代数多様体の特異点論と正標数の手法

高木 俊輔 (東京大学大学院数理科学研究科)*

この講演では、講演者がここ数年で得た代数多様体の特異点に関する結果について解説する。

1. 局所コホモロジーの消滅定理

この節では、可換環論における基本的な道具である、局所コホモロジーの消滅定理について説明する。以下 $(S, \mathfrak{m})$ を優秀局所環とし、 $I \subsetneq S$ を S の真のイデアルとする。

定義 1.1. S の I に関する局所コホモロジー次元 $\text{cd}(S, I)$ を次のように定義する。

$$\begin{aligned}\text{cd}(S, I) &:= \sup\{i \mid H_I^i(M) \neq 0 \text{ となる } S \text{ 加群 } M \text{ が存在する}\} \\ &= \sup\{i \mid H_I^i(S) \neq 0\}.\end{aligned}$$

局所コホモロジーの基本性質から、 $\text{ht } I \leq \text{cd}(S, I) \leq \dim S$ が成り立つ。 $I = \mathfrak{m}$ の場合に $\text{cd}(S, \mathfrak{m}) = \dim S$ であることはよく知られているが、一般には $\text{cd}(S, I) < \dim S$ である。 $H_I^i(S)$ の消滅定理としては、次の2つの定理が有名である。

定理 1.2 (第1消滅定理, Hartshorne-Lichtenbaum [5]). S は解析的既約である、つまり S の $\mathfrak{m}$ 進完備化 $\widehat{S}$ は整域であると仮定する。このとき $\dim S/I \geq 1$ ならば、 $\text{cd}(S, I) \leq \dim S - 1$ である。

定理 1.3 (第2消滅定理, Ogus [11], Peskine-Szpiro [13], Huneke-Lyubeznik [7]). $(S, \mathfrak{m})$ は等標数の正則局所環とし、 $S/\mathfrak{m}$ は代数閉体であると仮定する。また $R = S/I$ とおき、 $\widehat{R}$ を R の $\mathfrak{m}$ 進完備化とする。このとき、 $\dim R \geq 2$ かつ $\text{Spec } \widehat{R} \setminus \{\mathfrak{m}\widehat{R}\}$ が連結であることと、 $\text{cd}(S, I) \leq \dim S - 2$ であることは同値である。

ここで、次の疑問を考える。

疑問 1.4. $(S, \mathfrak{m})$ は等標数の正則局所環とする。 $\text{depth } S/I \geq i$ ならば、 $\text{cd}(S, I) \leq \dim S - i$ であるか？

定理 1.2, 1.3 から、 $i = 1, 2$ の場合は疑問 1.4 は正しいことがわかる。また次も成り立つ。

定理 1.5 (Peskine-Szpiro [13]). S が正標数の正則局所環であれば、疑問 1.4 は正しい。

しかし S が等標数0の正則局所環の場合、疑問 1.4 には反例がある。

例 1.6. k を標数 $p \geq 0$ の体、 $S = k[X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3]$ を k 上の6変数多項式環とし、

$$I = (X_1Y_2 - X_2Y_1, X_2Y_3 - X_3Y_2, X_3Y_1 - X_1Y_3) \subset S$$

とおく。つまり、 S/I は $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^2$ のアフィン錐である。 S/I は4次元 Cohen-Macaulay 環であることに注意する。このとき

$$H_I^3(S) \begin{cases} = 0 & (p > 0) \\ \neq 0 & (p = 0) \end{cases}, \quad \text{cd}(S, I) = \begin{cases} 2 & (p > 0) \\ 3 & (p = 0) \end{cases}$$

が成り立つ。従って、この例は疑問 1.4 の $i = 4$ の場合の反例になっている。

それでは、疑問 1.4 の $i = 3$ の場合はどうだろうか。 S が体上本質的有限型の場合 (つまり、代数多様体の局所環の場合) には正しいことが証明できる。

* e-mail: stakagi@ms.u-tokyo.ac.jp

定理 1.7 ([1]). $(S, \mathfrak{m})$ は体上本質的有限型な正則局所環とする. このとき $\text{depth } S/I \geq 3$ ならば, $\text{cd}(S, I) \leq \dim S - 3$ である.

また S が標数0の体上本質的有限型の場合は, 疑問 1.4の $i = 4$ の場合が成り立つための障害を局所 Picard 群を用いて記述することができる. ここで局所環 $(A, \mathfrak{m}_A)$ の局所 Picard 群 $\text{Pic}^{\text{loc}}(A)$ は, $\text{Pic}^{\text{loc}}(A) = \text{Pic}(\text{Spec } A \setminus \{\mathfrak{m}_A\})$ と定義する.

定理 1.8 ([1]). $(S, \mathfrak{m})$ は標数 0 の体上本質的有限型な正則局所環とし, $S/\mathfrak{m}$ は代数閉体であるとする. さらに $\text{depth } S/I \geq 4$ と仮定する. このとき, $\text{cd}(S, I) \leq \dim S - 4$ であることと $\text{Pic}^{\text{loc}}(\widehat{S/I})$ が捩れ群であることは同値である.

2. F 冪零特異点の Hodge 理論的解釈

この節では, Frobenius 写像を用いて定義される正標数の特異点の例として, F 冪零特異点について説明する. $(R, \mathfrak{m})$ を標数 $p > 0$ の d 次元被約局所環とし, $F: R \rightarrow R$ を Frobenius 写像とする. F は局所コホモロジー加群 $H_{\mathfrak{m}}^i(R)$ の間の p 線型写像 $H_{\mathfrak{m}}^i(R) \rightarrow H_{\mathfrak{m}}^i(R)$ を誘導する. この写像も同じ F で表すことにする. また $\text{Min } R$ を R の極小素イデアルの集合とし, $R^\circ := R \setminus \bigcup_{\mathfrak{p} \in \text{Min } R} \mathfrak{p}$ とおく.

定義 2.1. (i) $H_{\mathfrak{m}}^d(R)$ における零加群の密着閉包 $0_{H_{\mathfrak{m}}^d(R)}^*$ を次のように定義する.

$$0_{H_{\mathfrak{m}}^d(R)}^* := \{z \in H_{\mathfrak{m}}^d(R) \mid \exists c \in R^\circ \text{ が存在し, } \forall e \gg 0 \text{ に対して } cF^e(z) = 0 \text{ が成り立つ}\}.$$

R が解析的既約ならば, $0_{H_{\mathfrak{m}}^d(R)}^*$ は F の作用で閉じている $H_{\mathfrak{m}}^d(R)$ の真の部分加群のうち最大のものである ([18]).

(ii) R が Cohen-Macaulay でかつ $0_{H_{\mathfrak{m}}^d(R)}^* = 0$ が成り立つとき, R は F 有理であるという.

(iii) $F^e(H_{\mathfrak{m}}^0(R)) = \dots = F^e(H_{\mathfrak{m}}^{d-1}(R)) = F^e(0_{H_{\mathfrak{m}}^d(R)}^*) = 0$ となる $e \in \mathbb{N}$ が存在するとき, R は F 冪零であるという.

定義から, F 有理ならば F 冪零である.

例 2.2. k を標数 $p > 0$ の完全体とする.

(i) $k[X, Y, Z]_{(X, Y, Z)} / (X^2 + Y^3 + Z^7)$ は F 冪零であるが, $k[X, Y, Z]_{(X, Y, Z)} / (X^2 + Y^3 + Z^7 + XYZ)$ は F 冪零ではない.

(ii) $k[X, Y, Z]_{(X, Y, Z)} / (X^4 + Y^4 + Z^4)$ が F 冪零であることと, $p \equiv 3 \pmod{4}$ であることは同値である.

標数 p への還元を用いて, 標数0の特異点に対し F 有理性及び F 冪零性を定義する. R を標数0の体 k 上有限型な環とする.

$$R = k[X_1, \dots, X_n] / (f_1, \dots, f_r), \quad f_i = \sum_j a_{ij} X^j \in k[X_1, \dots, X_n]$$

と表したとき, $A = \mathbb{Z}[a_{ij}] \subseteq k$ を $f_1, \dots, f_r$ の係数で生成された k の $\mathbb{Z}$ 部分代数とする. A 上有限型な環 $R_A = A[X_1, \dots, X_n] / (f_1, \dots, f_r)$ を考えると, $R_A \otimes_A k \cong R$ が成り立つ. ここで A を適当な一元局所化 A_α と取り替えることにより, R_A は A 上平坦であると仮定して良い (generic flatness). このような R_A を R の A 上のモデルという. μ を $\text{Spec } A$ の閉点としたとき, R_A の μ 上のファイバー $R_A \otimes_A A/\mu$ を R_μ と表す. R_μ は有限体 A/μ 上有限型であることに注意する. R が正則 (resp. Cohen-Macaulay, 正規, 被約) のとき, 必要ならば A をさらに拡大することによって, R_A は正則 (resp. Cohen-Macaulay, 正規, 被約) であるようにとれる. このとき, 全ての閉点 $\mu \in \text{Spec } A$ に対して, R_μ は正則 (resp. Cohen-Macaulay, 正

規, 被約)である. 標数0の体 k 上有限型なスキーム X に対しても, 同様にして標数 $p > 0$ への還元 X_μ を考えることができる.

定義 2.3. R を標数0の体 k 上本質的有限型な被約局所環とする. R が F **有理型** (resp. F **冪零型**) であるとは, k の有限生成 $\mathbb{Z}$ 部分代数 A 上のモデル R_A が与えられたとき, $\text{Spec } A$ の Zariski 開集合 $S \neq \emptyset$ が存在し, 任意の閉点 $\mu \in S$ に対して R_μ が F 有理 (resp. F 冪零) になるときにいう. この定義はモデル R_A の取り方によらない.

例 2.2 より, 次がわかる.

例 2.4. $\mathbb{C}[X, Y, Z]_{(X, Y, Z)} / (X^2 + Y^3 + Z^7)$ は F 冪零型であるが, $\mathbb{C}[X, Y, Z]_{(X, Y, Z)} / (X^4 + Y^4 + Z^4)$ は F 冪零型ではない.

Karen Smith [18], 原 [6], Mehta-Srinivas [10] によって, F 有理環は有理特異点と対応していることが示された.

定理 2.5 ([18], [6], [10]). $(R, \mathfrak{m})$ を標数0の体上本質的有限型な被約局所環とする. R が F 有理環であることと, $\text{Spec } R$ が有理特異点である (つまり, 任意の特異点解消 $\pi : Y \rightarrow X = \text{Spec } R$ と任意の $i > 0$ に対し, $\mathbf{R}^i \pi_* \mathcal{O}_Y = 0$ が成り立つ) ことは同値である.

では F 冪零環はどのような幾何学的特異点と対応しているのだろうか? Srinivas との共同研究 [19] において, 次の予想を提唱した.

予想 H_n . $(R, \mathfrak{m})$ を $\mathbb{C}$ 上本質的有限型な正規局所環で, 孤立特異点であるとする. このとき $(x \in X) := \text{Spec } R$ とおくと, $H_{\{x\}}^*(X_{\text{an}}, \mathbb{C})$ は混合 Hodge 構造を持つことに注意する. R が F 冪零型であることと, 任意の i に対し $\text{Gr}_F^0 H_{\{x\}}^i(X_{\text{an}}, \mathbb{C}) = 0$ が成り立つことは同値である.

予想 H_n は次の数論幾何的予想と密接に関係している.

予想 N_n . V を標数0の代数閉体 k 上定義された n 次元単純正規交叉射影多様体とする. k の有限生成 $\mathbb{Z}$ 部分代数 A 上のモデル V_A が与えられたとき, $\text{Spec } A$ の閉点の稠密集合 S が存在し, 次が成り立つ: 任意の $i \geq 0$ に対し, $H^i(V, \mathcal{O}_V) \neq 0$ ならば, 任意の $\mu \in S$ に対して $H^i(V_\mu, \mathcal{O}_{V_\mu})$ への Frobenius 写像の作用は非冪零である.

Ogus [12] は, 標数0のアーベル曲面は無限個の通常素点を持つことを証明した. Ogus の手法 ([12], [9]) と p 進エタールコホモロジーの Hodge-Tate 分解を組み合わせることにより, 予想 N_2 が正しいことを確認できる. そしてこのことから, 予想 H_3 が正しいことが導かれる.

定理 2.6 ([19]). 予想 N_{n-1} が正しいければ, 予想 H_n も正しい. 特に予想 H_3 は正しい.

3. 3次元準射影多様体の一般超平面切断の特異点

前節の F 冪零特異点のような, Frobenius 写像を用いて定義される特異点を総称して F 特異点という. この節では, F 特異点論の双有理幾何学への応用について説明する.

定義 3.1. X を $\mathbb{Q}$ -Gorenstein (すなわち, ある $r \in \mathbb{N}$ が存在して, rK_X は Cartier 因子である) 正規スキームとする. 任意の正規スキーム $\tilde{X}$ からの固有双有理射 $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ に対し,

$$K_{\tilde{X}} = \pi^* K_X + \sum_i a_i E_i \quad (\text{ただし, } E_i \text{ は } \tilde{X} \text{ 上の } \pi \text{ 例外素因子である})$$

と表したとき, すべての i に対して $a_i \geq 0$ (resp. $a_i > -1$) が成り立つならば, X は **標準特異点** (resp. **対数的末端特異点**) しか持たないという.

定理 3.2 (Reid [14]). X を標数0の代数閉体上定義された $\mathbb{Q}$ -Gorenstein 正規準射影多様体とし, H を X の一般超平面切断とする. X が標準特異点 (resp. 対数的末端特異点) しか持たなければ, H も標準特異点 (resp. 対数的末端特異点) しか持たない.

定理 3.2 の証明は自由な線形系に対する Bertini の定理に依存しており、正標数の場合に同様の主張が成り立つかどうかはわかっていない。しかしながら、ジェットスキームの理論および F 特異点の理論を用いることで、次を示すことができる。

定理 3.3 ([15]). X を標数 $p > 0$ の代数閉体上定義された 3次元 $\mathbb{Q}$ -Gorenstein 正規準射影多様体とし、 H を X の一般超平面切断とする。 X が標準特異点しか持たなければ、 H も標準特異点しか持たない。 $p > 5$ かつ X が対数的末端特異点しか持たなければ、 H も対数的末端特異点しか持たない。

対数的末端特異点の場合の証明には、 F 特異点の理論を用いる。まず記号を用意する。 R を標数 $p > 0$ の被約環とする。任意の $e \in \mathbb{N}$ に対し、 R 加群 $F_*^e R$ を次のように定義する。アーベル群としては R そのものとし、 R 加群の構造を $r \cdot x := r^{p^e} x$ ($r \in R, x \in F_*^e R$) で定める。 $F_*^1 R$ のことは単に $F_* R$ と記す。また $F_*^e R$ の元を $F_*^e x$ ($x \in R$) の形で表す。 $F^e : X \rightarrow X$ を $X = \text{Spec } R$ の e 回絶対 Frobenius 射としたとき、 $F_*^e R$ は $F_*^e \mathcal{O}_X$ に対応する R 加群に他ならない。 x を $F_*^e(x^p) = x \cdot F_*^e 1$ に送る e 回 Frobenius 写像 $F^e : R \rightarrow F_*^e R$ は R 加群の準同型になる。 $F_*^e R$ が有限生成 R 加群であるとき、 R は **F 有限**であるという。

定義 3.4. R は F 有限な被約環とする。任意の $c \in R^\circ$ に対し、

$$cF^e : R \xrightarrow{F^e} F_*^e R \xrightarrow{\times F_*^e c} F_*^e R \quad x \mapsto F_*^e(x^{p^e}) \mapsto F_*^e(cx^{p^e})$$

が R 加群の準同型として分裂するとき、 R は **強 F 正則** であるという。代数多様体 X の各局所環が強 F 正則であるとき、 X は強 F 正則特異点しか持たないという。

例 3.5. k を標数 $p > 0$ の完全体とし、 $R = k[X, Y, Z]/(X^2 + Y^3 + Z^5)$ とおく。このとき、 R が強 F 正則であることと $p > 5$ は同値である。

例 3.5 の一般化として、次が成り立つ。

定理 3.6 ([15]). $(R, \mathfrak{m})$ を F 有限な標数 $p > 0$ の被約局所環とする (ただし、 $R/\mathfrak{m}$ は代数閉体とは限らない)。 $p > 5$ ならば、 R が強 F 正則であることと、 $\text{Spec } R$ が対数的末端特異点しか持たないことは同値である。

Schwede-Zhang [17] によって、強 F 正則特異点については定理 3.2 と類似の主張が成り立つことが知られている。

定理 3.7 ([17]). X を標数 $p > 0$ の代数閉体上定義された準射影多様体とし、 H を X の一般超平面切断とする。 X が強 F 正則特異点しか持たなければ、 H も強 F 正則特異点しか持たない。

定理 3.6 を使って特異点が強 F 正則である場合に帰着することで、定理 3.7 から定理 3.3 の対数的末端特異点の場合が導かれる。

定理 3.3 の対数的末端特異点の場合の証明. x を X の任意の余次元 2 の点とする。このとき $\text{Spec } \mathcal{O}_{X,x}$ は 2次元対数的末端特異点しか持たない。従って定理 3.6 から、 $\mathcal{O}_{X,x}$ は強 F 正則である。 X の強 F 正則点全体は X の開集合をなすので、有限個の閉点を除いて、 X は強 F 正則特異点しか持たないことがわかる。 H は X の一般超平面切断なので、有限個の閉点を避けることができる。つまり、 X は強 F 正則特異点しか持たないと仮定して良い。このとき、定理 3.7 と定理 3.6 から、 H は対数的末端特異点しか持たない。 $\square$

4. 大域的 F 正則多様体と対数的 Fano 多様体

前節で見たように、強 F 正則特異点と対数的末端特異点は密接に関係している。この関係の大域版として、大域的 F 正則多様体と対数的 Fano 多様体の関係について説明する。 X は標数 $p > 0$ の完全体上で定義された正規射影多様体とする。 D を X 上の有効 Weil 因子としたとき、自然な単射 $i: \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X(D)$ が存在する。任意の $e \in \mathbb{N}$ に対し、 $F_*^e i$ と e 回 Frobenius 射を合成して、

$$\mathcal{O}_X \xrightarrow{F^e} F_*^e \mathcal{O}_X \xrightarrow{F_*^e i} F_*^e \mathcal{O}_X(D) \quad (4.1)$$

という射が得られる。

定義 4.1. X 上の任意の有効 Weil 因子 D に対し、(4.1) が $\mathcal{O}_X$ 加群の射として分裂するような $e \in \mathbb{N}$ が存在するとき、 X は**大域的 F 正則**であるという。

例 4.2. (1) 標数 $p > 0$ の代数閉体 k 上で定義された非特異射影曲線 C が大域的 F 正則であるのは、 $C \cong \mathbb{P}_k^1$ のときに限られる。

(2) 標数 $p > 0$ の完全体上で定義されたトーリック射影多様体は大域的 F 正則である。

大域的 F 正則多様体はトーリック多様体と類似のコホモロジーの消滅定理を満たす。次の定理は、大域的 F 正則多様体上の小平の消滅定理の拡張である。

定理 4.3 ([3]). X を大域的 F 正則多様体、 $\mathcal{L}$ を X 上の半豊富な直線束とし、 $\kappa = \kappa(X, \mathcal{L})$ を $\mathcal{L}$ の飯高次元とする。

(1) 任意の $i \neq n - \kappa$ に対し、 $H^i(X, \omega_X \otimes \mathcal{L}) = 0$ である。

(2) ある $\ell \in \mathbb{N}$ に対し、 $s \in H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes \ell})$ を非零切断とする。このとき、任意の $m \geq 1$ に対し、 s が誘導する写像

$$\times s: H^{n-\kappa}(X, \omega_X \otimes \mathcal{L}^{\otimes m}) \rightarrow H^{n-\kappa}(X, \omega_X \otimes \mathcal{L}^{\otimes(\ell+m)})$$

は単射である。

前節では $\mathbb{Q}$ -Gorenstein 正規代数多様体に対して対数的末端特異点を定義したが、より一般に、正規代数多様体とその上の有効 $\mathbb{Q}$ -Weil 因子の対に対して対数的末端特異点の概念を拡張することができる。この対数的末端対の概念を用いて、対数的 Fano 多様体が定義される。

定義 4.4. Z を標数 0 の代数閉体上で定義された正規射影多様体とする。 $-(K_Z + \Delta)$ が豊富でかつ (Z, Δ) が対数的末端対であるような Z 上の有効 $\mathbb{Q}$ -Weil 因子 Δ が存在するとき、 Z は**対数的 Fano 多様体**であるという。

例えば、トーリック射影多様体は対数的 Fano 多様体である。大域的 F 正則多様体と対数的 Fano 多様体は密接に関係している。

定理 4.5 ([16]). Z を標数 0 の代数閉体 k 上で定義された正規射影多様体とする。 Z が対数的 Fano 多様体ならば、 Z は大域的 F 正則型である。つまり、 k の有限生成 $\mathbb{Z}$ 部分代数 A 上のモデル Z_A が与えられたとき、 $\text{Spec } A$ の Zariski 開集合 $S \neq \emptyset$ が存在し、任意の閉点 $\mu \in S$ に対して Z_μ は大域的 F 正則である。

予想 4.6 ([16]). 定理 4.5 の逆も正しい。つまり、大域的 F 正則型多様体は対数的 Fano 多様体である。

定理 4.7. (1) ([4]) Z が森夢空間ならば、予想 4.6 は正しい。

(2) ([2], [8]) $\dim Z = 2$ ならば、予想 4.6 は正しい。

この講演では、予想 4.6 の最近の進展について説明したい。

参考文献

- [1] H. Dao and S. Takagi, On the relationship between depth and cohomological dimension, *Compos. Math.* **152** (2016), 876–888.
- [2] Y. Gongyo and S. Takagi, Surfaces of globally F -regular and F -split type, *Math. Ann.* **364** (2016), 841–855.
- [3] Y. Gongyo and S. Takagi, Kollár’s injectivity theorem for globally F -regular varieties, to appear in *Eur. J. Math.*
- [4] Y. Gongyo, S. Okawa, A. Sannai and S. Takagi, Characterization of varieties of Fano type via singularities of Cox rings, *J. Algebraic Geom.* **24** (2015), 159–182.
- [5] R. Hartshorne, Cohomological dimension of algebraic varieties, *Ann. of Math.* **88** (1968), 403–450.
- [6] N. Hara, A characterization of rational singularities in terms of injectivity of Frobenius maps, *Amer. J. Math.* **120** (1998), 981–996.
- [7] C. Huneke and G. Lyubeznik, On the vanishing of local cohomology modules, *Invent. Math.* **102** (1990), 73–93.
- [8] D. Hwang and J. Park, Characterization of log del Pezzo pairs via anticanonical models, *Math. Z.* **280** (2015), 211–229.
- [9] K. Joshi and C. S. Rajan, Frobenius splitting and ordinarity, *Int. Math. Res. Not.* **2003**, 109–121.
- [10] V. B. Mehta and V. Srinivas, A characterization of rational singularities, *Asian J. Math.* **1** (1997), 249–271.
- [11] A. Ogus, Local cohomological dimension, *Ann. of Math. (2)* **98** (1973), 327–365.
- [12] A. Ogus, Hodge cycles and crystalline cohomology, *Hodge Cycles, Motives, and Shimura Varieties*, Lecture Notes in Math., vol. 900, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1981, 357–414.
- [13] C. Peskine and L. Szpiro, Dimension projective finie et cohomologie locale, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **42** (1973), 47–119.
- [14] M. Reid, Canonical 3-folds, in: A. Beauville (Ed.), *Journées de géométrie algébrique d’Angers 1979*, Sijthoff & Noordhoff, Alphen, 1980, pp. 273–310.
- [15] K. Sato and S. Takagi, General hyperplane sections of threefolds in positive characteristic, to appear in *J. Inst. Math. Jussieu*.
- [16] K. Schwede and K. E. Smith, Globally F -regular and log Fano varieties, *Adv. Math.* **224** (2010), 863–894.
- [17] K. Schwede and W. Zhang, Bertini theorems for F -singularities, *Proc. London Math. Soc.* **107**, (2013), 851–874.
- [18] K. E. Smith, F -rational rings have rational singularities, *Amer. J. Math.* **119** (1997), 159–180.
- [19] V. Srinivas and S. Takagi, Nilpotence of Frobenius action and the Hodge filtration on local cohomology, *Adv. Math.* **305** (2017), 456–478.