

Toward spin 3/2 geometry

本間 泰史 (早稲田大学理工学術院)*

1. 序論 (スピン 1/2 幾何学)

スピン幾何学とは、スピノール場とディラック作用素を用いてスピン多様体を研究する微分幾何学・微分位相幾何学である ([5], [12], [22])。このときスピノール場のスピンは 1/2 (数学的に言えば highest weight が $(1/2, \dots, 1/2)$) であるが, 「スピンを 3/2 (highest weight が $(3/2, 1/2, \dots, 1/2)$) へと上げた場合に, どのような幾何学が展開されるのであろうか?」。この問への部分的な回答として, スピン 3/2 版の消滅定理と平行スピノール場に関する研究成果 [20] (U. Semmelmann 氏との共同研究) について報告する。また, そこで利用した様々なワイゼンベック公式について説明する。

この序論ではスピン幾何学における基本的な定理を述べよう。 (M, g) をスピン多様体, $\mathbf{S}_{1/2}$ を (M, g) 上のスピノール束, $\Gamma(M, \mathbf{S}_{1/2})$ を滑らかな切断 (スピノール場) の空間とする。そして, 楕円型 (形式的) 自己共役作用素であるディラック作用素を

$$D : \Gamma(M, \mathbf{S}_{1/2}) \rightarrow \Gamma(M, \mathbf{S}_{1/2}) \quad (1.1)$$

とする。 M が偶数次元ならスピノール束は $\mathbf{S}_{1/2} = \mathbf{S}_{1/2}^+ \oplus \mathbf{S}_{1/2}^-$ と既約分解でき, この分解に沿ってディラック作用素は

$$D = \begin{pmatrix} 0 & D^- \\ D^+ & 0 \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

と表せる。 M^{2n} が閉スピン多様体なら **Atiyah-Singer** の指数定理「ディラック作用素のフレドホルム指数が微分位相不変量 $\hat{A}(M)$ ($\hat{A}$ -genus) に一致する」が成立する [2]。

$$\text{ind} D = \dim \ker D^+ - \dim \ker D^- = \int_M \hat{\mathbf{A}}(M) = \hat{A}(M). \quad (1.3)$$

もう一つの重要な定理はリヒネロビッツ公式 (またはディラック作用素に対するワイゼンベック公式) である:

$$D^2 = \nabla^* \nabla + \frac{1}{4} \text{Scal}, \quad (\text{リヒネロビッツ公式}), \quad (1.4)$$

$$-\frac{1}{2} P^* P + \frac{(n-1)}{2n} D^2 = \frac{1}{8} \text{Scal}, \quad (\text{ワイゼンベック公式}). \quad (1.5)$$

ここで, Scal はスカラー曲率であり, P はペンローズ作用素 (またはツイスター作用素)

$$P : \Gamma(M, \mathbf{S}_{1/2}) \rightarrow \Gamma(M, \mathbf{S}_{3/2}), \quad \mathbf{S}_{1/2} \otimes T^* M \cong \mathbf{S}_{1/2} \oplus \mathbf{S}_{3/2}, \quad (1.6)$$

である。閉リーマン多様体上で接続ラプラシアン $\nabla^* \nabla$ は非負の作用素であるので, $\text{Scal} > 0$ なら $\ker D = \{0\}$ という消滅定理を得る。さらに, 指数定理により $\hat{A}(M) = 0$ となる。このように, $\hat{A}$ -genus は M 上に正スカラー曲率を持つリーマン計量が存在するための位相的な障害である。また, $P^* P \geq 0$ より, D の固有値 λ に対する固有値評価を得る [12]:

$$\lambda^2 \geq \frac{n}{4(n-1)} \max_{x \in M} \text{Scal}(x), \quad (\text{フリードリッヒの固有値評価}). \quad (1.7)$$

本研究は早稲田大学特定課題研究助成費の助成を受けています。

* 〒169-8555 東京都新宿区大久保 3-4-1 早稲田大学基幹理工学部数学科
e-mail: homma_yasushi@waseda.jp

等号を成立させるスピノール場はキリングスピノール場と呼ばれ、そのような場が存在すれば (M, g) はアインシュタイン多様体になる。また、 $\text{Scal} = 0$ ならキリングスピノール場は平行スピノール場であり、 (M, g) はリッチ平坦多様体になる。平行スピノール場の存在は $\mathbf{S}_{1/2}$ に自明部分束があることを意味し、ホロノミー群の簡約が起こる。そこで、Berger によるホロノミー群分類定理と合わせれば、平行スピノール場をもつスピン多様体の分類定理を得る。

定理 1 (Wang [30]). (M, g) を完備単連結既約 n 次元スピン多様体とし、

$$\mathcal{N} := \{\phi \in \Gamma(M, \mathbf{S}_{1/2}) \mid \nabla \phi = 0\}, \quad \mathcal{N}_{\pm} := \{\phi \in \Gamma(M, \mathbf{S}_{1/2}^{\pm}) \mid \nabla \phi = 0\}$$

とする ($n \geq 3$)。 $\dim \mathcal{N} > 0$ なら、 (M, g) はリッチ平坦多様体であり次のいずれか。

$n = \dim M$	$\text{Hol}(M)$	幾何構造	$\dim \mathcal{N}$ or $(\dim \mathcal{N}_+, \dim \mathcal{N}_-)$
$4k$	$\text{SU}(2k)$	カラビ・ヤウ	$(2, 0)$
$4k + 2$	$\text{SU}(2k + 1)$	カラビ・ヤウ	$(1, 1)$
$4k$	$\text{Sp}(k)$	超ケーラー	$(k + 1, 0)$
7	G_2	G_2	1
8	$\text{Spin}(7)$	$\text{Spin}(7)$	$(1, 0)$

Remark 2. キリングスピノール場をもつスピン多様体 (M, g) を分類するには、 (M, g) のリーマン錘を考えればよい。キリングスピノール場はリーマン錘上の平行スピノール場になるので、上の定理を利用できる。そこで、(正の) キリングスピノール場をもつ完備単連結スピン多様体は、球面、佐々木アインシュタイン、3-佐々木アインシュタイン、nearly ケーラー、nearly 平行 G_2 のいずれかである (Bär [3])。

2. ワイゼンベック公式の基本例

この section ではワイゼンベック公式を導くためのアイデアを、外微分と余微分を用いて説明する。 (M, g) を n 次元の向き付けられたリーマン多様体とする。このとき、一階微分作用素である外微分と余微分を得る。

$$d : \Gamma(M, \Lambda^p(M)) \rightarrow \Gamma(M, \Lambda^{p+1}(M)), \quad \delta = *^{-1}d* : \Gamma(M, \Lambda^p(M)) \rightarrow \Gamma(M, \Lambda^{p-1}(M)). \quad (2.1)$$

これらの微分作用素はレビチビタ接続からの共変微分

$$\nabla : \Gamma(M, \Lambda^p(M)) \rightarrow \Gamma(M, \Lambda^p(M) \otimes T^*M) \cong \Gamma(M, \Lambda^p(M) \otimes TM) \quad (2.2)$$

を用いて $d = \sum e_i \wedge \nabla_{e_i}$, $\delta = -\sum \iota(e_i) \nabla_{e_i}$ とも書ける。この意味を考えよう。 $\Lambda^p(M) \otimes TM$ を既約分解すれば、

$$\Lambda^p(M) \otimes TM \cong \Lambda^{p,1}(M) \oplus \Lambda^{p+1}(M) \oplus \Lambda^{p-1}(M) \quad (2.3)$$

となる。既約因子への射影 (の定数倍) がウェッジ積と内部積なのである。

$$\Pi_{\Lambda^{p+1}}(\phi \otimes e_i) = e_i \wedge \phi \in \Lambda^{p+1}(M), \quad \Pi_{\Lambda^{p-1}}(\phi \otimes e_i) = \iota(e_i)\phi \in \Lambda^{p-1}(M). \quad (2.4)$$

このように、 $d = \Pi_{\Lambda^{p+1}} \circ \nabla$, $\delta = -\Pi_{\Lambda^{p-1}} \circ \nabla$ となる。残りの既約因子 $\Lambda^{p,1}(M)$ への射影を考えれば、共形キリング作用素 $C = \Pi_{\Lambda^{p,1}} \circ \nabla : \Gamma(M, \Lambda^p(M)) \rightarrow \Gamma(M, \Lambda^{p,1}(M))$ を得る¹。これらの微分作用素に対して、次の関係式が成立する。

$$C^*C + \frac{1}{p+1}\delta d + \frac{1}{n-p+1}d\delta = \nabla^*\nabla, \quad (2.5)$$

$$-C^*C + \frac{p}{p+1}\delta d + \frac{n-p}{n-p+1}d\delta = q(R)_{\Lambda^p}, \quad (\text{ワイゼンベック公式}). \quad (2.6)$$

¹ $\ker C$ が共形キリング微分形式 ($p = 1$ なら共形キリングベクトル場) の空間である [25]

ここで、 $\nabla^*\nabla$ は接続ラプラシアンであり、 $\nabla_{X,Y}^2 = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_{\nabla_X Y}$ ($X, Y \in \mathfrak{X}(M)$)としたとき $\nabla^*\nabla = -\sum_i \nabla_{e_i, e_i}^2$ により定義される．また、 $q(R)_{\Lambda^p}$ は曲率に依存した $\Lambda^p(M)$ 上の束自己準同型である．例えば、 $p=1$ なら $TM \cong \Lambda^1(M)$ 上のリッチ変換 $q(R)_{\Lambda^1} = Ric$ である．式(2.5)は ∇ を $C + d + \delta$ と分解した式なので自明であるが、式(2.6)は「2階微分作用素の適当な線形結合を考えると階数がゼロとなり曲率で与えられる」ことを意味する．両方合わせれば、

$$d\delta + \delta d = \nabla^*\nabla + q(R)_{\Lambda^p} := \Delta \quad (2.7)$$

を得る．この右辺 Δ を標準ラプラシアンと呼ぶ．そのように呼ぶ理由は、 $d\Delta = \Delta d$ 、 $\delta\Delta = \Delta\delta$ などの交換関係式が成立し、対称空間上ならカシミール作用素に一致するなど幾何学的によい性質を満たすためである．標準ラプラシアンは任意の同伴ベクトル束 $\mathbf{S}_\rho = \mathbf{SO}(M) \times_\rho V_\rho$ 上でも $\Delta := \nabla^*\nabla + q(R)_\rho$ として定義され、似たような性質を満たす[28]．

ワイゼンベック公式から閉リーマン多様体における消滅定理や固有値評価が得られるが、例として $\Lambda^1(M)$ 上で考えてみよう． $Ric = q(R)_{\Lambda^1} > 0$ なら $d\delta + \delta d > 0$ となり消滅定理 $b_1(M) = 0$ を得る．また、

$$d\delta + \delta d = \Delta = \frac{n}{n-1}C^*C + \frac{n-2}{2(n-1)}\delta d + \frac{n}{n-1}Ric \quad (2.8)$$

と変形できるので、ある正の定数 r が存在して $Ric \geq r > 0$ を満たせば、 Δ の固有値 λ は $\lambda \geq \frac{n}{n-1}r$ と下から評価できる（等号成立は小島の定理により球面である）．

上記のワイゼンベック公式を導くアイデアを二通の方法で述べよう．第一の方法は微分作用素の主表象の代数関係式をもとめるという方法である． $\xi \wedge, \iota(\xi)$ の反対称な関係式は、

$$\xi \wedge \iota(\eta) - \frac{1}{2}g(\xi, \eta) = -(\iota(\eta)\xi \wedge - \frac{1}{2}g(\eta, \xi)), \quad \eta, \xi \in TM \cong T^*M \quad (2.9)$$

となる．この式と $\Lambda^p(M)$ 上の曲率の定義式から導かれる対称な関係式

$$\nabla_{\eta, \xi}^2 - \frac{1}{2}R_{\Lambda^p}(\eta, \xi) = \nabla_{\xi, \eta}^2 - \frac{1}{2}R_{\Lambda^p}(\xi, \eta), \quad \eta, \xi \in TM \cong T^*M \quad (2.10)$$

を組み合わせれば、ワイゼンベック公式 $d\delta + \delta d = \nabla^*\nabla + q(R)_{\Lambda^p}$ を得る（(2.6)も同様に得ることができる）．また、代数的関係式として $\xi \wedge \xi \wedge = 0$ 、 $\iota(\xi)\iota(\xi) = 0$ から準同型タイプのワイゼンベック公式である $dd = 0$ 、 $\delta\delta = 0$ を得る．第二の方法は振れディラック作用素を用いる．スピノール束 $\mathbf{S}_{1/2}$ をその束自身で振じった場合のディラック作用素

$$\hat{D} = \sum_i (e_i \cdot \otimes \text{id}) \nabla_{e_i} : \Gamma(M, \mathbf{S}_{1/2} \otimes \mathbf{S}_{1/2}) \rightarrow \Gamma(M, \mathbf{S}_{1/2} \otimes \mathbf{S}_{1/2}) \quad (2.11)$$

を考える．ベクトル束の既約分解 $\mathbf{S}_{1/2} \otimes \mathbf{S}_{1/2} = \oplus_p \Lambda^p(M)$ に沿って $\hat{D}$ を分解すると、

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} 0 & \delta & 0 & \cdots & 0 \\ d & 0 & \delta & \cdots & 0 \\ 0 & d & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}, \quad \hat{D}^2 = \begin{pmatrix} \delta d & 0 & \delta\delta & \cdots & 0 \\ 0 & d\delta + \delta d & 0 & \cdots & 0 \\ dd & 0 & d\delta + \delta d & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

となる．また、振れディラック作用素に対するリヒネロビッツ公式を考えると、

$$\hat{D}^2 = \nabla^*\nabla + q(R)_{\mathbf{S}_{1/2} \otimes \mathbf{S}_{1/2}} + \frac{\text{Scal}}{8} - \text{id} \otimes q(R)_{\mathbf{S}_{1/2}} = \Delta + \frac{\text{Scal}}{8} - \text{id} \otimes q(R)_{\mathbf{S}_{1/2}} = \Delta \quad (2.13)$$

を得る．ここで、 $q(R)_{\mathbf{S}_{1/2}} = \text{Scal}/8$ を用いた．各 $\Lambda^p(M)$ 上で見ると $d\delta + \delta d = \Delta$ 、 $d^2 = 0$ 、 $\delta^2 = 0$ を得る．さらに、 $\hat{D}^2 \hat{D} = \hat{D} \hat{D}^2$ から、 $d\Delta = \Delta d$ 、 $\delta\Delta = \Delta\delta$ という交換関係式を得る．

以上を基本例として、次のsectionでワイゼンベック公式を一般化する（別の同伴ベクトル束を考えるまたは別のホロノミー群を考えるという意味での一般化）．

3. generalized gradient とワイゼンベック公式の一般論

(M, g) を n 次元の向き付けられたリーマン多様体 (resp. スピン多様体) とし, 接フレーム束である主 $\mathrm{SO}(n)$ 束を $\mathbf{SO}(M)$ (resp. スピン構造である主 $\mathrm{Spin}(n)$ 束を $\mathbf{Spin}(M)$) とする. 構造群 $\mathrm{SO}(n)$ (resp. $\mathrm{Spin}(n)$) の各既約表現 (π_ρ, V_ρ) に対して既約ベクトル束 $\mathbf{S}_\rho = \mathbf{SO}(M) \times_{\pi_\rho} V_\rho$ (resp. $\mathbf{Spin}(M) \times_{\pi_\rho} V_\rho$) を得る. ここで, ρ は highest weight を表す. このとき, **generalized gradient** という自然な一階微分作用素

$$D_\lambda^\rho : \Gamma(M, \mathbf{S}_\rho) \xrightarrow{\nabla} \Gamma(M, \mathbf{S}_\rho \otimes TM) \xrightarrow{\Pi_\lambda} \Gamma(M, \mathbf{S}_\lambda) \quad (3.1)$$

を得る. ここで, $\Pi_\lambda : \mathbf{S}_\rho \otimes TM = \oplus_\lambda \mathbf{S}_\lambda \rightarrow \mathbf{S}_\lambda$ は既約因子への直交射影 (束準同型) であり, 分解に現れる既約成分の数を N と書く. ディラック作用素, 外微分, 余微分, 共形キリング作用素, ペンローズ作用素, (後で定義する) ラリタ-シュインガー作用素などは generalized gradients である. さらに, ホロノミー群が簡約する場合に, 同様の構成方法で幾何構造に付随した自然な 1 階微分作用素を得る. 例えば, ケーラー多様体ならホロノミー群 $U(n)$ を考えれば, $\partial, \partial^*, \bar{\partial}, \bar{\partial}^*$ を得る. また, G_2 多様体や $\mathrm{Spin}(7)$ 多様体の場合に, 構造群に沿って $\Lambda^p(M)$ を分解することで, 外微分 d やディラック作用素 D も分解される. 分解された各微分作用素が G_2 - ($\mathrm{Spin}(7)$ -) generalized gradient であり d や D の性質をより詳しく調べられることになる ([16],[17],[18],[27],[28]).

さて, $\{D_\lambda^\rho\}_\lambda$ は ∇ を分解したものなので,

$$\sum_\lambda (D_\lambda^\rho)^* D_\lambda^\rho = \nabla^* \nabla \quad (3.2)$$

が成立する. ワイゼンベック公式とは 2 階微分作用素の適当な線形結合に対して

$$\sum_\lambda a_\lambda (D_\lambda^\rho)^* D_\lambda^\rho = \text{曲率自己準同型} \quad (3.3)$$

となる式であるが, 独立なものは $[N/2]$ 個存在する. このような式もとめるには Section 2 で述べたように $\{D_\lambda^\rho\}_\lambda$ の主表象の反対称な関係式を与えればよい. 実は, リー環 $\mathfrak{so}(n) = \mathrm{Lie}(\mathrm{SO}(n))$ の普遍展開環 $U(\mathfrak{so}(n))$ における次の関係式からすべて導ける.

定理 3 (普遍ワイゼンベック公式 [17]). $\{e_{ij} = e_i \wedge e_j\}_{i < j}$ を $\mathfrak{so}(n) \cong \Lambda^2(\mathbb{R}^n)$ の標準基底として,

$$\hat{e}_{ij}^q = \sum_{i_1, \dots, i_{q-1}} \hat{e}_{ii_1} \hat{e}_{i_1 i_2} \cdots \hat{e}_{i_{q-1} j} \in U(\mathfrak{so}(n)), \quad \hat{e}_{ij} := e_{ij} - \frac{n-1}{2} \delta_{ij} \quad (3.4)$$

とする. $\hat{e}_q = \sum_i \hat{e}_{ii}^q \in Z(U(\mathfrak{so}(n)))$ は $U(\mathfrak{so}(n))$ の中心元 (カシミール元) である. このとき, 次の反対称関係式が成立する ($p = 1, 2, \dots$).

$$\hat{E}_{ij}^{2p+1} + \hat{E}_{ji}^{2p+1} = 0, \quad \text{where } \hat{E}_{ij}^{2p+1} = \sum_{0 \leq k \leq 2p+1} (-1)^k \hat{c}_{2p+1-k} \hat{e}_{ij}^k. \quad (3.5)$$

この式 (3.5) をベクトル束 $\mathbf{S}_\rho$ に作用させれば, 微分作用素 $\{D_\lambda^\rho\}_\lambda$ の主表象の反対称な関係式を得る. そして, $\mathbf{S}_\rho$ 上の曲率の定義式による対称な関係式

$$\nabla_{e_i, e_j}^2 - \frac{1}{2} R_\rho(e_i, e_j) = \nabla_{e_j, e_i}^2 - \frac{1}{2} R_\rho(e_j, e_i) \quad (3.6)$$

と合わせれば, すべての (独立な $[N/2]$ 個の) ワイゼンベック公式を得る. ここで述べているのはリーマン多様体の場合であるが, ホロノミー群が G へ簡約するなら, リー環 $\mathrm{Lie}(G)$ に対して同様のことを考えればよい. よって, 各ホロノミー群に付随した形でシステムティックにワイゼンベック公式が得られ, 消滅定理や固有値評価を与えるのである. 次の例で見るように四元数ケーラー幾何ではとても強力な道具となる.

例 1 ([26], [18]). (M, g) を正の $4n$ 次元四元数ケーラー多様体とする. (M, g) はアインシュタイン多様体であり, ホロノミー群は $\mathrm{Sp}(n)\mathrm{Sp}(1) = (\mathrm{Sp}(n) \times \mathrm{Sp}(1))/\mathbb{Z}_2$ となる. $\mathrm{Sp}(n)$, $\mathrm{Sp}(1)$ の自然表現に対応するベクトル束を *Salamon* の表記に従い E, H と書けば, $TM \otimes \mathbb{C} = E \otimes H$ となる ([24]). H の対称テンソル積を $S^p(H)$ とする. E の交代テンソル積 $\Lambda^a(E)$ を $\mathrm{Sp}(n)$ に関して既約分解したときの *primitive* 項 (*highest weight* が最も大きいもの) を $\Lambda_0^a(E)$ と書き, $\Lambda_0^a(E) \otimes \Lambda_0^b(E)$ の *primitive* 項を $\Lambda_0^{a,b}(E)$ と書くことにする. このとき, k 次微分形式のベクトル束 $\Lambda^k(M)$ を既約分解すると, $\Lambda_0^{a,b}(E) \otimes S^p(H)$ ($0 \leq p \leq 2n - a - b$, $0 \leq b \leq a \leq n$) という形の既約ベクトル束を既約因子にもつ. このベクトル束上には高々 10 個の *generalized gradients* があるが, ワイゼンベック公式を使えば

$$\Delta = \left(\sum_{\lambda} b_{\lambda} (D_{\lambda}^{\rho})^* D_{\lambda}^{\rho} \right) + \frac{(p + a - b)(p - a - b + 2n + 2)}{8n(n + 2)} \mathrm{Scal} \quad (b_{\lambda} \geq 0) \quad (3.7)$$

と変形できる ($p \neq 0$ の場合). このようにして, $\Delta = d\delta + \delta d$ の $\Lambda_0^{a,b}(E) \otimes S^p(H)$ における固有値 λ をスカラー曲率を用いて下から評価できる:

$$\lambda \geq \frac{(a - b)(2n - a - b + 4)}{8n(n + 2)} \mathrm{Scal} \quad (\text{for } p = 0), \quad (3.8)$$

$$\lambda \geq \frac{(p + a - b)(p - a - b + 2n + 2)}{8n(n + 2)} \mathrm{Scal} \quad (\text{for } p \neq 0). \quad (3.9)$$

特に, $p = 0$ かつ $a = b$ のとき Δ は零固有値をもつ可能性がある. 言い換えれば, 調和形式が存在するなら, それは $\Lambda_0^{a,a}(E)$ の切断でなければならない. 実は, $\Lambda^{2k+1}(M)$ を既約分解しても $\Lambda_0^{a,a}(E)$ という束は現れないので, 正の四元数ケーラー多様体上で $b_{2k+1}(M) = 0$ ($k = 0, 1, \dots$) という消滅定理を得る. また, 四元数ケーラー多様体上のツイスター空間 $Z(M)$ を考えたとき, $Z(M)$ のコホモロジー消滅からペンローズ変換を通して得られる M 上の消滅定理が多数存在する. それらの消滅定理はツイスター空間を利用しなくても, 上記の手法で直接証明できる.

次に, 第二の方法である振れディラック作用素を用いると何が得られるかについて述べる ([19]). 既約同伴束 $\mathbf{S}_{\mu}$ をテンソルした, 振れディラック作用素

$$\hat{D}_{\mu} = \sum_i (e_i \cdot \mathrm{id}) \nabla_{e_i} : \Gamma(M, \mathbf{S}_{1/2} \otimes \mathbf{S}_{\mu}) \rightarrow \Gamma(M, \mathbf{S}_{1/2} \otimes \mathbf{S}_{\mu}) \quad (3.10)$$

を考える. このとき, (振れ) リヒネロビッツ公式は次で与えられる.

$$\hat{D}_{\mu}^2 = \nabla^* \nabla + q(R) \mathbf{S}_{1/2} \otimes \mathbf{S}_{\mu} + \mathrm{Scal}/8 - \mathrm{id}_{\mathbf{S}_{1/2}} \otimes q(R)_{\mu} = \Delta + \mathrm{Scal}/8 - \mathrm{id}_{\mathbf{S}_{1/2}} \otimes q(R)_{\mu} \quad (3.11)$$

また, ベクトル束の既約分解 $\mathbf{S}_{1/2} \otimes \mathbf{S}_{\mu} = \oplus_{\rho \in \Lambda_{\mu}} \mathbf{S}_{\rho}$ に沿って $\hat{D}_{\mu}$ を分解し $\mathbf{S}_{\rho}$ へ制限すれば,

$$\hat{D}_{\mu}|_{\mathbf{S}_{\rho}} = \sum_{\lambda} a_{\lambda} D_{\lambda}^{\rho} : \Gamma(M, \mathbf{S}_{\rho}) \rightarrow \Gamma(M, \oplus_{\lambda \in \Lambda_{\mu}} \mathbf{S}_{\lambda}), \quad (a_{\lambda} \in \mathbb{R}) \quad (3.12)$$

となり, *generalized gradients* たちの線形結合で表せる. よって,

$$\hat{D}_{\mu}^2|_{\mathbf{S}_{\rho}} = \sum_{\lambda} a_{\lambda}^2 (D_{\lambda}^{\rho})^* D_{\lambda}^{\rho} = \Delta + \mathrm{Scal}/8 - (\mathrm{id} \otimes q(R)_{\mu})|_{\mathbf{S}_{\rho}} : \Gamma(M, \mathbf{S}_{\rho}) \rightarrow \Gamma(M, \mathbf{S}_{\rho}) \quad (3.13)$$

となり, ワイゼンベック公式 (右辺の第 1 項が非負であることに注意)

$$\Delta = \left(\sum_{\lambda} a_{\lambda}^2 (D_{\lambda}^{\rho})^* D_{\lambda}^{\rho} \right) - \mathrm{Scal}/8 + (\mathrm{id} \otimes q(R)_{\mu})|_{\mathbf{S}_{\rho}} \quad (3.14)$$

を得る．この式から， Δ の消滅定理や曲率による固有値評価を得ることができる（テンソルするベクトル束 $\mathbf{S}_\mu$ を代えて，より良い固有値評価を探すのである）．さらに，次のような準同型タイプのワイゼンベック公式を得る：

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(M, \mathbf{S}_\rho) & \xrightarrow{D_\lambda^\rho} & \Gamma(M, \mathbf{S}_\lambda) \\ D_{\lambda'}^\rho \downarrow & & \downarrow D_\nu^\lambda \\ \Gamma(M, \mathbf{S}_{\lambda'}) & \xrightarrow{D_{\nu'}^{\lambda'}} & \Gamma(M, \mathbf{S}_\nu) \end{array}, \quad (3.15)$$

という図式がある場合に，次が成立する（係数 $a, b \in \mathbb{R}$ も具体的にもとまる）．

$$aD_\nu^\lambda D_\lambda^\rho + bD_\nu^{\lambda'} D_{\lambda'}^\rho = \text{曲率準同型} : \Gamma(M, \mathbf{S}_\rho) \rightarrow \Gamma(M, \mathbf{S}_\nu). \quad (3.16)$$

例 2. $\mathbf{S}_{3/2}$ をテンソルした振れディラック作用素を考えよう．ベクトル束は

$$\mathbf{S}_{1/2} \otimes \mathbf{S}_{3/2} = \oplus_{1 \leq p \leq m} \Lambda^p(M) \oplus \oplus_{1 \leq p \leq m} \Lambda^{p,1}(M) \quad n = 2m + 1 \text{ の場合} \quad (3.17)$$

と分解される．ここで $\Lambda^0(M)$ は現れないので， $(\hat{D}_{3/2})^2$ を $\Lambda^1(M)$ へ制限すると，

$$(\hat{D}_{3/2})^2|_{\Lambda^1(M)} = \frac{n}{n-1} C^* C + \frac{n-2}{2(n-1)} \delta d = \Delta - \frac{n}{n-1} Ric \quad (3.18)$$

となり (2.8) を得る．そこで， $\Lambda^1(M)$ 上の Δ の固有値評価が従う．また， C と d （または δ ）に対する交換関係式（準同型タイプのワイゼンベック公式）を得る．

Remark 4. ワイゼンベック公式を2通りの方法でシステマティックにもとめることができたが，同伴ベクトル束に対する表現が複雑になればなるほどワイゼンベック公式における曲率自己準同型 $q(R)_\rho$ や $\text{id} \otimes q(R)_\mu$ が複雑になってしまい計算できない．微分幾何学的に面白いことが得られるのは，微分形式，対称テンソル積，スピンの1/2，スピンの $k/2$ ぐらいが限度であるように思う．

4. スピン3/2幾何学

このsectionでは，U. Semmelmann氏との共同研究である [20] について述べる．スピンの3/2のスピノール場を扱ったスピン幾何学の第一歩である．

4.1. ラリタ-シュインガー場

(M, g) を n 次元スピン多様体とし， $\mathbf{S}_{3/2}$ をスピン3/2スピノール束とする．スピン1/2のスピノール束 $\mathbf{S}_{1/2}$ に対応する $\text{Spin}(n)$ のhighest weightは $(1/2, \dots, 1/2)$ であるが，スピン3/2スピノール束 $\mathbf{S}_{3/2}$ とは，highest weightが $(3/2, 1/2, \dots, 1/2)$ に対応する同伴ベクトル束である．具体的に記述するには次のようにする：テンソル積 $\mathbf{S}_{1/2} \otimes TM$ は， $\mathbf{S}_{3/2} \oplus \mathbf{S}_{1/2}$ と既約分解されるが，射影 $\Pi_{1/2} : \mathbf{S}_{1/2} \otimes TM \rightarrow \mathbf{S}_{1/2}$ は（定数倍を除いて）クリフォード積を用いて表せる．すなわち， $\Pi_{1/2}(\psi \otimes X) = X \cdot \psi$ である．そこで， $\phi = \sum_i \phi_i \otimes e_i \in \mathbf{S}_{1/2} \otimes TM$ ($\{e_i\}_i$ は正規直交フレーム) に対して， $\phi \in \mathbf{S}_{3/2} \iff \sum e_i \cdot \phi_i = 0$ となる．

さて， $\mathbf{S}_{3/2}$ 上の共変微分 $\nabla : \Gamma(M, \mathbf{S}_{3/2}) \rightarrow \Gamma(M, \mathbf{S}_{3/2} \otimes T^*M)$ を考える．

$$\mathbf{S}_{3/2} \otimes T^*M \cong \mathbf{S}_{3/2} \otimes TM \cong \mathbf{S}_{3/2} \oplus \mathbf{S}_{1/2} \oplus \mathbf{S}_{5/2} \oplus \mathbf{S}_{(3/2, 3/2)} \quad (4.1)$$

と既約分解されるので， ∇ と各成分への射影を合成することにより，4つのgeneralized gradientsを得る． $\Pi_{1/2} \circ \nabla$ は(1.6)で述べたペンローズ作用素 P の随伴作用素 P^* である：

$$P^* : \Gamma(M, \mathbf{S}_{3/2}) \rightarrow \Gamma(M, \mathbf{S}_{1/2}) \quad (4.2)$$

そして、 $\Pi_{3/2} \circ \nabla$ はスピン $3/2$ におけるディラック作用素ともいうべきラリタ-シュインガー作用素と呼ばれる楕円型自己共役作用素である：

$$Q : \Gamma(M, \mathbf{S}_{3/2}) \rightarrow \Gamma(M, \mathbf{S}_{3/2}), \quad (\text{ラリタ-シュインガー作用素}). \quad (4.3)$$

Section 1 で述べたようにスピン幾何学では $\ker D$ (resp. $\ker \nabla$) の元である調和スピノール場 (resp. 平行スピノール場) が重要であった。そこで、そのスピン $3/2$ 版を考える。

定義 5. $\phi \in \Gamma(M, \mathbf{S}_{3/2})$ が $Q(\phi) = 0$ かつ $P^*(\phi) = 0$ を満たすときラリタ-シュインガー場と呼び、その全体を $\ker Q \cap \ker P^*$ で表す。また、 $\nabla \phi = 0$ を満たすとき平行ラリタ-シュインガー場と呼び、その全体を $\ker \nabla$ で表す。

[物理的・数学的な背景] ラリタ-シュインガー場は 1941 年に Rarita と Schwinger により定義され ([23])、物理学では活発な研究が行われている。重力波を媒介するゲージ粒子はグラビトン (重力子。スピンは 2) と呼ばれるが、その超対称性パートナーであるグラビティーノ (スピン $3/2$) を記述するのがラリタ-シュインガー場である。2016 年に重力波が検出されているが、重力子やグラビティーノは未発見であり存在するかもわからない。ラリタ-シュインガー場は Witten の重力アノマリーの一連の論文 ([1],[33],[35]) に現れるが、そこでは「 $\text{Scal} > 0$ なら $\text{ind} D = 0$ であるが、 $\text{ind} Q$ はゼロとは限らない。実際、 $SU(4)/(SU(2) \times SU(2) \times U(1))$, $\mathbb{H}P^2$, $G_2/SO(4)$ 上で $\text{ind} Q \neq 0$ である」と述べられている²。この指数は $\text{ind} Q = \text{ind} \hat{D}_{TM} + \text{ind} D$ と表せるが、振れディラック作用素の指数 $\text{ind} \hat{D}_{TM}$ は楕円種数での第二項であり、等質空間なら楕円種数が rigid であるという一般的な主張からも $\text{ind} Q = 0$ ($\dim M \geq 12$) となることに注意しよう ([34],[13])。さらに、 S^1 作用があるスピン多様体の場合に $\text{ind} \hat{D}_{TM}$ が消滅するかについて [10], [11] などで研究されている。微分幾何学においてラリタ-シュインガー場が現れるのは「アインシュタイン計量の無限小変形への応用」([31], [9]) や「8 次元多様体上の $PSU(3)$ 構造や $Sp(2)Sp(1)$ 構造への応用」([15], [32], [8]) ぐらいであり、物理学で頻繁に現れるわりには微分幾何学の視点からあまり議論されてこなかった³。そこで、ラリタ-シュインガー場を微分幾何学の視点から調べ、特に、指数定理とも関係する消滅定理について論じたのが今回の話である。

4.2. スピン $3/2$ でのワイゼンベック公式

話を元に戻そう。 $\mathbf{S}_{3/2}$ 上には 4 つの generalized gradients があり、2 つの独立なワイゼンベック公式が成立するので、 $\Pi_{5/2} \circ \nabla$, $\Pi_{3/2,3/2} \circ \nabla$ を消去することで次を得る。

$$Q^2 + \frac{4}{n} PP^* = \Delta + \frac{\text{Scal}}{8} - Ric^{3/2} : \Gamma(M, \mathbf{S}_{3/2}) \rightarrow \Gamma(M, \mathbf{S}_{3/2}) \quad (4.4)$$

ここで、 Δ は標準ラプラシアン $\Delta = \nabla^* \nabla + q(R)_{3/2}$ であり、 $Ric^{3/2}$ は $\mathbf{S}_{3/2}$ への Ric の作用である。

$$Ric^{3/2} \left(\sum_i \phi_i \otimes e_i \right) = \sum_{i,k} (Ric_{ik} \phi_i + \frac{1}{n} \sum_j Ric_{ij} e_k \cdot e_j \cdot \phi_i) \otimes e_k. \quad (4.5)$$

公式 (4.4) は次のように振れディラック作用素から導いてもよい。ディラック作用素を接束 TM で振じった $\hat{D}_{TM}$ を既約分解 $\mathbf{S}_{1/2} \otimes TM = \mathbf{S}_{1/2} \oplus \mathbf{S}_{3/2}$ に沿って 2×2 行列として書けば、

$$\hat{D}_{TM} : \Gamma(M, \mathbf{S}_{1/2} \otimes TM) \rightarrow \Gamma(M, \mathbf{S}_{1/2} \otimes TM), \quad \hat{D}_{TM} = \begin{pmatrix} \frac{2-n}{n} D & 2P^* \\ \frac{2}{n} P & Q \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

² 証明は Borel-Hirzebruch の等質空間での特性類 [4] による

³ クリフォード解析学という調和解析学の一分野では $\mathbb{R}^n$ 上で $\ker Q$ の多項式解はかなり調べられている [6],[7]

となる．そして、(振れ) リヒネロビッツの公式

$$\hat{D}_{TM}^2 = \Delta + \frac{\text{Scal}}{8} - \text{id} \otimes \text{Ric} = \begin{pmatrix} \Delta + \frac{n-8}{8n} \text{Scal} & (\text{Ric} - \frac{\text{Scal}}{n} g)^* \\ \text{Ric} - \frac{\text{Scal}}{n} g & \Delta + \text{Scal}/8 - \text{Ric}^{3/2} \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

と合わせれば式 (4.4) や次の準同型タイプのワイゼンベック公式 (及びその随伴) を得る．

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(M, \mathbf{S}_{1/2}) & \xrightarrow{D} & \Gamma(M, \mathbf{S}_{1/2}) \\ \frac{2-n}{n} PD + QP = \frac{1}{2}(\text{Ric} - \frac{\text{Scal}}{n} g), & P \downarrow & \downarrow P \\ \Gamma(M, \mathbf{S}_{3/2}) & \xrightarrow{Q} & \Gamma(M, \mathbf{S}_{3/2}) \end{array} \quad (4.8)$$

さらに、 $\hat{D}_{TM}^2 \hat{D}_{TM} = \hat{D}_{TM} \hat{D}_{TM}^2$ を利用すれば Δ と D, P, Q に対する交換関係式を得る．特に、アインシュタイン条件を仮定すると色々と可換になってしまう⁴．

定理 6. n 次元スピン閉多様体 (M, g) において、 $\Gamma(M, \mathbf{S}_{3/2}) = \ker P^* \oplus \text{Im}(P)$ ($\because P^*P$ が楕円型より) が成立．さらに、アインシュタイン多様体と仮定すると次が成立する

- $\Delta Q = Q\Delta, \Delta D = D\Delta, \Delta P = P\Delta, \Delta P^* = P^*\Delta.$

-

$$Q^2 = \begin{cases} \Delta + \frac{n-8}{8n} \text{Scal} & : \ker P^* \rightarrow \ker P^* \\ (\frac{n-2}{n})^2 (\Delta + \frac{1}{8} \text{Scal}) & : \text{Im} P \rightarrow \text{Im} P \end{cases}. \quad (4.9)$$

- $\text{Scal} \geq 0$ なら $\ker Q \cap \text{Im}(P) = \{0\}$ であり $\ker Q = \ker Q \cap \ker P^* = \{\text{ラリタ-シュインガー場}\}.$

Remark 7. $\text{Scal} < 0$ かつ $\ker D \neq \{0\}$ となるアインシュタイン-スピン閉多様体を考える． $\phi \in \ker D$ に対し (4.8) より $Q(P\phi) = 0$ となる、また、 P は $\ker D$ 上では単射となるので $P\phi \neq 0$ ．よって、 $\ker Q \neq \{0\}$ を得る．

そこで、 $\text{Scal} \geq 0$ となるアインシュタイン-スピン多様体上でラリタ-シュインガー作用素を調べたいなら $Q^2 = \Delta + \frac{n-8}{8n} \text{Scal}$ (on $\ker P^*$) を調べればよいが、標準ラプラシアン Δ は非負の作用素とは限らない．そこで、色々な幾何構造を課した場合に Δ を調べることになる．

4.3. 四元数ケーラー多様体, 対称空間の場合

正四元数ケーラー-スピン多様体, 既約コンパクト-スピン対称空間は正の ($\text{Scal} > 0$ の) アインシュタイン-スピン多様体であるが⁵, $\ker Q \cap \ker P^*$ について次の定理を得る．

定理 8 (H-S[20]). 正四元数ケーラー-スピン多様体 M^{4n} が非自明なラリタ-シュインガー場をもつのは、 $n = 2$ ($\dim M = 8$) で $\text{Gr}_2(\mathbb{C}^4)$, HP^2 , $\text{G}_2/\text{SO}(4)$ のいずれかに限る．

Proof. ベクトル束 $\mathbf{S}_{3/2}$ を $\text{Sp}(n)\text{Sp}(1)$ に関して既約分解すると例 1 における $\Lambda_0^{a,b}(E) \otimes S^p(H)$ が現れ、 Δ の固有値評価 (3.9) から $\Delta \geq 0$ を得る． $\ker P^*$ 上で $Q^2 = \Delta + \frac{(4n)-8}{8(4n)} \text{Scal}$ であるので、 $4n > 8$ なら $\ker Q = \{0\}$ である． $n = 2$ なら $Q^2 = \Delta$ であり、 Δ が零固有値を持つのは $\mathbf{S}_{3/2}$ が $\Lambda_0^{a,a}(E)$ となる既約成分を持つときである．実は、 $\mathbf{S}_{3/2}$ は rank1 自明束及び $\Lambda_0^{1,1}(E)$ を既約成分としてもち、これらは $\Lambda^2(M)$ の既約束でもある．そこで、 $\dim \ker Q = b_2(M) + 1$ となる．また、 $n = 2$ の正四元数ケーラー多様体は上で挙げたものしかない (by Poon-Salamon). $\square$

定理 9 (H-S[20]). 既約コンパクト-スピン対称空間が非自明なラリタ-シュインガー場をもつのは、8次元対称空間 $\text{Gr}_2(\mathbb{C}^4)$, $\text{SU}(3)$, $\text{Q}_4 = \frac{\text{SO}(6)}{\text{SO}(2) \times \text{SO}(4)}$ ($\dim \ker Q = 2$) 及び HP^2 , $\text{G}_2/\text{SO}(4)$ ($\dim \ker Q = 1$) のいずれかに限る．また、このとき $\ker Q = \ker \nabla$ となる．

⁴ $\nabla^* \nabla$ ではなく、標準ラプラシアン Δ を利用するというのが鍵である

Proof. 既約コンパクト対称空間において、 Δ はカシミール作用素なので $\Delta \geq 0$ となる。また、アインシュタイン多様体であり $\text{Scal} > 0$ であるので、公式 $Q^2 = \Delta + \frac{n-8}{8n}\text{Scal}$ から、 $n > 8$ なら $\ker Q = \{0\}$ となる。 $n = 8$ なら $\ker Q = \ker \Delta$ であり、カシミール作用素 Δ の公式とフロベニウス相互律から、 $\mathbf{S}_{3/2}$ の自明部分ベクトル束の切断が $\ker Q$ に対応することがわかる。そのよう自明束をもつ8次元既約コンパクトスピン対称空間は上で挙げたものだけである。また、このとき $\ker Q = \ker \nabla$ に注意しよう。 $n < 8$ の場合は、 $\mathbb{C}P^3, S^k$ が既約コンパクトスピン対称空間であるが、 Δ の固有値を計算すれば $\ker Q = \{0\}$ となる。 $\square$

4.4. 指数定理を用いたいくつかの結果

(M, g) を偶数次元の閉スピン多様体とする。振れディラック作用素 $\hat{D}_{TM}$ に対する指数定理から

$$\text{ind} Q = \text{ind} \hat{D}_{TM} + \text{ind} D = \int_M \hat{A}(M) \text{ch}(TM^{\mathbb{C}}) + \int_M \hat{A}(M). \quad (4.10)$$

Proof. $\mathbf{S}_{1/2}^{\pm} \otimes TM \cong \mathbf{S}_{3/2}^{\pm} \oplus \mathbf{S}_{1/2}^{\mp}$ と Atiyah-Singer の指数定理から従う。 $\square$

多様体の次元が低い場合には、 $\text{ind} Q$ は次のように表せる。

$$19\sigma(M)/8 \quad (n=4), \quad 25\hat{A}(M) - \sigma(M) \quad (n=8), \quad 5\hat{A}(M) + \sigma(M)/8 \quad (n=12) \quad (4.11)$$

ここで、スカラー曲率が正なら $\hat{A}(M) = 0$ であることに注意する。また、スピン多様体 M, N の直積多様体 $M \times N$ に対して、

$$\text{ind} Q^{M \times N} = \text{ind} Q^M \text{ind} D^N + \text{ind} D^M \text{ind} Q^N - \text{ind} D^M \text{ind} D^N, \quad \text{ind} D^{M \times N} = \text{ind} D^M \text{ind} D^N \quad (4.12)$$

である。例えば、 M, N のいずれかが正スカラー曲率を持てば $\text{ind} D^{M \times N} = 0$ であり、 M, N がどちらも正スカラー曲率を持てば $\text{ind} Q^{M \times N} = 0$ となる。さて、正アインシュタイン多様体において $Q^2 = \Delta + \frac{n-8}{8n}\text{Scal}$ (on $\ker P^*$) となるので、 $n > 8$ なら一見すると消滅定理が成立するように思えるが、 Δ は非負とは限らない。実際、指数定理を利用すれば次のような例を構成できる。 $X_m(d) \subset \mathbb{C}P^{m+1}$ を d 次斉次多項式による複素 m 次元の滑らかな超曲面とする。このとき Tian[29] の結果から $X_6(4), X_6(6)$ (どちらも $\dim M = 12$) には正のケーラーアインシュタイン計量を入れることができる。一方、Hirzebruch[14] を参照にすれば、 $\sigma(M) \neq 0$ となるので $\text{ind} Q = 5\hat{A}(M) + \sigma(M)/8 \neq 0$ を得る。

命題 10 (H-S [20]). ケーラーアインシュタイン多様体 $X_6(4), X_6(6)$ において $\ker Q = \ker Q \cap \ker P^* \neq \{0\}$.

また、 $X_2(6), X_4(8), X_6(10)$ には、負のアインシュタイン-ケーラー計量を入れることができる。また $\hat{A}(M) \neq 0$ がわかるので、Remark 7 から $\dim \ker Q \neq \{0\}$ (on $\text{Im}(P)$) となる。そして、 P が $\ker D$ 上で単射となるので、 $\text{ind} Q = \text{ind} D + \dim \ker Q^+|_{\ker P^*} - \dim \ker Q^-|_{\ker P^*}$. そこで $\sigma(M)$ を計算すると $\text{ind} Q \neq \text{ind} D$ となり、 $\ker Q|_{\ker P^*} = \ker Q \cap \ker P^* \neq \{0\}$ を得る。このように、非自明なラリタ-シュインガー場をもつ正または負のケーラーアインシュタイン多様体の例が作れた。

4.5. カラビ-ヤウ, 超ケーラー, G_2 , $\text{Spin}(7)$ の場合

リッチ平坦閉スピン多様体場合には $Q^2 = \Delta$ (on $\ker P^*$) であり、

$$\{\text{ラリタ-シュインガー場}\} = \ker Q \cap \ker P^* = \ker Q = \ker \Delta \quad (4.13)$$

となる。Berger の分類からホロノミー群が $\text{SU}(n), \text{Sp}(n), G_2, \text{Spin}(7)$ となる場合を考えることにする。 $\mathbf{S}_{3/2}$ をこのホロノミー群に関して既約分解すれば、現れるのは微分形式のベクト

ル束 $\Lambda^p(M)$ の直和因子であることがわかるので、 $Q^2 = \Delta = d\delta + \delta d$ と考えてよい．このようにリッチ平坦な場合にはラリタ-シュインガー場は調和形式で実現される．例えば、カラビ-ヤウ多様体 (M^{2n}, g) 上で

$$\mathbf{S}_{1/2} \cong \oplus_{0 \leq p \leq n} \Lambda^{0,p}(M), \quad \mathbf{S}_{3/2} \cong \oplus_{0 \leq p \leq n} (\Lambda^{1,p}(M) \oplus \Lambda^{n-p,1}(M)) - \oplus_{0 \leq p \leq n} \Lambda^{0,p}(M) \quad (4.14)$$

となるので、 $\dim \ker Q$ はホッジ数 $h^{p,q} = h^{q,p}$ を用いて表せる．ここで、 $\Lambda^{0,n}$ は自明束であることや分解 $\Lambda^{n-p,1}(M) \cong \Lambda_0^{n-p,1}(M) \oplus \Lambda^{n-p-1,0}(M)$ などを利用して計算する．

定理 11 (H-S[20]). (M^{2n}, g) をカラビ-ヤウ多様体 (コンパクトで $\text{Hol}(g) = \text{SU}(n)$) なら、非自明な平行ラリタ-シュインガー場は存在しない．また、 $h^{p,q} = \dim \ker \Delta|_{\Lambda^{p,q}(M)}$ とすれば、

$$\dim \ker Q = -2 + 2 \sum_{1 \leq p \leq n-1} h^{p,1}, \quad \text{ind} Q = 2 + 2 \sum_{1 \leq p \leq n-1} (-1)^p h^{p,1}. \quad (4.15)$$

例えば、 $n = 2$ (M が $K3$ 曲面) なら、 $\dim \ker Q = 38$ となる． $n = 3$ なら、 $\dim \ker Q = 2b_2(M) + b_3(M) - 4$ となる．

実 $4n$ 次元超ケーラー閉多様体の場合も同様に計算すればよい． $\text{Hol}(M) = \text{Sp}(n)$ に関して $\mathbf{S}_{3/2}$ を分解するとランク $n-1$ の自明束をもつことに注意する．

定理 12 (H-S[20]). (M^{4n}, g) がコンパクトな超ケーラー多様体 ($\text{Hol}(M) = \text{Sp}(n)$) なら、

$$\dim \ker Q = -(n+1) + 2h^{n,1} + 4 \sum_{1 \leq p \leq n-1} h^{p,1}, \quad \text{ind} Q = (n+1) + (-1)^n 2h^{n,1} + 4 \sum_{1 \leq p \leq n-1} (-1)^p h^{p,1} \quad (4.16)$$

である．また、 $n-1$ 次元の平行ラリタ-シュインガー場をもつ．

Remark 13. リッチ平坦スピン多様体上で $\ker D = \ker \nabla$ であったが、上で見たようにスピン $3/2$ スピノール場については $\ker Q \cap \ker P^* \neq \ker \nabla$ である．

例外幾何学である G_2 多様体や $\text{Spin}(7)$ 多様体の場合も同様の議論をすれば次の定理を得る．また、Joyce [21] を参考にすれば $\ker Q \neq \{0\}$ となる $\text{Spin}(7)$ 多様体、 G_2 多様体を得る⁵．

定理 14 (H-S[20], Wang[31]). (M, g) を 8 次元コンパクトリーマン多様体で $\text{Hol}(M) = \text{Spin}(7)$ とする．このとき $\dim \ker Q = b_2(M) + b_3(M) + b_4^-(M)$ 、 $\dim \ker \nabla = 0$ となる．

定理 15 (H-S[20], Wang[31]). (M, g) を 7 次元コンパクトリーマン多様体で $\text{Hol}(M) = G_2$ とする．このとき、 $\dim \ker Q = b_2(M) + b_3(M) - 1$ 、 $\dim \ker \nabla = 0$ となる．

以上の定理をすべて合わせると平行なラリタ-シュインガー場をもつ多様体を分類できる．

定理 16 (H-S[20]). (M, g) を既約スピン閉多様体とする⁶． (M, g) が平行ラリタ-シュインガー場をもつなら、定理 9 で挙げた対称空間のいずれかまたは (局所的に) 超ケーラー多様体である．

参考文献

- [1] L. Alvarez-Gaume, E. Witten, *Gravitational anomalies*, Nuclear Phys. B **234** (1984), 269-330.
- [2] M. F. Atiyah and I. M. Singer, *The index of elliptic operators on compact manifolds*. Bull. Amer. Math. Soc., **69** (1963), 422-433.
- [3] C. Bär, *Real Killing spinors and holonomy*, Comm. Math. Phys., **154**, (1993) 509-521.
- [4] A. Borel and F. Hirzebruch, *Characteristic Classes and Homogeneous Spaces, I, II*, Amer. J. Math., **80**, (1958) 458-538, **81** (1959) 315-382.

⁵ $\ker Q = \{0\}$ となる $\text{Spin}(7)$ 多様体や G_2 多様体が存在するかはわからない

⁶ 平行スピノールの場合と異なり、ここではコンパクトを仮定している

- [5] J. -P. Bourguignon, O. Hijazi, J.-L. Milhorat, A. Moroianu, and S. Moroianu *A spinorial approach to Riemannian and conformal geometry*, Monographs in Math., EMS (2015).
- [6] J. Bures, F. Sommen, V. Soucek, P. Van Lancker, *Rarita-Schwinger type operators in Clifford analysis*, J. Funct. Anal. **185** (2001), no. 2, 425-455.
- [7] J. Bures, F. Sommen, V. Soucek, P. Van Lancker, *Symmetric analogues of Rarita-Schwinger equations*, Ann. Global Anal. Geom. **21** (2002), no. 3, 215-240.
- [8] D. Conti, T.B. Madsen, S. Salamon, *Quaternionic geometry in dimension eight*, arXiv:1610.04833, Geometry and Physics: Volume I, A Festschrift in honour of Nigel Hitchin, Oxford (2018).
- [9] X. Dai, X. Wang, W. Guofang, *On the stability of Riemannian manifold with parallel spinors*, Invent. Math., **161** (2005), 151-176.
- [10] A. Dessai, *Spin^c-manifolds with Pin(2)-action*, Math. Ann. **315** (1999), no. 4, 511-528.
- [11] A. Dessai, *Obstructions to positive curvature and symmetry*, Adv. Math. **210** (2007), 560-577.
- [12] Th. Friedrich, *Dirac operators in Riemannian geometry*. Grad. Stud. Math. **25**, AMS (2000).
- [13] F. Hirzebruch, Th. Berger, R. Jung, *Manifolds and modular forms*, Aspects of Mathematics, E20. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, (1992).
- [14] F. Hirzebruch, *Topological methods in algebraic geometry*, Springer (1966).
- [15] N. Hitchin, *Stable forms and special metrics*, Contemp. Math., 288, AMS, (2001), 70-89.
- [16] Y. Homma, *Bochner identities for Kählerian gradients*, Math. Ann. **333** (2005), no. 1, 181-211.
- [17] Y. Homma, *Bochner-Weitzenböck formulas and curvature actions on Riemannian manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **358** (2006), no. 1, 87-114.
- [18] Y. Homma, *Estimating the eigenvalues on quaternionic Kähler manifolds*, Internat. J. Math. **17** (2006), no. 6, 665-691.
- [19] Y. Homma, *Twisted Dirac operators and generalized gradients*, Ann. Global Anal. Geom. **50** (2016), no. 2, 101-127.
- [20] Y. Homma, U. Semmelmann, *The kernel of the Rarita-Schwinger operator on Riemannian spin manifolds*, to appear in Comm. Math. Phys., arXiv:1804.10602, 2018.
- [21] D. Joyce, *Compact manifolds with special holonomy*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, Oxford, 2000. xii+436 pp.
- [22] H. B. Lawson, M.-L. Michelsohn, *Spin geometry*, Princeton Mathematical Series, 38. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989. xii+427 pp.
- [23] W. Rarita, J. Schwinger, *On a Theory of Particles with Half-Integral Spin*, Physical Rev. (2) **60** (1941), 61.
- [24] S. M. Salamon, *Quaternionic Kähler manifolds*, Invent. Math. **67** (1982), 143-171.
- [25] U. Semmelmann, *Conformal Killing forms on Riemannian manifolds*, Math. Z. **245** (2003), no. 3, 503-527.
- [26] U. Semmelmann, G. Weingart, *Vanishing theorems for quaternionic Kähler manifolds*, J. Reine Angew. Math. **544** (2002), 111-132.
- [27] U. Semmelmann, G. Weingart, *The Weitzenböck machine*, Compos. Math. **146** (2010), 507-540.
- [28] U. Semmelmann, G. Weingart, *The Standard Laplace Operator*, Manuscripta Math. **158** (2019), no. 1-2, 273-293.
- [29] G. Tian, *On Kähler-Einstein metrics on certain Kähler manifolds with $C_1(M) > 0$* , Invent. Math. **89** (1987), no. 2, 225-246.
- [30] M. Y. Wang, *Parallel spinors and parallel forms*, Ann. Global Anal. Geom. **7** (1989), no. 1, 59-68.
- [31] M. Y. Wang, *Preserving parallel spinors under metric deformations*, Indiana Univ. Math. J. **40** (1991), no. 3, 815-844.
- [32] F. Witt, *Special metrics and triality*, Adv. Math. **219** (2008), no. 6, 1972-2005.
- [33] E. Witten, *Fermion quantum numbers in Kaluza-Klein theory*, Shelter Island II (Shelter Island, N.Y., 1983), 227-277, MIT Press, Cambridge, MA, 1985.
- [34] E. Witten, *Global gravitational anomalies*, Comm. Math. Phys. **100** (1985), no. 2, 197-229.
- [35] E. Witten, *Elliptic genera and quantum field theory*, Comm. Math. Phys. **109** (1987), no. 4, 525-536.