということがモノイダル圏化の予想である (量子アフィン代数の有限次元表現圏が団代数のモノイダル圏化を与えと言われる)。団単項式は団変数の積で表されるものなので、もしモノイダル圏化予想が正しければ、互いにテンソル積をとっても既約性

の崩れないような表現の族を組織的に構成する手段が与えられるということになり、これは Grothendieck 環の積の構造定数が単純な形になる部分を (一般には) 無限に抜き出しているという点で表現環の良い記述であると言える。現在 Qin によって対称型の場合にはこの予想は解決されており [Q17], ここでもこれを非対称型の結果に拡張することが目標となる。

1.2. 主結果の概要

我々の主結果は、 $A_{2n-1}^{(1)}$ 型と $B_n^{(1)}$ 型の (q, t) -指標の間の関係に着目することで、 $B_n^{(1)}$ 型の (Q1), (Q2) にアプローチするものである。

$X_n^{(1)}$ 型の量子アフィン代数の有限次元表現の圏を $\mathcal{C}_{X_n^{(1)}}$, その Grothendieck 環を $K(\mathcal{C}_{X_n^{(1)}})$, 量子 Grothendieck 環 ($=\mathcal{C}_{X_n^{(1)}}$ の既約表現の (q, t) -指標のなす代数) を $K_t(\mathcal{C}_{X_n^{(1)}})$ と書く。我々の結果は以下である：

定理 1.2 (Hernandez-O. (定理 4.1)). $\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$ -代数としての同型

$$K_t(\mathcal{C}_{A_{2n-1}^{(1)}}) \simeq K_t(\mathcal{C}_{B_n^{(1)}}), \quad \left\{ \begin{array}{c} \text{既約表現の} \\ (q, t)\text{-指標} \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{既約表現の} \\ (q, t)\text{-指標} \end{array} \right\}.$$

が存在する。

1.1 節を踏まえると、この同型は対称型と非対称型を繋いでいることが重要である。実際に、 $A_{2n-1}^{(1)}$ の場合に知られていた結果をこの同型を用いて $B_n^{(1)}$ 型の結果に翻訳することで、 $B_n^{(1)}$ 型の場合には知られていなかった様々な正值性に関する結果が得られる (系 4.4, 4.5)。

さらに、我々が得た定理 1.2 の同型が、Kashiwara-Kim-Oh によって得られた以下の形の通常の Grothendieck 環の同型

$$K(\mathcal{C}_{A_{2n-1}^{(1)}}) \simeq K(\mathcal{C}_{B_n^{(1)}}), \quad \{\text{既約表現}\} \leftrightarrow \{\text{既約表現}\}.$$

に $t = 1$ で特殊化されることが示される。これにより、 $B_n^{(1)}$ 型において予想 1.1(=(Q1)) が肯定的に解決される (系 4.8)。さらに、(Q2) の Grothendieck 環の記述に関しても、 $B_n^{(1)}$ 型と $A_{2n-1}^{(1)}$ 型で問題が等価であることがわかる¹。

なお、 $A_{2n-1}^{(1)}/B_n^{(1)}$ 型以外の場合についての上記のような対応については現在取り組み中であるが、今後の課題については 5 章を参照されたい。

2. 量子アフィン代数の有限次元表現論

本章ではまず、量子アフィン代数の有限次元表現論について簡単に復習する。以下は一般的な記号である：

- $\mathfrak{g}$ を X_n 型複素単純 Lie 環 ($X_n = A_n, B_n, C_n, \dots, G_2$) とし、 $\{\alpha_i \mid i \in I\}$ (resp. $\{h_i \mid i \in I\}$) をその単純ルート (resp. 余ルート) の集合とする。
- $C = (c_{ij})_{i,j \in I} = (\langle h_i, \alpha_j \rangle)_{i,j \in I}$ を $\mathfrak{g}$ の Cartan 行列とし、 $(r_i)_{i \in I} \in \mathbb{Z}_{>0}^I$ を、

$$(i) \ r_i c_{ij} = r_j c_{ji}, \ \forall i, j \in I \quad (ii) \ \min\{r_i \mid i \in I\} = 1$$

を満たす唯一の正の整数の組とする。($X = \text{ADE}$ の場合、全ての $i \in I$ に対して $r_i = 1$.)

¹ この等価性に関しては論理的には、Kashiwara-Kim-Oh の結果から従っていると言った方が良い。我々の寄与は正確に述べるとこれを量子 Grothendieck 環 (量子団代数) に持ち上げた部分である。

- x を 1 の冪根でない 0 以外の複素数, あるいは不定元とする. このとき, 各 $i \in I, n \in \mathbb{Z}$ に対し,

$$x_i := x^{r_i}, \quad [n]_x := \frac{x^n - x^{-n}}{x - x^{-1}},$$

とする.

以下では, q を 1 の冪根でない 0 以外の複素数とする.

定義 2.1 ([D88, B94]). $X_n^{(1)}$ 型量子ループ代数 $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})(= \mathcal{U}_q(X_n^{(1)}))$ とは,

$$k_i^{\pm 1} \ (i \in I), \ x_{i,r}^{\pm} \ ((i, r) \in I \times \mathbb{Z}), \ h_{i,r} \ ((i, r) \in I \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}))$$

という生成元と, 以下の定義関係式によって定まる $\mathbb{C}$ -代数である (特に指定のない限り添え字は動きうる範囲全てを動くとする):

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & k_i k_i^{-1} = 1 = k_i^{-1} k_i, \ k_i k_j = k_j k_i, \\ \text{(II)} \quad & k_i x_{j,r}^{\pm} = q_i^{\pm c_{ij}} x_{j,r}^{\pm} k_i, \\ \text{(III)} \quad & [k_i, h_{j,r}] = 0, \\ \text{(IV)} \quad & [x_{i,r}^+, x_{j,s}^-] = \delta_{ij} \frac{\phi_{i,r+s}^+ - \phi_{i,r+s}^-}{q_i - q_i^{-1}}, \\ \text{(V)} \quad & [h_{i,r}, x_{j,s}^{\pm}] = \pm \frac{[rc_{ij}]_{q_i}}{r} x_{j,r+s}^{\pm}, \\ \text{(VI)} \quad & [h_{i,r}, h_{j,s}] = 0, \\ \text{(VII)} \quad & x_{i,r+1}^{\pm} x_{j,s}^{\pm} - q_i^{\pm c_{ij}} x_{i,r}^{\pm} x_{j,s+1}^{\pm} = q_i^{\pm c_{ij}} x_{j,s}^{\pm} x_{i,r+1}^{\pm} - x_{j,s+1}^{\pm} x_{i,r}^{\pm}, \\ \text{(VIII)} \quad & \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{1-c_{ij}}} \sum_{k=0}^{1-c_{ij}} (-1)^k \begin{bmatrix} 1-c_{ij} \\ k \end{bmatrix}_{q_i} x_{i,r_{\sigma(1)}}^{\pm} \cdots x_{i,r_{\sigma(k)}}^{\pm} x_{j,s}^{\pm} x_{i,r_{\sigma(k+1)}}^{\pm} \cdots x_{i,r_{\sigma(1-c_{ij})}}^{\pm} = 0. \end{aligned}$$

ただし, $i, j \in I, i \neq j, r_1, \dots, r_{1-c_{ij}}, s \in \mathbb{Z}$.

ここで,

$$\phi_i^{\pm}(z) := \sum_{r=0}^{\infty} \phi_{i,\pm r}^{\pm} z^{\pm r} = k_i^{\pm 1} \exp \left(\pm (q_i - q_i^{-1}) \sum_{r>0} h_{i,\pm r} z^{\pm r} \right).$$

さらに, $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})$ は Hopf 代数の構造を持つことが知られている (例えば [CP] 参照). ただし, これは Chevalley 型の表示という別の $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})$ の表示を用いて定義される構造で, 上に示した生成元で余積を記述するのは難しい. また, $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})$ は量子アフィン代数 $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ をある中心元の生成するイデアルで割ったものとして書けるが, $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ の有限次元表現においてはその中心元が 0 で作用する表現のみ考えて一般性を失わないので, 以下では量子ループ代数 $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})$ の有限次元表現を考える.

注意 2.2. 量子ループ代数 $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})$ において, $\{k_i^{\pm 1}, x_{i,0}^{\pm} \mid i \in I\}$ の生成する $\mathbb{C}$ -部分代数を考えると, これは Hopf 部分代数であり, $\mathfrak{g}$ の量子包絡環 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ に Hopf 代数として同型である.

$\mathcal{C}_{X_n^{(1)}}^{\mathbb{C}}$ を量子ループ代数 $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})$ の有限次元表現のなす圏とする². これはモノイダルアーベル圏である. いま, $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})$ の生成元の一部 $\{k_i, h_{i,r} \mid i \in I, r \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ は互

² 厳密には $\mathcal{C}_{X_n^{(1)}}^{\mathbb{C}}$ は量子ループ代数 $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})$ の 1 型有限次元表現のなす圏とする. 有限次元表現が 1 型であるとは $\{k_i \mid i \in I\}$ の固有値が全て $q^m, m \in \mathbb{Z}$ の形であることを言う. 量子ループ代数 $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})$ の有限次元表現においては 1 型の表現のみを考えても一般性を失わない.

いに可換なので、任意の $\mathcal{C}_{X_n^{(1)}}$ の対象 V はこれらの作用に関する同時広義固有空間分解 $V = \bigoplus_m V_m$ を持つ。ここで [CP, FR99] において、この同時固有値 m は $\mathbb{Z}$ -係数無限変数 Laurent 多項式環

$$\mathcal{Y}_{\mathbb{C}^\times, X_n^{(1)}} := \mathbb{Z}[Y_{i,a}^{\pm 1} \mid i \in I, a \in \mathbb{C}^\times]$$

内の Laurent 単項式として指定されることが示された。具体的な対応は、各 $\phi_{i,\pm r}^\pm$ の V_m における広義固有値を $\gamma_{i,\pm r}^\pm$ と書き、 m を

$$m = \prod_{i \in I, a \in \mathbb{C}^\times} Y_{i,a}^{u_{i,a}},$$

と表示したとき、各 $i \in I$ に対して、

$$\sum_{r=0}^{\infty} \gamma_{i,\pm r}^\pm z^{\pm r} = \prod_{a \in \mathbb{C}^\times} \left(q_i \frac{1 - z q_i^{-1} a}{1 - z q_i a} \right)^{u_{i,a}}$$

として与えられる。ここで、これらはそれぞれ $\mathbb{C}[[z]]$, $\mathbb{C}[[z^{-1}]]$ での等式である。なお、 $\phi_{i,0}^\pm = k_i^{\pm 1}$ であったことに注意すると、 $Y_{i,a}$ は有限次元単純 Lie 環の表現論における $i \in I$ に対応する基本ウェイト e^{ϖ_i} の類似であることがわかる。同時広義固有空間 V_m を V の l -ウェイト m の l -ウェイト空間という。いま、

$$\mathcal{B}_{\mathbb{C}^\times, X_n^{(1)}} := \left\{ \prod_{i \in I, a \in \mathbb{C}^\times} Y_{i,a}^{m_{i,a}} \mid m_{i,a} \geq 0 \right\} \subset \mathcal{Y}_{\mathbb{C}^\times, X_n^{(1)}}$$

とし、この元を支配的単項式とよぶ。これは、有限次元単純 Lie 環の表現論における支配的整ウェイトの類似であり、実際に最高ウェイト理論の類似で以下が成立する：

定理 2.3 ([CP95, CP]). $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^\times, X_n^{(1)}}$ と $\mathcal{C}_{X_n^{(1)}}$ の単純対象の同型類の間に 1 対 1 対応が存在する。

この定理で $m \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}^\times, X_n^{(1)}}$ に対応する $\mathcal{C}_{X_n^{(1)}}$ の単純対象を $L(m)$ と書く。ここでは、

$$\dim L(m)_m = 1 \quad x_{i,r}^+ \cdot L(m)_m = 0, \forall i \in I, r \in \mathbb{Z}$$

となるように対応させている。特に $L(Y_{i,a})$ の形の表現は基本表現と呼ばれる。さらに q -指標準同型と呼ばれる以下の射 χ_q が定義される：

定理 2.4 ([FR99]). モノイダルアーベル圏 $\mathcal{C}_{X_n^{(1)}}$ の Grothendieck 環を $K(\mathcal{C}_{X_n^{(1)}})$ とする。このとき、対応

$$[V] \mapsto \sum_m \dim(V_m) m$$

は単射環準同型 $\chi_q: K(\mathcal{C}_{X_n^{(1)}}) \rightarrow \mathcal{Y}_{\mathbb{C}^\times, X_n^{(1)}}$ を与える。

注意 2.5. 一般に $\mathcal{C}_{X_n^{(1)}}$ の対象 V, W に対し、 $V \otimes W \simeq W \otimes V$ は成立しないが、 $K(\mathcal{C}_{X_n^{(1)}})$ は可換である。

注意 2.6. 環準同型 $\text{cl}: \mathcal{Y}_{\mathbb{C}^\times, X_n^{(1)}} \rightarrow \mathbb{Z}[e^{\pm \varpi_i} \mid i \in I], Y_{i,a} \mapsto e^{\varpi_i}$ を考えると、 $\text{cl}(\chi_q(V))$ は注意 2.2 で指定された $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}) \hookrightarrow \mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})$ を介して、 V を $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ の表現とみなしたときの通常の指標に一致する。

各 $i \in I, a \in \mathbb{C}^\times$ に対し,

$$A_{i,a} := Y_{i,aq_i^{-1}} Y_{i,aq_i} \left(\prod_{j: c_{ji}=-1} Y_{j,a}^{-1} \right) \left(\prod_{j: c_{ji}=-2} Y_{j,aq^{-1}}^{-1} Y_{j,aq}^{-1} \right) \left(\prod_{j: c_{ji}=-3} Y_{j,aq^{-2}}^{-1} Y_{j,a}^{-1} Y_{j,aq^2}^{-1} \right).$$

とする. (注意 2.6 の記号で, $\text{cl}(A_{i,a}) = e^{\alpha_i}$ である.) ここで, $\mathcal{Y}_{\mathbb{C}^\times, X_n^{(1)}}$ 内の Laurent 単項式に対し, 半順序を

$$m \leq m' \Leftrightarrow \text{ある非負整数の組 } (v_{i,a})_{i \in I, a \in \mathbb{C}^\times} \text{ に対し, } m(m')^{-1} = \prod_{i \in I, a \in \mathbb{C}^\times} A_{i,a}^{-v_{i,a}}$$

と定義する. この半順序によって, m が $\chi_q(L(m))$ の最高単項式であることが以下のように述べられる:

定理 2.7 ([FM01]). 支配的単項式 $m \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}^\times, X_n^{(1)}}$ に対し, $\mathcal{Y}_{\mathbb{C}^\times, X_n^{(1)}}$ の元 $\chi_q(L(m)) - m$ に現れる単項式は全て m よりも半順序 $\leq$ に関して真に小さい.

今 $\mathcal{C}_{\bullet, X_n^{(1)}}$ を,

$$\chi_q(V) \in \mathbb{Z}[Y_{i,q^r}^{\pm 1} \mid i \in I, r \in \mathbb{Z}] =: \mathcal{Y}_{X_n^{(1)}}$$

を満たす対象 V のなす $\mathcal{C}_{X_n^{(1)}}$ の充満部分圏とおく. このとき, $\mathcal{C}_{\bullet, X_n^{(1)}}$ は $\mathcal{C}_{X_n^{(1)}}$ の部分モノイダルアーベル圏である. 圏 $\mathcal{C}_{X_n^{(1)}}$ の単純対象の構造およびモノイダル圏としての非自明な構造の研究は, $\mathcal{C}_{\bullet, X_n^{(1)}}$ に帰着される [HL10, §3.7]. 以降は常に圏 $\mathcal{C}_{\bullet, X_n^{(1)}}$ 内の対象を考えるので, 以下の記法を用いる:

$$Y_{i,r} := Y_{i,q^r} \quad A_{i,r} := A_{i,q^r} \quad \mathcal{B}_{X_n^{(1)}} := \mathcal{B}_{\mathbb{C}^\times, X_n^{(1)}} \cap \mathcal{Y}_{X_n^{(1)}}.$$

例 2.8. $\mathcal{Lg} = \mathfrak{sl}_2[t^{\pm 1}]$ ($A_1^{(1)}$ 型) のとき, $I = \{1\}$ であり,

$$\chi_q(L(Y_{1,r})) = Y_{1,r} + Y_{1,r+2}^{-1} = Y_{1,r}(1 + A_{1,r+1}^{-1}).$$

$\mathcal{Lg} = \mathfrak{so}_5[t^{\pm 1}]$ ($B_2^{(1)}$ 型) のとき, $I = \{1, 2\}$ であり,

$$\begin{aligned} \chi_q(L(Y_{1,r})) &= Y_{1,r} + Y_{2,r+1} Y_{2,r+3} Y_{1,r+4}^{-1} + Y_{2,r+1} Y_{2,r+5}^{-1} + Y_{1,r+2} Y_{2,r+3}^{-1} Y_{2,r+5}^{-1} + Y_{1,r+6}^{-1} \\ &= Y_{1,r}(1 + A_{1,r+2}^{-1} + A_{1,r+2}^{-1} A_{2,r+4}^{-1} + A_{1,r+2}^{-1} A_{2,r+2}^{-1} A_{2,r+4}^{-1} + A_{1,r+2}^{-1} A_{1,r+4}^{-1} A_{2,r+2}^{-1} A_{2,r+4}^{-1}). \end{aligned}$$

各 $m = \prod_{i \in I, r \in \mathbb{Z}} Y_{i,r}^{u_{i,r}} \in \mathcal{B}_{X_n^{(1)}}$ に対し, 標準表現 $M(m)$ を,

$$M(m) := \bigotimes_{r \in \mathbb{Z}}^{\rightarrow} \left(\bigotimes_{i \in I} L(Y_{i,r})^{\otimes u_{i,r}} \right)$$

と定義する.

注意 2.9. 実は $\bigotimes_{i \in I} L(Y_{i,r})^{\otimes u_{i,r}}$ の部分の同型類はテンソル積の順序によらない. $\bigotimes_{r \in \mathbb{Z}}^{\rightarrow}$ は左から右へ数の増える順にテンソル積を取るという意味である.

命題 2.10. $\{[L(m)] \mid m \in \mathcal{B}_{X_n^{(1)}}\}$ と $\{[M(m)] \mid m \in \mathcal{B}_{X_n^{(1)}}\}$ はともに $K(\mathcal{C}_{\bullet, X_n^{(1)}})$ の $\mathbb{Z}$ -基底である.

いま, $\chi_q(M(m))$ は $L(Y_{i,0}), i \in I$ の q -指標がわかれば容易に計算可能なものである. これより, $\{[L(m)] \mid m \in \mathcal{B}_{X_n^{(1)}}\}$ と $\{[M(m)] \mid m \in \mathcal{B}_{X_n^{(1)}}\}$ の基底の変換行列を求めることができれば既約表現の q -指標が求められる. この変換行列を求めるための道具が次に説明する (q, t) -指標である.

3. 量子 Grothendieck 環

Varagnolo-Vasserot[VV03], Nakajima[N04] によって対称型の場合に $K(\mathcal{C}_{\bullet, X_n^{(1)}})$ の t -変形となる量子 Grothendieck 環 $K_t(\mathcal{C}_{\bullet, X_n^{(1)}})$ が導入された. 彼らの構成は, 次数付き叢多様体を用いる幾何的なものである. しかし, 本稿では非対称型を考えるため, Hernandez[H04] による代数的な構成を復習する. Hernandez の構成は ADE 型の場合には, Varagnolo-Vasserot, Nakajima によって構成されたものと同等のものになる.

まず, q -指標の入る空間 $\mathcal{Y}_{X_n^{(1)}}$ を以下のデータを用いて非可換化する:

C を X_n 型の Cartan 行列として, $C(z) = (C(z)_{ij})_{i,j \in I}$, $\tilde{C}(z) = (\tilde{C}(z)_{ij})_{i,j \in I}$ (z : 不定元) を

$$C(z)_{ij} = \begin{cases} z^{r_i} + z^{-r_i} & i = j \text{ のとき,} \\ [c_{ij}]_z & i \neq j \text{ のとき,} \end{cases} \quad \tilde{C}(z) = C(z)^{-1}$$

で定義する. さらに, 各 $\tilde{C}(z)_{ij}$ を形式的 Laurent 級数環 $\mathbb{Z}((z^{-1}))$ の元とみなし,

$$\tilde{C}(z)_{ji} = \sum_{r \in \mathbb{Z}} \tilde{c}_{ji}(r) z^r \in \mathbb{Z}((z^{-1}))$$

と書く. このとき $X_n^{(1)}$ 型量子トラス $\mathcal{Y}_{t, X_n^{(1)}}$ とは以下で定義される $\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$ -代数である:

生成元: $\tilde{Y}_{i,r}^{\pm 1}$ ($i \in I, r \in \mathbb{Z}$)

関係式: (I) $\tilde{Y}_{i,r} \tilde{Y}_{i,r}^{-1} = 1 = \tilde{Y}_{i,r}^{-1} \tilde{Y}_{i,r}$,

(II) 各 $i, j \in I, r, s \in \mathbb{Z}$ に対し,

$$\tilde{Y}_{i,r} \tilde{Y}_{j,s} = t^{\gamma(i,r;j,s)} \tilde{Y}_{j,s} \tilde{Y}_{i,r}.$$

ここで, $\gamma: (I \times \mathbb{Z})^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ は

$$\gamma(i, r; j, s) := \tilde{c}_{ji}(-r_j - r + s) + \tilde{c}_{ji}(r_j + r - s) - \tilde{c}_{ji}(r_j - r + s) - \tilde{c}_{ji}(-r_j + r - s)$$

で与えられる.

例 3.1. B_2 型 Cartan 行列 $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ を考えると,

$$C(z) = \begin{pmatrix} z^2 + z^{-2} & -1 \\ -z - z^{-1} & z + z^{-1} \end{pmatrix} \quad \tilde{C}(z) = \frac{1}{z^3 + z^{-3}} \begin{pmatrix} z + z^{-1} & 1 \\ z + z^{-1} & z^2 + z^{-2} \end{pmatrix}$$

となるので,

$$\begin{aligned} \tilde{C}(z)_{11} &= \sum_{k \geq 0} (-1)^k (z^{-6k-2} + z^{-6k-4}), & \tilde{C}(z)_{12} &= \sum_{k \geq 0} (-1)^k z^{-6k-3}, \\ \tilde{C}(z)_{21} &= \sum_{k \geq 0} (-1)^k (z^{-6k-2} + z^{-6k-4}), & \tilde{C}(z)_{22} &= \sum_{k \geq 0} (-1)^k (z^{-6k-1} + z^{-6k-5}), \end{aligned}$$

である. よって, $\tilde{c}_{ji}(r)$ は以下のようにまとめられる (空欄は 0 の意味である):

$\tilde{c}_{j1}(r)$	-2	-4	-6	-8	r	-10	-12	-14	-16	...	$\tilde{c}_{j2}(r)$	-1	-3	-5	-7	r	-9	-11	-13	-15	...
$j=1$	1	1		-1	-1			1	1	...	$j=1$	1			-1					1	...
$j=2$	1	1		-1	-1			1	1	...	$j=2$	1		1	-1		-1	1			...

一般の B_n の同様の表については [HO18, Example 4.3, Appendix A] を参照のこと.

いま, $\mathbb{Z}$ -代数準同型

$$\text{ev}_{t=1}: \mathcal{Y}_{t, X_n^{(1)}} \rightarrow \mathcal{Y}_{X_n^{(1)}}, \begin{cases} t^{1/2} \mapsto 1, \\ \tilde{Y}_{i,r} \mapsto Y_{i,r}, i \in I, r \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

が存在する. この射は $t = 1$ への特殊化と呼ばれる. さらに, 以下のバー対合と呼ばれる $\mathbb{Z}$ -反代数対合

$$\overline{\cdot}: \mathcal{Y}_{t, X_n^{(1)}} \rightarrow \mathcal{Y}_{t, X_n^{(1)}}, \begin{cases} t^{1/2} \mapsto t^{-1/2}, \\ \tilde{Y}_{i,r} \mapsto t^{-1} \tilde{Y}_{i,r}, i \in I, r \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

が存在する.

各 $\mathcal{Y}_{X_n^{(1)}}$ の Laurent 単項式 m に対し, ある $\mathcal{Y}_{t, X_n^{(1)}}$ の $t^{\frac{1}{2}\mathbb{Z}}$ 係数 Laurent 単項式 $\underline{m}$ であって, $\overline{m} = \underline{m}$ を満たすものがただ一つ存在する. (e.g. $\underline{Y_{i,r}} = t^{-1/2} \tilde{Y}_{i,r}$.) この記号で, $\tilde{A}_{i,r} := \underline{A_{i,r}}$ と定義する. また, $\mathcal{Y}_{t, X_n^{(1)}}$ の ($t^{\frac{1}{2}\mathbb{Z}}$ 係数) 支配的単項式を $\mathcal{Y}_{X_n^{(1)}}$ の場合と同様に定義する.

次に $\mathcal{Y}_{t, X_n^{(1)}}$ の中で量子 Grothendieck 環を定義する. 各 $i \in I$ に対し,

$$K_{i,t} := \langle \tilde{Y}_{i,r} (1 + t \tilde{A}_{i,r+r_i}^{-1}), \tilde{Y}_{j,r}^{\pm 1} \mid j \in I \setminus \{i\}, r \in \mathbb{Z} \rangle_{\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}] \text{-代数}} \subset \mathcal{Y}_{t, X_n^{(1)}}$$

とする. このとき, $\mathcal{C}_{\bullet, X_n^{(1)}}$ の量子 Grothendieck 環 $K_t(\mathcal{C}_{\bullet, X_n^{(1)}})$ を

$$K_t(\mathcal{C}_{\bullet, X_n^{(1)}}) := \bigcap_{i \in I} K_{i,t}$$

と定義する. ここで各 $i \in I$ に対し, $\overline{K_{i,t}} = K_{i,t}$ となり, $\overline{K_t(\mathcal{C}_{\bullet, X_n^{(1)}})} = K_t(\mathcal{C}_{\bullet, X_n^{(1)}})$ であることにも注意する. 以下が成立する.

定理 3.2 ([N04, H04]). (1) 各 $i \in I, r \in \mathbb{Z}$ に対し, $\underline{Y_{i,r}}$ のみを支配的単項式に持つ $K_t(\mathcal{C}_{\bullet, X_n^{(1)}})$ の元がただ一つ存在する. この元を $L_t(\underline{Y_{i,r}})$ と書く.

(2) $\text{ev}_{t=1}(K_t(\mathcal{C}_{\bullet, X_n^{(1)}})) = K(\mathcal{C}_{\bullet, X_n^{(1)}})$.

注意 3.3. 本稿では扱わないが, この $K_{i,t}$ は i に付随する遮蔽演算子の t -類似の核である. これは, 通常の q -指標のなす代数 ($\simeq$ Grothendieck 環) が i に付随する遮蔽演算子の核の $i \in I$ を渡る共通部分として記述されることを t -類似の設定で考えたものとなっている. 詳しくは [H04] を参照のこと.

いま $L_t(Y_{i,r})$ は,

$$\text{ev}_{t=1}(L_t(Y_{i,r})) = \chi_q(L(Y_{i,r}))$$

を満たし, 基本表現の (q, t) -指標と呼ばれる. また $L_t(Y_{i,r})$ の特徴づけより, $\overline{L_t(Y_{i,r})} = L_t(Y_{i,r})$ である.

各 $m = \prod_{i \in I} Y_{i,r}^{u_{i,r}} \in \mathcal{B}_{X_n^{(1)}}$ に対し,

$$M_t(m) := t^{N_m} \prod_{r \in \mathbb{Z}} \overrightarrow{\prod}_{i \in I} \left(\prod L_t(Y_{i,r})^{u_{i,r}} \right)$$

とする. ただし, $N_m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ は $M_t(m)$ における $\underline{m}$ の係数が 1 となるように定義する. (実は $\prod_{i \in I} L_t(Y_{i,r})^{u_{i,r}}$ は可換な元の積である.) このとき, 以下が成立する.

- $\{M_t(m) \mid m \in \mathcal{B}_{X_n^{(1)}}\}$ は $K_t(\mathcal{C}_{\bullet, X_n^{(1)}})$ の $\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$ -基底.
- 各 $m \in \mathcal{B}_{X_n^{(1)}}$ に対し, $\text{ev}_{t=1}(M_t(m)) = \chi_q(M(m))$.

これらの性質より, $M_t(m)$ は標準表現 $M(m)$ の (q, t) -指標と呼ばれる. 各 $M_t(m)$ は $M_t(Y_{i,0}) = L_t(Y_{i,0}), i \in I$ が一度計算されれば容易に計算可能な元であることに注意する. ここから新たな基底が得られる:

定理 3.4 ([N04, H04]). 以下の性質を満たす $K_t(\mathcal{C}_{\bullet, X_n^{(1)}})$ の $\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$ -基底 $\{L_t(m) \mid m \in \mathcal{B}_{X_n^{(1)}}\}$ が唯一つ存在する:

$$(S1) \quad \overline{L_t(m)} = L_t(m),$$

$$(S1) \quad M_t(m) = L_t(m) + \sum_{m' < m} P_{m,m'}(t) L_t(m'). \quad \text{ここで, } P_{m,m'}(t) \in t^{-1}\mathbb{Z}[t^{-1}].$$

この各元 $L_t(m)$ は既約表現 $L(m)$ の (q, t) -指標と呼ばれる. それは対称型の場合の Nakajima による以下の定理による:

定理 3.5 ([N04]). 量子ループ代数 $\mathcal{U}_q(X_n^{(1)})$ が対称型 ($X = \text{ADE}$) のとき,

- (1) 各 $m \in \mathcal{B}_{X_n^{(1)}}$ に対し, $\text{ev}_{t=1}(L_t(m)) = \chi_q(L(m))$.
- (2) 各 $m, m' \in \mathcal{B}_{X_n^{(1)}}$ に対し, $P_{m,m'}(t) \in t^{-1}\mathbb{Z}_{\geq 0}[t^{-1}]$.

この定理の証明は Nakajima による次数付き筋多様体を用いた幾何的な $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})$ の標準表現の構成に基づいており, 対称型に限定されている. 代数的な構成からはこの点は保証されず, 以下は一般には予想である:

予想 3.6. 量子ループ代数 $\mathcal{U}_q(X_n^{(1)})$ が非対称型 ($X = \text{BCFG}$) のとき,

- (1) 各 $m \in \mathcal{B}_{X_n^{(1)}}$ に対し, $\text{ev}_{t=1}(L_t(m)) = \chi_q(L(m))$.
- (2) 各 $m, m' \in \mathcal{B}_{X_n^{(1)}}$ に対し, $P_{m,m'}(t) \in t^{-1}\mathbb{Z}_{\geq 0}[t^{-1}]$.

定理 3.5, 予想 3.6 が重要である理由は, 各 $L_t(m)$ が標準表現の (q, t) -指標から, 量子ループ代数 $\mathcal{U}_q(X_n^{(1)})$ の表現論を介さず, 機械的に計算されることにある. (S1), (S2) による既約表現の (q, t) -指標の特徴づけは, Kazhdan-Lusztig アルゴリズム [L, Lemma 24.2.1] と呼ばれる既約表現と標準表現の (q, t) -指標の間の基底変換の計算アルゴリズムを与える. よって, 定理 3.5 および予想 3.6 の (i) は, 一般の既約表現の q -指標を求める純代数的なアルゴリズムの存在を保証する非常に強い主張である.

4. 主結果

4.1. 主結果とその系

以下が 1 章にも述べた本稿で主要となる同型である. ここでは, $\mathcal{Y}_{X_n^{(1)}}$ 内の単項式 $m = \prod_{i \in I, r \in \mathbb{Z}} Y_{i,r}^{u_{i,r}}$ と $s \in \mathbb{Z}$ に対して,

$$m_{(s)} := \prod_{i \in I, r \in \mathbb{Z}} Y_{i,r+s}^{u_{i,r}}$$

と書くことにする.

定理 4.1 (Hernandez-O.). $\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$ -代数としての同型

$$\Phi_{A \rightarrow B}: K_t(\mathcal{C}_{\bullet, A_{2n-1}^{(1)}}) \xrightarrow{\sim} K_t(\mathcal{C}_{\bullet, B_n^{(1)}})$$

が存在する. さらに, $\Phi_{A \rightarrow B}$ はそれぞれの圏に対する既約表現の (q, t) -指標の間の具体的な全単射を与える. また, $\Phi_{A \rightarrow B}(L_t(Y_{i,r})) = L_t(m)$ となるとき,

$$\Phi_{A \rightarrow B}(L_t(Y_{i,r+1})) = L_t(m_{(1)}) \quad \Phi_{A \rightarrow B}(L_t(Y_{2n-i,r-2n})) = L_t(m_{(-4n+2)}) \quad (*)$$

を満たす.

注意 4.2. 量子ループ代数 $\mathcal{U}_q(A_{2n-1}^{(1)})$ と $\mathcal{U}_q(B_n^{(1)})$ の間には直接の代数的な関係はないことに注意する. また, $(*)$ に現れる $2n$ は $A_{2n-1}^{(1)}$ 型の双対 Coxeter 数, $4n-2$ は $B_n^{(1)}$ 型の双対 Coxeter 数の 2 倍である.

ここでは具体的な (q, t) -指標の間の公式を記述する代わりに例を与える.

例 4.3. 例えば, $n = 3$ ($A_5^{(1)}/B_3^{(1)}$ 型の間の対応) の場合, $A_5^{(1)}$ 型の基本表現は $B_3^{(1)}$ 型の既約表現に以下のように対応する. (ここでは L_t に A, B を付けてタイプを指定する.) なお, $(*)$ により以下の対応で $\mathcal{C}_{\bullet, A_5^{(1)}}$ 内の基本表現の $\Phi_{A \rightarrow B}$ による像は全て計算される.

$$\begin{aligned} L_t^A(Y_{1,0}) &\leftrightarrow L_t^B(Y_{3,-5}), & L_t^A(Y_{1,-2}) &\leftrightarrow L_t^B(Y_{3,1}), & L_t^A(Y_{1,-4}) &\leftrightarrow L_t^B(Y_{1,-6}), \\ L_t^A(Y_{2,1}) &\leftrightarrow L_t^B(Y_{3,-1}), & L_t^A(Y_{2,-1}) &\leftrightarrow L_t^B(Y_{3,1}Y_{3,-5}), & L_t^A(Y_{2,-3}) &\leftrightarrow L_t^B(Y_{3,-3}), \\ L_t^A(Y_{2,-5}) &\leftrightarrow L_t^B(Y_{2,-8}), & L_t^A(Y_{3,0}) &\leftrightarrow L_t^B(Y_{3,1}Y_{3,-1}), & L_t^A(Y_{3,-2}) &\leftrightarrow L_t^B(Y_{3,-3}Y_{3,-5}), \\ L_t^A(Y_{3,-4}) &\leftrightarrow L_t^B(Y_{3,-7}), & L_t^A(Y_{4,-1}) &\leftrightarrow L_t^B(Y_{2,-2}), & L_t^A(Y_{4,-3}) &\leftrightarrow L_t^B(Y_{2,-6}), \\ L_t^A(Y_{5,0}) &\leftrightarrow L_t^B(Y_{1,0}), & L_t^A(Y_{5,-2}) &\leftrightarrow L_t^B(Y_{1,-4}), & L_t^A(Y_{5,-4}) &\leftrightarrow L_t^B(Y_{1,-8}). \end{aligned}$$

この対応からわかるように, 一般には基本表現も基本表現に対応するわけではなく, 対応する最高単項式の次数は保存されない. また, この対応は次元も保存しない. 例えば, $L_t^A(Y_{1,-4})$ は 6 次元表現であるが, $L_t^B(Y_{1,-6})$ は 7 次元表現である. このような点からも $\Phi_{A \rightarrow B}$ は非自明な対応であると言える.

定理 4.1 により, $A_{2n-1}^{(1)}$ 型の (q, t) -指標について知られている様々な正値性を $B_n^{(1)}$ 型 (q, t) -指標の正値性に直ちに読み替えることができる. $B_n^{(1)}$ 型の (q, t) -指標に関してはこのような正値性は新しい結果である.

系 4.4 (Kazhdan-Lusztig 型多項式の正値性). 各 $m \in \mathcal{B}_{B_n^{(1)}}$ に対し,

$$M_t(m) = \sum_{m' \in \mathcal{B}_{B_n^{(1)}}} P_{m,m'}(t) L_t(m')$$

と書くと, $P_{m,m'}(t) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}[t^{-1}]$ である.

これは $B_n^{(1)}$ 型における予想 3.6(ii) の肯定的解答である. 実際にはより強く以下が成立する. これも Nakajima によって $A_{2n-1}^{(1)}$ 型 (より一般に対称型) の場合には証明が与えられていた性質である:

系 4.5 (構造定数の正値性). 各 $m_1, m_2 \in \mathcal{B}_{B_n^{(1)}}$ に対し,

$$L_t(m_1)L_t(m_2) = \sum_{m \in \mathcal{B}_{B_n^{(1)}}} c_{m_1, m_2}^m(t) L_t(m)$$

と書くと, $c_{m_1, m_2}^m(t) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}[t^{\pm 1/2}]$ である.

ちなみに、系 4.5 が系 4.4 よりも強いことは、 $M_t(m)$ が $L_t(Y_{i,r})$ らの積で定義されていたことを思い出せばすぐにわかる。

Kashiwara-Kim-Oh は、Kang, Kashiwara, Kim, Oh により確立された一般化量子アフィン *Schur-Weyl* 双対性を用いて、圏論的に以下の通常の Grothendieck 環の間の同型を証明している：

定理 4.6 ([KKO19]). $\mathbb{Z}$ -代数としての同型

$$K(\mathcal{C}_{\bullet, A_{2n-1}^{(1)}}) \xrightarrow{\sim} K(\mathcal{C}_{\bullet, B_n^{(1)}})$$

であって、既約表現の類の間の全単射を与える写像 $\phi_{A \rightarrow B}$ が存在する。

ここで標準表現の間の対応に着目することで、以下が確かめられる：

定理 4.7 (Hernandez-O.). $\Phi_{A \rightarrow B}$ を $t = 1$ に特殊化すると $\phi_{A \rightarrow B}$ に一致する。

ここで定理 4.7 は我々の同型の方が強い主張であることを意味しているのではなく、むしろ我々の同型の構成と Kashiwara-Kim-Oh による同型の構成は次の意味で全く独立であることを注意しておく：アプリアリには、

- $\Phi_{A \rightarrow B}$ を $t = 1$ に特殊化したものは定理 4.1 より、 $\{\text{ev}_{t=1}(L_t(m)) \mid m \in \mathcal{B}_{A_{2n-1}^{(1)}}\}$ を $\{\text{ev}_{t=1}(L_t(m)) \mid m \in \mathcal{B}_{B_n^{(1)}}\}$ に移すが、
- $\phi_{A \rightarrow B}$ (を q -指標で解釈したもの) は定理 4.6 より、 $\{\chi_q(L(m)) \mid m \in \mathcal{B}_{A_{2n-1}^{(1)}}\}$ を $\{\chi_q(L(m)) \mid m \in \mathcal{B}_{B_n^{(1)}}\}$ に移す。

$A_{2n-1}^{(1)}$ 型の場合には $\text{ev}_{t=1}(L_t(m)) = \chi_q(L(m))$ であることがわかっているが、 $B_n^{(1)}$ 型の場合にはこの一致は予想 3.6(i) に他ならない。従って、定理 4.7 は $B_n^{(1)}$ 型の場合の予想 3.6(i) の肯定的解決を導く：

系 4.8. 各 $m \in \mathcal{B}_{B_n^{(1)}}$ に対し、 $\text{ev}_{t=1}(L_t(m)) = \chi_q(L(m))$ 。

4.2. 定理 4.1 の証明の概略

ここでは、定理 4.1 の同型を構成する方法の概略を説明する。

圏 $\mathcal{C}_{\bullet, A_n^{(1)}}$, $\mathcal{C}_{\bullet, B_n^{(1)}}$ にはその“コア”となるようなモノイダルアーベル部分圏 $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}, A_n^{(1)}}$, $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}, B_n^{(1)}}$ が存在する。前者の定義は [HL15], 後者の定義は [OSu16] による。ここで、これらの部分圏は定理 4.1 での周期性 (*) に関する“基本領域”に相当する部分となる。実際に、全体の圏はこれらの部分圏の無限個のコピーの貼り合わせとしてとらえることができる。我々の基本的な方針は、

- まず“コア”の部分での同型 $K_t(\mathcal{C}_{\mathcal{Q}, A_{2n-1}^{(1)}}) \simeq K_t(\mathcal{C}_{\mathcal{Q}, B_n^{(1)}})$ を証明し、これを全体に拡張する

というものである。なお、全体の圏とこれらの部分圏のサイズの関係は“アーベル圏 $\mathcal{A}$ の導来圏 $D^b(\mathcal{A})$ とその自然な t -構造に関するコア”のような関係と言える。この捉え方については [HL15] を参照のこと。

部分圏 $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}, A_n^{(1)}}$, $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}, B_n^{(1)}}$ の顕著な性質として、それらの量子 Grothendieck 環は、(冪単部分群の) 量子座標環と呼ばれる別の文脈に現れる環を用いて記述されることが知られている：

定理 4.9 (Hernandez-Leclerc [HL15]). $\mathcal{A}_{t-1}[N_-^{A_n}]$ を $\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$ 上の A_n 型³量子座標環とする. このとき, $\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$ -代数としての同型

$$\Phi_A: K_t(\mathcal{C}_{\mathcal{Q}, A_n^{(1)}}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}_{t-1}[N_-^{A_n}]$$

が存在する. さらに, Φ_A は既約表現の (q, t) -指標のなす基底を, (*Lusztig, Kashiwara* の意味での) $\mathcal{A}_{t-1}[N_-^{A_n}]$ の双対標準基底に移す.

定理 4.10 (Hernandez-O. [HO18]). $\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$ -代数としての同型

$$\Phi_B: K_t(\mathcal{C}_{\mathcal{Q}, B_n^{(1)}}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}_{t-1}[N_-^{A_{2n-1}}]$$

が存在する. さらに, Φ_B は既約表現の (q, t) -指標のなす基底を, $\mathcal{A}_{t-1}[N_-^{A_{2n-1}}]$ の双対標準基底に移す.

これらの同型は1章に述べた“(量子) 団代数構造”に着目することで証明される: 部分圏の量子 Grothendieck 環, および量子座標環はそれぞれある有限変数の量子トーラスの部分代数として実現される (これは量子団代数の見方では量子 Laurent 現象に対応する事実である). ここで, まずはこれらの量子トーラスの間の同型を証明する. その後でこれが量子 Grothendieck 環と量子座標環の間の同型に制限されることを示す. この制限のステップでは, 量子 T -系と呼ばれる量子 Grothendieck 環内での等式 [HL15, Proposition 5.6], [HO18, Theorem 9.6] が量子座標環における量子行列式等式 [GLS13, Proposition 5.5] に対応することを確認することが証明のポイントとなる (これらの等式の族は量子団代数構造においては特別な変異列とみなすことができる).

双対標準基底と (q, t) -指標との対応は, 双対標準基底の代数的な特徴づけ [Ki12, Theorem 4.29] と, (q, t) -指標の特徴づけ (定理 3.4) の比較によって証明される.

さて $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}, A_{2n-1}^{(1)}}$ に対する Φ_A と $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}, B_n^{(1)}}$ に対する Φ_B をつなぎ合わせることで, 次の量子 Grothendieck 環の間の同型を得る:

系 4.11. 次の形の $\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$ -代数としての同型が存在する:

$$K_t(\mathcal{C}_{\mathcal{Q}, A_{2n-1}^{(1)}}) \simeq K_t(\mathcal{C}_{\mathcal{Q}, B_n^{(1)}}), \left\{ \begin{array}{c} \text{既約表現の} \\ (q, t)\text{-指標} \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{既約表現の} \\ (q, t)\text{-指標} \end{array} \right\}.$$

ちなみに, この同型で既約表現がどのように対応するかということは, 最高単項式の言葉で具体的に記述することができる. この対応の計算は一度 (q, t) -指標を双対標準基底の元に翻訳し, 双対標準基底の性質を用いることで行われる ([HO18, §12] を参照).

最後に, 系 4.11 の同型の “無限個のコピーを並べて貼り合わせて” 全体の量子 Grothendieck 環の間の同型 $\Phi_{A \rightarrow B}$ にできることを証明する. 特に定理 4.1 の周期性 (*) はこの構成から従う. この部分は2つのステップからなる:

- (1) まず, 係数拡大をした環 $\mathbb{Q}(t^{1/2}) \otimes_{\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]} K_t(\mathcal{C}_{\bullet, A_{2n-1}^{(1)}})$, $\mathbb{Q}(t^{1/2}) \otimes_{\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]} K_t(\mathcal{C}_{\bullet, B_n^{(1)}})$ の生成元と関係式による表示を求め, 特にそれらが全く同じ形であることを確かめる. ($\mathcal{C}_{\bullet, A_{2n-1}^{(1)}}$ の方に関しては [HL15, Theorem 7.3] を参照.)
- (2) (1) の考察から係数拡大をした部分での同型がわかり, さらに (q, t) -指標の対応を証明することで, これを係数拡大していない環の間の同型に制限する.

³ $A_n^{(1)}$ 型でないことに注意.

(1) で一度係数拡大をするのは、係数拡大をすることで量子座標環 $\mathcal{A}_{t-1}[N_-^{A_{2n-1}}]$ が簡単な生成元と関係式によって表示されることに由来する。こうして“コア”の部分での表示がわかれば、後はそれらのコピーの間の関係を調べれば全体が記述されることになる。

5. 今後の課題

最後に今後の課題について述べる。本稿では $A_{2n-1}^{(1)}/B_n^{(1)}$ 型の場合にその量子アフィン代数の有限次元表現圏の間に類似が見られることを説明したが、実はこのような類似性は $D_{n+1}^{(1)}/C_n^{(1)}$, $E_6^{(1)}/F_4^{(1)}$, $D_4^{(1)}/G_2^{(1)}$ 型の場合にも成立することが期待されている。実際に、一般化量子アフィン Schur-Weyl 双対性を用いる圏論的な方向からは Kashiwara-Oh[KO17], Oh-Scrimshaw[OSc18] によって、これら全てのペアの場合に、“コア”の部分の通常の Grothendieck 環の間の同型が、既約表現の類を保つ形で存在することが示されている。(量子 Grothendieck 環を扱うアプローチは今のところ我々の $A_{2n-1}^{(1)}/B_n^{(1)}$ 型の場合のもののみである。) 特に期待される全ての場合で、対称型と非対称型が結ばれている点は特筆すべき部分である。この点に着目することは今まであまり方法のなかった非対称型の場合の予想 3.6 にアプローチを与えていると言える。

さらに、この類似性で対応する既約表現の q -指標の間の変換式を考えることも、面白い方向であると思われる。現在 $A_{2n-1}^{(1)}/B_n^{(1)}$ 型の場合には既約表現の間の対応は最高単項式の言葉ではどのように移りあっているかが具体的に記述されるが、その他の項がどのように移っているか(特に次元は対応する表現同士でどのような関係にあるか)は明確でない。筆者はこの問題に現在団代数の視点から取り組んでいる。

また、自然な考え方としてこのような同型は圏同値から来ているのではないということも期待される。この点に関しては Kashiwara-Kim-Oh らのような一般化量子アフィン Schur-Weyl 双対性からの圏論的なアプローチが良いように思われる。例えばこの方向の進展としては [F17] が挙げられる。

参考文献

- [B94] J. Beck, *Braid group action and quantum affine algebras*, Comm. Math. Phys. **165** (1994), no. 3, 555–568.
- [CP] V. Chari and A. Pressley, *A guide to quantum groups*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994, xvi+651 pp.
- [CP95] V. Chari and A. Pressley, *Quantum affine algebras and their representations*, Representations of groups (Banff, AB, 1994), 59–78, CMS Conf. Proc. **16**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.
- [D88] V. G. Drinfel'd, *A new realization of Yangians and of quantum affine algebras*, Soviet Math. Dokl. **36** (1988), no. 2, 212–216.
- [FZ02] S. Fomin and A. Zelevinsky, *Cluster algebras. I. Foundations*, J. Amer. Math. Soc. **15** (2002), no. 2, 497–529.
- [FM01] E. Frenkel and E. Mukhin, *Combinatorics of q -characters of finite-dimensional representations of quantum affine algebras*, Comm. Math. Phys. **216** (2001), no. 1, 23–57.
- [FR99] E. Frenkel and N. Reshetikhin, *The q -characters of representations of quantum affine algebras and deformations of $\mathcal{W}$ -algebras*, Recent developments in quantum affine algebras and related topics (Raleigh, NC, 1998), 163–205, Contemp. Math. **248**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
- [F17] R. Fujita, *Affine highest weight categories and quantum affine Schur-Weyl duality of Dynkin quiver types*, preprint arXiv:1710.11288.

- [GLS13] C. Geiß, B. Leclerc and J. Schröer, *Cluster structures on quantum coordinate rings*, Sel. Math. New Ser. **19** (2013), no. 2, 337–397.
- [H04] D. Hernandez, *Algebraic approach to q, t -characters*, Adv. Math. **187** (2004), no. 1, 1–52.
- [HL10] D. Hernandez and B. Leclerc, *Cluster algebras and quantum affine algebras*, Duke Math. J. **154** (2010), no. 2, 265–341.
- [HL15] D. Hernandez and B. Leclerc, *Quantum Grothendieck rings and derived Hall algebras*, J. Reine Angew. Math. **701** (2015), 77–126.
- [HL16] D. Hernandez and B. Leclerc, *A cluster algebra approach to q -characters of Kirillov-Reshetikhin modules*, J. Eur. Math. Soc. **18** (2016), no. 5, 1113–1159.
- [HO18] D. Hernandez and H. Oya, *Quantum Grothendieck ring isomorphisms, cluster algebras and Kazhdan-Lusztig algorithm*, preprint arXiv:1803.06754.
- [KKO19] M. Kashiwara, M. Kim and S.-j. Oh, *Monoidal categories of modules over quantum affine algebras of type A and B* , Proc. Lond. Math. Soc. (3) **118** (2019), no. 1, 43–77.
- [KO17] M. Kashiwara and S.-j. Oh, *Categorical relations between Langlands dual quantum affine algebras: Doubly laced types*, preprint arXiv:1705.07542, to appear in J. Algebraic Combin.
- [Ki12] Y. Kimura, *Quantum unipotent subgroup and dual canonical basis*, Kyoto J. Math. **52** (2012), no. 2, 277–331.
- [L] G. Lusztig, *Introduction to quantum groups*, Reprint of the 1994 edition, Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser/Springer, New York, 2010, xiv+346 pp.
- [N04] H. Nakajima, *Quiver varieties and t -analogs of q -characters of quantum affine algebras*, Ann. of Math. (2) **160** (2004), no. 3, 1057–1097.
- [OSc18] S.-j. Oh and T. Scrimshaw, *Categorical relations between Langlands dual quantum affine algebras: Exceptional cases*, preprint arXiv:1802.09253, to appear in Comm. Math. Phys.
- [OSu16] S.-j. Oh and U. Suh, *Twisted Coxeter elements and folded AR-quivers via Dynkin diagram automorphisms: I*, preprint arXiv:1606.00076.
- [Q17] F. Qin, *Triangular bases in quantum cluster algebras and monoidal categorification conjectures*, Duke Math. J. **166** (2017), no. 12, 2337–2442.
- [VV03] M. Varagnolo and E. Vasserot, *Perverse sheaves and quantum Grothendieck rings*, Studies in memory of Issai Schur (Chevaleret/Rehovot, 2000), 345–365, Progr. Math. **210**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2003.