

Kähler-Einstein 計量の崩壊極限と モジュライ空間のコンパクト化

尾高 悠志 (京都大学)*

1. 背景と導入

1.1. Kähler-Einstein 計量と K 安定性

微分幾何において, Riemann 多様体の Ricci 曲率とはその計量から決まる (Riemann) 曲率の, いわば情報を減らしたバージョンであり, およそ体積の (局所的な) 歪みを捉えたものである. 複素多様体上の Kähler 計量の場合はもっと単純に $\partial\bar{\partial} \log \det g_{i,\bar{j}}$ ($\omega = \sqrt{-1} \sum g_{i,\bar{j}} dz_i \wedge d\bar{z}_j$ は Kähler 形式) と書くこともできる. 一般に標準線束 K_X 上の Hermite 計量 $|\cdot|$ は体積形式 $\sqrt{-1}^{n^2} \frac{\Omega \wedge \bar{\Omega}}{|\Omega|^2}$ と 1:1 に対応することに注意されたい. 例えば $K_X = 0$ ならばつまり K_X は (位数有限の) 局所系と思えるわけであるが, 行列式が平坦な自明計量となるような Kähler 計量こそが Ricci-平坦である.

より一般的な計量について次のような予想がされていて, 微分幾何的側面の発展を inspire していた. スカラー曲率というのは Ricci 曲率のトレースをとって更に情報を減らしたバージョンであり, 与えられた複素多様体上の関数を与える. 定義により, Einstein 計量は一定スカラー曲率計量である.

予想 1.1 (Yau-Tian-Donaldson 予想 (cf., [Don02])). なめらかな射影多様体 X とその上の偏極 (つまり豊富な線束) L について, X の上の一定スカラー曲率である Kähler 計量であって Kähler 類が $c_1(L) \in H^{1,1}(X)$ になるものが存在する事と, (X, L) が K -(poly) 安定であるという代数幾何的条件が同値である.

哲学としてはこれは多くの専門家に確信されていて, もとより満洲関数や藤木-Donaldson のモーメント写像描像を通して heuristic な説明がある. $c_1(L)$ と $c_1(X) = -c_1(K_X)$ が比例するという状況においては, 一定スカラー曲率性と Einstein 性は同値であるが, この場合においては Aubin, Yau の 1970 年代の有名な Calabi 予想の解決に加えて, 2012 年の Fano 多様体の場合の進展 ([Ber16, CDS15, Tia15] 等) によって解決された. その証明の最難関は Fano 多様体上の Kähler-Einstein 計量の極限の代数性を示す (cf., [DonSun14]) というアイデアが核であった. 一般の場合だと, それと「全く」同じ現象というのは期待されない上, K 安定の概念を (テスト配位の概念を広げる事で) 少し強めないといけないうかもしれないという業界一部での憶測はあるようだが, はっきりとしたことはまだわかっていないといえるだろう. 久本智之氏 of 原稿 [His18] も参照されたい.

1.2. 少し前の研究 - 双有理幾何学や純代数幾何的モジュライ理論との関係

個人的な話をすると, 私が元来この K 安定性 (cf., [Don02]) や Kähler-Einstein 計量に興味を持ったのは, 代数多様体のモジュライ空間の構成を代数曲線のそれ (M_g) から高

私の本研究は科研費 (課題番号:26870316, 16H06335, 18K13389) の助成を受けたものである.

2010 Mathematics Subject Classification: 14J28, 32M15

キーワード: モジュライ空間, Kähler-Einstein 計量, Gromov-Hausdorff 極限

* 〒606-8582 京都市左京区北白川追分町 京都大学大学院理学研究科

e-mail: yodaka@math.kyoto-u.ac.jp

web: <https://sites.google.com/site/yujiodaka2013/>

次元の場合へと拡張する話への興味からであった．一言で言うと，K-(poly) 安定な偏極代数多様体の “良い” 代数幾何的な コンパクトモジュライ variety (“K-moduli”) があるのではないかという事を研究した．厳密な定式化については若干の subtlety があるが，[FjkSch90], [Odk10] や [OSS16] 等をご覧いただきたい．代数曲線における Deligne-Mumford コンパクト化 $\overline{M}_g^{\text{DM}}$ や知られている様々な他の代数多様体の射影的幾何的コンパクト化 (e.g., [Sha80], [AleTho], [LazO’G17]) がこれの例といえる．更に $\overline{M}_g^{\text{DM}}$ がパラメトライズする安定曲線の高次元化である半対数標準モデル (“一般型多様体の場合”) としばしば略されるが，厳密にはクラスとしては異なる) のコンパクトなモジュライ空間である Kollár-Shepherd-Barron-Alexeev による KSBA 型射影的モジュライは [She83] により GIT 安定性を満たさないと知られていたが，これらも K-moduli の例である ([Odk13a, Odk12a])．総じて，今回対象としていただいた

- 双有理幾何学と K 安定性の理論の関連 (cf., [Odk10]) や
- Fano 多様体の K-moduli (cf., [Odk14a], [Sun16], [AnSpo17], [Sun18])

については既に他に多く講演もさせてもらったことに加えて上記サーベイもある上，私達がやっていたのは少し前 (主に 2012 年まで，並びに 2014 年) でその後の進展も著しいので，やはり上記を含むほかの文献の引用で済ませさせて頂きたい．幾らかのみ最近の進展を述べると，Fano 多様体の局所類似である KLT 特異点についての類似の理論も 2015 年秋の Chi Li による正規化体積 [C.Li18] の導入以来 (cf., also [Odk15a]) 多くの方が研究され，元来の K 安定性と同様の現象がより証明されてきている．また，藤田健人と C.Li による Fano 多様体の K 安定性の判定理論の発展もある ([Fjt16], [Li17])．これは，Tian のアルファ不変量の精密化であるデルタ不変量の導入により，ログ Calabi-Yau 多様体の特異性の問題であるという主張としても解釈され得る ([FO18], [BJ17])．

そこで此の度はその後に現在進行形で続けている，主に崩壊現象を取り扱う「トロピカル幾何学的コンパクト化」について焦点を当てたいと思う．とりわけ去年の 10 月に発表した [OO18b] についてである．

2. トロピカル幾何学的コンパクト化

2.1. 双曲的代数曲線のモジュライ空間 M_g の場合

まず簡単のために，そして全体像をよく捉えるために，リーマン面の場合 $M_g (g \geq 2)$ ([Odk14b]) からやろう．この場合には以下のような事が基本的な主張である．ここで CMet_1 は compact 距離空間で直径が 1 であるものの isometry class のなす集合に Gromov-Hausdorff 距離を入れた距離空間である．Gromov の定理によりこれはコンパクトである．

定理 2.1 ([Odk14b]). 複素解析的位相を入れた M_g のコンパクト化として，トロピカル幾何学的コンパクト化 $\overline{M}_g^T$ (コンパクト Hausdorff 位相空間) 及びその上の幾何的実現写像

$$\Phi: \overline{M}_g^T \rightarrow \text{CMet}_1$$

と呼ばれる写像が存在し，以下を満たす．

1. CMet_1 に Gromov-Hausdorff 距離を入れると Φ は連続である．

2. $[R] \in M_g$ に対して, $\Phi([R])$ は R の上の双曲計量から定まる *geodesic metric* d_{hyb} を直径で割った $d_R := d_{\text{hyb}}/\text{diam}(d_{\text{hyb}})$ を付随させた (R, d_R) である.
3. $\partial \overline{M}_g^T \setminus M_g$ はしかるべき重みつき有限グラフ (Γ, w) (“トロピカル曲線”) 有限個でパラメトライズされる階層 $S_g(\Gamma, w)$ に分割され, $S_g(\Gamma, w)$ は開単体を線形な有限群で割ったものである. $\Phi|_{S_g(\Gamma, w)}$ は Γ の上に適切な距離を入れたものを対応させる写像である.

更には [Odk18] によって $\overline{M}_g^T$ の構造が完全に explicit に記述される. 特に系としては双曲リーマン面の Gromov-Hausdorff 崩壊がグラフであると従うが, この事実自体は専門家には知られていたと思われる. 上記主張はそのモジュライ理論的な精密化である. これらの証明においては, Bers の定理 ([Bers74]) によって一定の長さ以下の単純閉曲線 $3g - 3$ 個に沿って, 任意の閉リーマン面が半ズボンに分割されるという事が大切である. これは Ascoli-Arzelà 型のコンパクト性定理により, 帰納的に単純閉曲線を作っていく, 各閉曲線の近傍の計量の構造が explicit にわかる事 (特にカラー定理) を用いてその長さを統制する事によって示される.

また Wolpert の双曲計量の漸近挙動の解析 [Wol90] に基づいて, $\overline{M}_g^T$ はより合わせ関数 $\log(-\log |\cdot|)$ による一般化された Morgan-Shalen-Boucksom-Jonsson コンパクト化と同定された ([Odk18]). ここに, 一般論としてはまだ見ぬ K-moduli 空間 (この場合は所謂 Deligne-Mumford コンパクト化) との密接な関連の一端が垣間見られるが, これと同じレベルの計量の挙動解析の議論を行うことはまだ一般の代数多様体では難しいであろう.

問題 2.2. *Borel-Serre* 型のコンパクト化の類似と言われる *Harvey* の *bordification* [Har81] との関係は?

境界の incidence complex であるカーブ複体 [Har81] から自然な支配写像が $\partial \overline{M}_g^T$ の上に飛んでいるという事までは容易に確認できる. (この節で言及するには少々尚早だが, 局所対称空間における Tits コンパクト化と佐武コンパクト化が大きく異なる為, M_g の場合のこの現象は興味深く思われる.)

2.2. 局所対称空間の既存のコンパクト化復習

2.2.1. 設定

対称空間の基礎等については [Hel] 等を参照されたい. 我々の設定は一般的には以下のとおりである. その中で幾らかの特殊な (G, G, K, Γ) の場合に $\Gamma \backslash D$ に Ricci-flat Kähler 多様体のモジュライとしての幾何的意味があるのでそうした場合に計量の境界挙動を調べていく.

- $\mathbb{G}$ は有理数体上簡約群, G はその実数体上有理点のなす Lie 群の開部分群, K はそのうち一つの極大コンパクト部分群.
- $D := G/K$ には Hermitian 対称空間の構造が入ると仮定. つまり K の中心の次元が 1 以上. 更に D は既約, よって G は Lie 群として単純と仮定.
- Γ は D 上に正則に作用する G の数論的部分群とする.

更に, $\mathfrak{g}$ の極大アーベル部分 Lie 環 $\mathfrak{a}$ と対応する実トーラス $A \simeq \mathbb{R}_{>0}^r$ は固定する. また, 一つ positive chamber を固定すると制限ルート系 $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) \subset \mathfrak{a}^* := \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a}, \mathbb{R})$ ができる. ここでもう一つ notation を導入する:

- $N(F)$ は, D の Borel-Harish-Chandra 埋め込みの境界成分 F に対応する G の極大実放物的部分群 (“ μ_{BB} -飽和実放物的部分群”) cf., [AMRT]. [BorJi06] に従ってそれは今後 $Q(P)$ 又は Q と書かれる. この中で対応する μ_{BB} -連結実放物的部分群を P とかく. ここで, μ_{BB} は制限ルート系において distinguished root にのみ直交しないようなウェイト (の一つ) である.

この状況において我々は $X := \Gamma \backslash D$ のコンパクト化を論じる.

2.2.2. 佐武コンパクト化

(局所) 対称空間のコンパクト化の基本文献として筆者としては [BorJi06] や [佐武 99] をお勧めする. G の有限次元既約表現 $(\tau, V \simeq \mathbb{C}^N)$ で K に制限するとユニタリであるものを一つとり, その最高ウェイトを μ とする. μ と直交しない制限ルートの集合を $I \subset \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ としたとき, この I ごとに, 一つ D の, そして X のコンパクト化ができるというのが佐武コンパクト化である ([Sat60a, Sat60b]). 代数幾何や複素幾何等, 現代的文脈でよく佐武コンパクト化という佐武-Baily-Borel コンパクト化または Baily-Borel コンパクト化 ([BB66]) のこととされるが, それは佐武先生の論文からしばらくして射影代数多様体の構造を持つと示された特殊な場合, すなわち I が distinguished root のみからなる場合の佐武コンパクト化のことである. 今回は Baily-Borel でない場合の佐武コンパクト化にトロピカル幾何学的・微分幾何学的・代数幾何的な意味づけを与える.

さて, 佐武コンパクト化の定義はおおよそ次のようなものである. より細かな事については [BorJi06, Sat60a, Sat60b, 佐武 99] 等に詳しい. 与えられた $(\tau, V \simeq \mathbb{C}^N)$ から自然に τ 同変な埋め込み $i_\tau: D = G/K \hookrightarrow \mathbb{P}(V')$ を考える. ここで V' は V の上の歪対称形式全体のなす実ベクトル空間であって, $\mathbb{P}(V')$ はその実射影化である. そして閉包 $\overline{i_\tau(D)}$ を考えると次のような階層構造を持つ ([Sat60a]):

$$\overline{i_\tau(D)} = D \sqcup \bigsqcup_{Q(P)} M_P / (K \cap M_P).$$

ここで P は実放物的部分群であって対応する $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ の部分集合 S が μ 連結, 即ち $\{\mu\} \cup S$ が連結であるものであり (S が空集合である事を許す), $Q(P)$ はそれに対応する μ -飽和な実放物部分群であり, これが全て動く. そして M_P は P の Langlands 分解 $P = N_P A_P M_P$ における簡約な部分群 M_P -part のことである. したがって $M_P / (K \cap M_P)$ は元の D より低次元であるこれまた対称空間である. $S = \emptyset$ の時のみ 1 点集合となる.

[Sat60b] においてははしめるべき条件のもとでこの $D \subset \overline{i_\tau(D)}$ の中間に “有理閉包” という

$$D^{*,\tau} := D \sqcup \bigsqcup_{Q(P):\text{rational}} M_P / (K \cap M_P)$$

を定義し, $(X \subset) \overline{X}^{\text{Sat},\tau} := \Gamma \backslash D^{*,\tau}$ がコンパクトである事を示した. これが X の佐武コンパクト化であるが, 定義から見てわかるように τ (または μ) に依存するわけである. D が Hermite 対称空間の構造を持ち, $\mu = \mu_{\text{BB}}$ が制限ルート系において distinguished

root にのみ直交しないようなウェイト (の一つ) である場合に, これは佐武-Baily-Borel コンパクト化であり, 射影的であると示された.

ここ数年行っていた大島芳樹氏 (大阪大学情報科学研究科) との共同研究 [OO18b] をこれ以降解説するが, ここで鍵となるのは, (τ, V) が随伴表現 $(\tau_{\text{ad}}, \mathfrak{g}(\otimes \mathbb{C}))$ の場合である. この場合, $\mathfrak{g}$ が球表現 (K 同時固有空間が実 1 次元分だけ存在する) であることから, $i_\tau: D \hookrightarrow \mathbb{P}(V')$ を G 同変な唯一の写像である $\iota_\tau: D \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathfrak{g})$ で replace できる.

コメント 2.3 (Borel-Serre コンパクト化). ちなみに, よりよく知られているようである局所対称空間の Borel-Serre コンパクト化 [BorSer73] は同じ局所対称空間のあらゆる佐武コンパクト化への全射を持つ. このコンパクト化はトポロジーが角付き多様体なのでその点扱いやすく, 例えば近年も *P. Scholze* 等によって Galois 表現の構成にも用いられたようである.

コメント 2.4. [OO18b, §2, 定理 2.1] において, 局所 Hermitian 対称空間 (“志村多様体”) の随伴型の佐武コンパクト化については, そのトロイダルコンパクト化 ([AMRT]) の Morgan-Shalen 型コンパクト化 ([MS84, BouJon17, Odk18] としてより “代数幾何学/非アルキメデス幾何学/トロピカル幾何学的に” 復元できるという事を示した. これも大切な観点であるが, 紙面の都合により詳細は本論文を参照されたい.

2.3. 随伴型佐武コンパクト化と Ricci 平坦計量の崩壊 ([OO18b])

主偏極 Abel 多様体のモジュライ空間 A_g の Gromov-Hausdorff コンパクト化 (或いはトロピカル幾何学的コンパクト化) については, 考える Ricci-flat 計量が explicit な平坦計量であり, 行列の挙動の計算に帰着されるので難しくはない ([Odk18]). しかし M_g, A_g の場合等を越えた一般の (非正 Ricci 曲率の) Kähler-Einstein 計量については explicit に書くことが一般に困難であるため, 具体的計算に基づいて崩壊を調べる事はできなかった. しかし周期の理論と対称空間の理論を活用して断熱極限の話に帰着をして [GroWil00, Tos10, GTZ13, GTZ16], K3 曲面の場合 (部分的には高次元超 Kähler 多様体においても) 次のように崩壊ならびに Gromov-Hausdorff コンパクト化の構造を conjectural に (部分的証明付き) 随伴型の佐武コンパクト化と同定した ([OO18b, §4, §6, §8]). また, 主偏極 Abel 多様体のモジュライ空間 A_g の場合は conjectural でなく定理として確立した ([OO18b, §3]).

次数 $2d$ の偏極 (ADE 特異点を許した) K3 曲面のモジュライ空間 $\mathcal{F}_{2d}$ の場合 ([OO18b, §4]) を扱う. これが周期写像によって $\tilde{O}^+(\Lambda_{2d}) \backslash O(2, 19) / O(2) \times O(19)$ とかける事は有名な事実であり, Torelli 型定理並びに周期写像の全射性による ([BR75, Tod79]). [OO18b, §4] の鍵となるのは以下の幾何学的実現射 (geometric realization map) の定義である.

$$\Phi_{\text{alg}}: \overline{\mathcal{F}_{2d}}^{\text{Sat}, \tau_{\text{ad}}} \rightarrow \text{CMet}_1.$$

ここで $\overline{\mathcal{F}_{2d}}^{\text{Sat}, \tau_{\text{ad}}}$ は随伴表現 τ_{ad} に対応する佐武コンパクト化であり, 次のような階層構造を持つことがわかる.

$$\overline{\mathcal{F}_{2d}}^{\text{Sat}, \tau_{\text{ad}}} = \mathcal{F}_{2d} \sqcup \bigsqcup_l \mathcal{F}_{2d}(l) \sqcup \bigsqcup_p \mathcal{F}_{2d}(p).$$

ここで l, p はそれぞれ 1, 2 次元の $\Lambda_{2d} \otimes \mathbb{Q}$ の isotropic な $\mathbb{Q}$ 上部分空間の $\tilde{O}^+(\Lambda_{2d})$ - 同値類である. 各階層は次のような構造を持つ.

- $\mathcal{F}_{2d}(l) := \{v \in (l^\perp/l) \otimes \mathbb{R} \mid (v, v) > 0\} / \sim$. ここで $v \sim v'$ は $g \cdot l = l$ なる $g \in \tilde{O}^+(\Lambda_{2d})$ とある $c \in \mathbb{R}^\times$ について $g \cdot v = cv'$ たる事である.
- $\mathcal{F}_{2d}(p)$ は単に 1 点である.

そこで所望の Φ_{alg} は以下のように構成する:

- $[(X, L)] \in \mathcal{F}_{2d}$ に対して, $\Phi_{\text{alg}}((X, L))$ を X の上に Kähler 類が $c_1(L)$ となる Ricci-flat Kähler (orbi) 計量から定まる距離空間とする.
- $[l, v] \in \mathcal{F}_{2d}(l)$ について, $l = \mathbb{Q}e$ ($e \in \Lambda_{2d}$) とかいたとき, $\Phi_{\text{alg}}([l, v])$ は次のようにしてできる距離の入った S^2 (“トロピカル K3 曲面”) である: 周期が $\lambda_{2d} - \sqrt{-1}cv$ ($c \in \mathbb{R}_{>0}$) とかけるある marked K3 曲面 X で e が基底点自由なものを取り, その定める楕円曲面 $X \rightarrow B \simeq \mathbb{CP}^1$ を考える. B に McLean 計量 (cf., [GroWil00, Gro12] etc) を入れて直径を 1 に rescale したものを $\Phi_{\text{alg}}([l, v])$ とする.
- $\mathcal{F}_{2d}(p)$ の点達はすべて長さ 1 の区間に移す.

この写像は階層ごとに “ばらばら” に定義したものであるが, 以下が期待されるというのが主な内容である.

予想 2.5 (主予想). CMet_1 に *Gromov-Hausdorff* 距離で位相を入れると Φ_{alg} は連続となる.

トロピカル K3 曲面 (球面 S^2) への崩壊の部分については証明を完成させた:

定理 2.6 (主予想 2.5 の部分的解決). 少なくとも $\overline{\mathcal{F}_{2d}}^{\text{Sat}, \tau_{\text{ad}}} \setminus (\bigsqcup_p \mathcal{F}_{2d}(p)) = \mathcal{F}_{2d} \sqcup \bigsqcup_l \mathcal{F}_{2d}(l)$ 上においては Φ_{alg} は連続である. また, $\partial \overline{\mathcal{F}_{2d}}^{\text{Sat}, \tau_{\text{ad}}} := \overline{\mathcal{F}_{2d}}^{\text{Sat}, \tau_{\text{ad}}} \setminus \mathcal{F}_{2d}$ 上においても Φ_{alg} は連続である.

系 2.7 (K3 曲面に対しての Gross-Wilson-Kontsevich-Soibelman 予想 (cf., [GroWil00, §6], [KS06, Conjecture 1]) の解決 + α). 偏極 K3 曲面の 1 パラメータ極大退化族 $\{(\mathcal{X}_t, \mathcal{L}_t)_{t \in \Delta^*}\}$ に対して, その $\mathcal{X}_t$ 上に Kähler 類が $\mathbb{R}_{>0}c_1(\mathcal{L}_t)$ 内に入っているような直径 1 の Ricci-flat Kähler 計量 g_t を考える. この時 $(\mathcal{X}_t, g_t)$ の $t \rightarrow 0$ における *Gromov-Hausdorff* 極限は存在し, これは球面に同相なトロピカル K3 曲面である.

またこれは, この族の Hodge 構造の変形 $\{PH^2(\mathcal{X}_t, \mathbb{Z})\}$ に伴う *monodromy* だけから決定される.

特に上述予想 2.5 が正しければ, 次数一定の偏極射影的 K3 曲面の Gromov-Hausdorff 崩壊は 2 次元球面または線分しかないと従う. 代数的とは限らない Kähler K3 曲面 (の超 Kähler 回転による同値類) のモジュライ空間 $\mathcal{M}_{\text{K3}}$ についても [KT87] によりこれは 57 次元の局所対称空間の構造を持つ事がわかっているので, [OO18b, §6] において随伴型の佐武コンパクト化 $\overline{\mathcal{M}_{\text{K3}}}^{\text{Sat, adj}}$ を

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{M}_{\text{K3}}}^{\text{Sat}} &= \mathcal{M}_{\text{K3}} \sqcup \mathcal{M}_{\text{K3}}(a) \sqcup \mathcal{M}_{\text{K3}}(b_1) \sqcup \mathcal{M}_{\text{K3}}(b_2) \\ &\quad \sqcup \mathcal{M}_{\text{K3}}(c_1) \sqcup \mathcal{M}_{\text{K3}}(c_2) \sqcup \mathcal{M}_{\text{K3}}(d). \end{aligned}$$

- $\mathcal{M}_{\text{K3}}(a)$ は 36 次元で $O(2, 18)/(O(2) \times O(18))$ の数論的商,

- $\mathcal{M}_{K3}(b_1)$ と $\mathcal{M}_{K3}(b_2)$ は5次元で $SL(3, \mathbb{R})/SO(3)$ の数論的商,
- $\mathcal{M}_{K3}(c_1)$ and $\mathcal{M}_{K3}(c_2)$ は2次元で $SL(2, \mathbb{R})/SO(2)$ の数論的商 (モジュラー曲線),
- $\mathcal{M}_{K3}(d)$ は1点,

と分割する事によって以下のように幾何学的実現写像

$$\Phi: \overline{\mathcal{M}_{K3}}^{\text{Sat}} \rightarrow \text{CMet}_1$$

が定義された.

- $\mathcal{M}_{K3}(a)$ はトロピカル K3 曲面 (“ S^2 ”) を explicit にパラメトライズ,
- $\mathcal{M}_{K3}(b_1)$ は平坦な $T^3/\pm 1$ をパラメトライズ (cf., [Fsc16]),
- $\mathcal{M}_{K3}(c_1)$ は平坦な $T^2/\pm 1$ をパラメトライズ,
- その他の境界成分は線分をパラメトライズする (cf., [CC16, HSVZ18]).

予想 2.8 (主予想 2 in [OO18b, §6]). 上記のパラメータ付けによって定まる Φ は連続である.

定理 2.9 (主予想 2.8 の部分的解決 [OO18b, §6]). $\Phi|_{\mathcal{M}_{2d} \sqcup \overline{\mathcal{M}_{K3}(a)}}$ は連続であり, 平坦な特異 Kummer 曲面をパラメトライズする locus $\mathcal{M}_{K3}$ の閉包 $\overline{\mathcal{M}_{K3}}$ は $\mathcal{M}_{K3}(a)$ 以外の境界成分を全て含むが, $\Phi|_{\overline{\mathcal{M}_{K3}}}$ も連続である.

上記の予想が正しければ, Ricci 平坦な K3 曲面の (Gromov-Hausdorff) 崩壊極限は

- “トロピカル K3 曲面” (S^2),
- 平坦な $T^3/\pm 1$,
- 平坦な $T^2/\pm 1$,
- 線分

の5種類しかない事になる. これら5つの異なる K3 曲面の崩壊の種類は, 素粒子物理学の観点からいうと “ M 理論のつかさどる超弦理論の間の双対性の鍵であるかもしれない” と Dave Morrison 氏にコメントをいただいた. 筆者にはよくわからないが, 数理論物理学の方との交流も有意義になればうれしく思う.

2.4. Open problems の例

多くの分野に関わるコンパクト化の理論であるので今後様々な方向性が考えられるが, 幾つか問題を提示したい.

2.4.1. 応用

多くの皆様に聞かれるのはこのコンパクト化の理論の応用の存在についてである. 基礎的な事の理解を進展すれば何れ応用はあると信じているが, (細かい事を除くと) 残念ながら具体的にはまだ見つかっていない.

2.4.2. Weil-Petersson 計量との関係

K -moduli 空間においても射影性に関係して大切な役割を果たす（一般化された）Weil-Petersson 計量（cf., [Koi83], [FjkSch90]）であるが、それとトロピカル幾何学的コンパクト化の関係については C.Spotti 氏を始め、様々な人に最近よく聞かれる．次のような問題と考えられる．

問題 2.10. *Weil-Petersson* 計量の K -moduli 空間の境界での漸近挙動からトロピカル幾何学的コンパクト化を再構成できるか？

M_g 上の Weil-Petersson 計量は [Mas76] により、完備化は Deligne-Mumford コンパクト化と同定できる．この事実は狭義 K 安定な偏極多様体のモジュライである K -moduli の開軌跡に拡張されるだろうと思われる．Calabi-Yau 多様体の場合については WP 計量は正則体積形式が flat なことを利用してより簡単に書ける（[Tia87]）．超ケーラー多様体の場合には [Schu85] により、周期領域上の Bergman 計量に一致する．

2.4.3. Calabi-Yau 多様体の場合

我々の [OO18b] の議論は、そこでの 8 節で論じたように、高次元の超ケーラー多様体（正則シンプレクティック多様体）に対しても技術的な困難を覗いておよそ同様に機能して成立すると考えている．ただ一般の Ricci 平坦計量については同じ議論は成立しない．それにもかかわらず Morgan-Shalen 型コンパクト化の理論を使うと [OO18b, §9, Problem 9.1] で提出したように、一般の Ricci-flat Kähler な射影多様体のモジュライ空間 M について極小な Morgan-Shalen-Boucksom-Jonsson コンパクト化が M の Gromov-Hausdorff コンパクト化を支配するかどうか？という問が定式化される．特に、[OO18b, §9] では技術的に仮定していた M の（分岐因子を込めての）対数的一般型性は [Den19] によって一般に正しいと主張された為に問題はより一般的で厳密な予想に近づいたので今後の進展を考えたい．

参考文献

- [ACP15] D. Abramovich, L. Caporaso, S. Payne, The tropicalization of the moduli space of curves, *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* (4) 48 (2015), no. 4, 765–809.
- [AleTho] V. Alexeev, A. Thompson, Modular compactification of moduli of K3 surfaces of degree 2, a preprint available on the first author’s website.
- [AnSpo17] D. Angella, C. Spotti, Kähler-Einstein metrics: Old and New, *Complex Manifolds* 4 (2017), 200–244.
- [AMRT] A. Ash, D. Mumford, M. Rapoport, Y.-S. Tai, Smooth compactifications of locally symmetric varieties, Cambridge Mathematical Library, Second edition (2010).
- [BB66] W.L. Baily, A. Borel, Compactification of arithmetic quotients of bounded symmetric domains, *Ann. of Math.* vol. 84 (1966), 442–528.
- [Bers74] L. Bers, Spaces of degenerating Riemann surfaces, in: *Discontinuous groups and Riemann surfaces* (L. Greenberg, ed.), *Annals of Mathematics Studies*, vol. 79, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ (1974), 43–55.
- [Ber16] R. Berman, K -polystability of $\mathbb{Q}$ -Fano varieties admitting Kähler-Einstein metrics. *Invent. Math.* 203 (2016).
- [BJ17] H. Blum, M. Jonsson, Thresholds, valuations, and K -stability, arXiv:1706.04548.
- [Bog78] F.A. Bogomolov, Hamiltonian Kählerian manifolds. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 243 (1978), no. 5, 1101–1104.

- [Bog81] F.A. Bogomolov, Kähler varieties with trivial canonical class. IHES preprint M/81/10, 1981.
- [BorJi06] A. Borel, L. Ji, Compactifications of symmetric and locally symmetric spaces, *Mathematics: Theory & Applications*. Birkhäuser, (2006).
- [BorSer73] A. Borel, J.-P. Serre, Corners and arithmetic groups, *Commentarii Mathematici Helvetici* December 1973, Volume 48, Issue 1, pp 436–491.
- [BouJon17] S. Boucksom, M. Jonsson, Tropical and non-archimedean limits of degenerating families of volume forms, *J. Éc. polytech. Math.* 4 (2017), 87–139.
- [BR75] D. Burns, M. Rapoport, On the Torelli problem for Kählerian K3 surfaces, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* 8 (1975), no. 2, 235–273.
- [CC16] G. Chen, X.-X. Chen, Gravitational instantons with faster than quadratic curvature decay (III), arXiv:1603.08465.
- [CDS15] X.X. Chen, S. K. Donaldson and S. Sun: Kähler-Einstein metrics on Fano manifolds, III: limits as cone angle approaches 2π and completion of the main proof. *J. Amer. Math. Soc.* 28 (2015), 235–278.
- [Den19] Y. Deng, Hyperbolicity of bases of log Calabi-Yau families, arXiv:1901.04423.
- [Don02] S. Donaldson, Scalar curvature and stability of toric varieties, *J. Differential Geom.* 62 (2002), no. 2, 289–349.
- [DonSun14] S. Donaldson, S. Sun, Gromov-Hausdorff limits of Kähler manifolds and algebraic geometry, *Acta Math.* 213 (2014), no. 1, 63–106.
- [Fsc16] L. Foscolo, ALF gravitational instantons and collapsing Ricci-flat metrics on the K3 surface, to appear in *J. Differential Geom.* (arXiv:1603.06315).
- [FjkSch90] A. Fujiki, G. Schumacher, The moduli space of extremal compact Kähler manifolds and generalized Weil-Petersson metrics, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* 26 (1990), no. 1, 101–183.
- [Fjt16] K. Fujita, A valuative criterion for uniform K-stability of Q-Fano varieties, *J. Reine Angew. Math.* (2016).
- [FO18] K. Fujita, Y. Odaka, On the K-stability of Fano varieties and anticanonical divisors, *Tohoku Math. J. (2)* Volume 70, Number 4 (2018), 511–521.
- [Gro12] M. Gross, Mirror Symmetry and the Strominger-Yau-Zaslow conjecture. In *Current Developments in Mathematics 2012*, 133–191, Int. Press, Somerville, MA, 2013.
- [GTZ13] M. Gross, V. Tosatti, Y. Zhang, Collapsing of abelian fibered Calabi-Yau manifolds, *Duke Math. J.*, 162, (2013), no. 3, 517–551.
- [GTZ16] M. Gross, V. Tosatti, Y. Zhang, Gromov-Hausdorff collapsing of Calabi-Yau manifolds, *Comm. Anal. Geom.* 24 (2016), no. 1, 93–113.
- [GroWil00] M. Gross, P.M.H. Wilson, Large Complex Structure Limits of K3 Surfaces, *J. Differential Geom.* 55 (2000), no. 3, 475–546.
- [Har81] W. Harvey, Boundary structure of the modular group : in Riemann surfaces and related topics: Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference (ed. I. Kra, B. Maskit), *Annals of Mathematical Studies* 97, Princeton University Press (1981) 245–251.
- [Hel] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*, Graduate Studies in Mathematics, (1979).
- [HSVZ18] H.-J. Hein, S. Sun, J. Viaclovsky, R. Zhang, Nilpotent structures and collapsing Ricci-flat metrics on K3 surfaces, arXiv:1807.09367.
- [His18] 久本智之, 変分法から見た Kähler-Einstein 問題, 2018 年秋の日本数学会特別講演アブストラクト.
- [Koi83] N. Koiso, Einstein metrics and complex structures, *Invent. Math.* 73 (1983), 71–106.
- [KT87] R. Kobayashi, A. Todorov, Polarized period map for generalized K3 surfaces and the

- moduli of Einstein metrics, *Tohoku Math. J. (2)* 39 (1987), no. 3, 341–363.
- [KS06] M. Kontsevich, Y. Soibelman, Affine structures and non-archimedean analytic spaces, In *The Unity of Mathematics*, 321–385, Progr. Math., 244, Birkhäuser, 2006.
- [Laza08] R. Laza, Triangulations of the sphere and degenerations of K3 surfaces, arXiv:0809.0937.
- [Laza16] R. Laza, The KSBA compactification for the moduli space of degree two K3 pairs, *J. Eur. Math. Soc.* 18 (2016), no. 2, 225–279.
- [LazO’G17] R. Laza, K. O’Grady, GIT versus Baily-Borel compactification for quartic K3 surfaces, to appear in the Proceedings of the Abel Symposium (“Geometry of Moduli”, 2017).
- [Li17] C. Li, K-semistability is equivariant volume minimization, *Duke Math. J.* Volume 166, Number 16 (2017), 3147–3218.
- [C.Li18] C. Li, Minimizing normalized volumes of valuations, *Mathematische Zeitschrift*, Vol. 289, 2018, no.1-2, 491–513.
- [Mas76] H. Masur. Extension of the Weil-Petersson metric to the boundary of Teichmüller space. *Duke Math. J.*, 43(3):623–635, 1976.
- [Mat99] D. Matsushita, On fibre space structures of a projective irreducible symplectic manifold, *Topology*, 38 (1999), no. 1, 79–83; Addendum: “On fibre space structures of a projective irreducible symplectic manifold”, *Topology* 40 (2001), no. 2, 431–432.
- [MS84] J. Morgan, P.B. Shalen, Valuations, trees, and degenerations of hyperbolic structures. I, *Ann. of Math. (2)* 120 (1984), no. 3, 401–476.
- [Odk10] Y. Odaka, On the GIT stability of polarized varieties - a survey -, *Proceeding of Kinosaki algebraic geometry symposium (2010)*. available at <https://sites.google.com/site/yujiodaka2013/index/proceeding>
- [Odk12a] Y. Odaka, The Calabi conjecture and K-stability, *Int. Math. Res. Not. IMRN* (2012), no. 10, 2272–2288.
- [Odk12b] Y. Odaka, On the moduli of Kähler-Einstein Fano manifolds, arXiv:1211.4833v4. *Proceeding of Kinosaki algebraic geometry symposium 2013*.
- [Odk13a] Y. Odaka, The GIT stability of polarized varieties via Discrepancy, *Ann. of Math. (2)* 177 (2013), no. 2, 645–661.
- [Odk13b] Y. Odaka, A generalization of the Ross-Thomas slope theory, *Osaka J. Math.* 50 (2013), no. 1, 171–185.
- [Odk14a] Y. Odaka, Moduli of Fano varieties via Kähler-Einstein metrics, *数理解析研究所講究録 第1897巻 2014年 21-30*. <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1897-02.pdf>
- [Odk14b] Y. Odaka, Tropical geometric compactification of Moduli, I - M_g case-, to appear in *Proceeding Volume for the Workshop on moduli of K-stable varieties*. Springer-Verlag INdAM-series. (available at arXiv:1406.7772)
- [Odk15a] Y. Odaka, Invariants of varieties and singularities inspired by Kähler-Einstein problems, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* Volume 91, Number 4 (2015), 50–55.
- [Odk15b] Y. Odaka, Compact moduli spaces of Kähler-Einstein Fano varieties, *Publ. Res. Int. Math. Sci.* 51 (2015), no. 3, 549–565.
- [Odk18] Y. Odaka, Tropical geometric compactification of Moduli, II - A_g case and holomorphic limits -, *Int. Math. Res. Not. IMRN* (2018), <https://doi.org/10.1093/imrn/rnx293>.
- [OO18a] Y. Odaka, Y. Oshima, Collapsing K3 surfaces and moduli compactification, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* 94 (2018), no. 8, 81–86.
- [OO18b] Y. Odaka, Y. Oshima, Collapsing K3 surfaces, Tropical geometry and Moduli compactifications of Satake, Morgan-Shalen type, arXiv:1810.07685.

- [OSS16] Y. Odaka, C. Spotti, S. Sun, Compact moduli spaces of del Pezzo surfaces and Kähler-Einstein metrics, *J. Differential Geom.* 102 (2016), no. 1, 127–172.
- [PiShaSha71] I.I. Piatetski-Shapiro, I.R. Shafarevich, Torelli’s theorem for algebraic surfaces of type K3, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 35 (1971), 530–572, in Russian.
- [Sap04] L. Saper, Geometric rationality of equal-rank Satake compactifications, *Math. Res. Lett.* 11 (2004), no. 5–6, 653–671.
- [Sat56] I. Satake, On the compactification of the Siegel space, *J. Indian Math. Soc.* 20 (1956), 259–281.
- [Sat60a] I. Satake, On representations and compactifications of symmetric Riemannian spaces, *Ann. of Math. (2)* 71 (1960), 77–110.
- [Sat60b] I. Satake, On compactifications of the quotient spaces for arithmetically defined discontinuous groups, *Ann. of Math. (2)* 72 (1960), 555–580.
- [佐武99] 佐武一郎, コンパクト化の今昔, *雑誌数学* 51 巻 (1999) 2 号.
- [Schm73] W. Schmid, Variation of Hodge structure: the singularities of the period mapping, *Invent. Math.* 22 (1973), 211–319.
- [Schu85] G. Schumacher, On the geometry of moduli spaces, *Manuscripta Math.* 50 (1985), 229–267.
- [Sha80] J. Shah, A complete moduli space for K3 surfaces of degree 2, *Ann. of Math. (2)* 112 (1980), no. 3, 485–510.
- [She83] N.I. Shepherd-Barron, Degenerations with numerically effective canonical divisor, In *The birational geometry of degenerations (Cambridge, Mass., 1981)*, 33–84, *Progr. Math.*, vol. 29, Birkhäuser, Boston, (1983).
- [Sun16] S.Sun, Ricci curvature in Kahler geometry, Lecture notes for Sanya winter school in complex analysis and geometry, January 2016.
- [Sun18] S.Sun, Degenerations and moduli spaces in Kahler geometry, *Proceedings of ICM* 2018.
- [SYZ96] A. Strominger, S.T. Yau, E. Zaslow, Mirror symmetry is T -duality, *Nuclear Phys. B* 479 (1996), no. 1–2, 243–259.
- [Tia87] G. Tian, Smoothness of the universal deformation space of compact Calabi-Yau manifolds and its Petersson-Weil metric, In *Mathematical aspects of string theory (San Diego, Calif., 1986)*, 629–646, *Adv. Ser. Math. Phys.*, vol. 1, World Sci. Publishing, Singapore, (1987).
- [Tia15] G. Tian, K-stability and Kähler-Einstein metrics, *Comm. pure and applied math.* (2015).
- [Tod79] A. Todorov, The period mapping that is surjective for $K3$ -surfaces representable as a double plane, *Mat. Zametki* 26 (1979), no. 3, 465–474, 494.
- [Tos10] V. Tosatti, Adiabatic limits of Ricci-flat Kähler metrics, *J. Differential Geom.* 84 (2010), no. 2, 427–453.
- [Wol90] S. Wolpert, The hyperbolic metric and the geometry of the universal curve, *J. Diff. Geom.* vol. 31 no. 2, pp. 417–472 (1990).