

極大トーラス作用付きの複素多様体とその葉層構造

石田 裕昭 (鹿児島大学)*

概 要

極大トーラス作用付きのコンパクト複素多様体のなす圏とある種の組合せ論的対象からなる圏が同値になることを述べる. また極大トーラス作用付きのコンパクト複素多様体には自然な葉層構造が入り, 横断的には非特異完備トーリック多様体と似た振る舞いをすることを述べる.

1. 序

M を連結な可微分多様体とし, コンパクトトーラス G は M に効果的に作用しているとする. このとき $x \in M$ における接空間 $T_x M$ は固定部分群 G_x の忠実表現になる. G -作用で不変な計量をとれば, G_x の表現 $T_x M$ は軌道 $G \cdot x$ の接空間 $T_x(G \cdot x)$ とその直交補空間 $(T_x(G \cdot x))^\perp$ に G_x の表現として分解する. G が可換であることから $T_x(G \cdot x)$ は自明な G_x の表現であり, したがって $(T_x(G \cdot x))^\perp$ は忠実な G_x の表現である. $GL((T_x(G \cdot x))^\perp)$ の極大コンパクトトーラスの次元は高々 $(\dim M - \dim G \cdot x)/2$ であるから, 不等式

$$\dim G_x \leq \frac{1}{2}(\dim M - \dim G \cdot x) \quad (1.1)$$

を得る. $\dim G \cdot x = \dim G - \dim G_x$ より不等式(1.1)は

$$\dim G + \dim G_x \leq \dim M \quad (1.2)$$

と同値である.

定義 1.1. M を連結な可微分多様体とし, コンパクトトーラス G は M に効果的に作用しているとする. ある $x \in M$ が存在して, $\dim G + \dim G_x = \dim M$ が成立 (すなわち (1.2) の等号が成立) するとき, G -作用は極大であるという.

注意. G -作用が極大であるとき, G は M の微分同相写像のなす群 $\text{Diff}(M)$ の中の極大コンパクトトーラスになる. 逆は一般には成り立たない.

コンパクト複素多様体 M と, M に極大かつ複素構造を保つように作用するコンパクトトーラス G の組 (M, G) を分類することが, 1つ目の目的である. いくつか例を挙げる.

例 1.2 (複素トーラス). Γ を $\mathbb{C}^n$ の格子とし, M を複素トーラス $\mathbb{C}^n/\Gamma$, G を M 自身とする. G は $2n$ 次元コンパクトトーラスで, M に自由に, かつ複素構造を保つように作用する. 全ての点 $x \in M$ に対して G_x は自明であるから $\dim G + \dim G_x = \dim M$ が成り立ち, 特に G 作用は極大である.

例 1.3 (非特異かつ完備なトーリック多様体). M を複素 n 次元の非特異かつ完備なトーリック多様体とし, G を M に作用する n 次元代数トーラス $(\mathbb{C}^*)^n$ の極大コンパクトトーラス $(S^1)^n$ とする. このとき M の G -固定点 $x \in M^G$ において $G_x = G$ であるから $\dim G + \dim G_x = \dim M$ が成り立ち, 特に G -作用は極大である.

本研究は科研費 (若手研究 (B), 課題番号 16K17596) の助成を受けたものである.

*〒 890-0065 鹿児島市郡元 1 丁目 21 番地 鹿児島大学理学部数理情報科学科
e-mail: ishida@sci.kagoshima-u.ac.jp

例 1.3 に関しては逆が成り立つ. すなわち, M がコンパクトな複素 n 次元の複素多様体であって, n 次元コンパクトトーラス G が M に複素構造を保つように, かつ効果的に作用し, さらに G -固定点が存在するならば, M はトーリック多様体である ([IK2012, Theorem 1]).

例 1.4 (Hopf 曲面). 代数トーラス $(\mathbb{C}^\times)^2$ の $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ への作用を $(g_1, g_2) \in (\mathbb{C}^\times)^2$, $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ に対し $(g_1, g_2) \cdot (z_1, z_2) := (g_1 z_1, g_2 z_2)$ によって定める. $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$, $1 < |\alpha_1| \leq |\alpha_2|$ とし, (α_1, α_2) で生成される $(\mathbb{C}^\times)^2$ の部分群を $\Gamma_{\alpha_1, \alpha_2}$ とする. 商空間 $M := (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}) / \Gamma_{\alpha_1, \alpha_2}$ は複素多様体であり, $S^3 \times S^1$ と微分同相である. 商群 $(\mathbb{C}^\times)^2 / \Gamma_{\alpha_1, \alpha_2}$ は実リー群として $(S^1)^3 \times \mathbb{R}$ と同型で, M に複素構造を保つように効果的に作用している. G を $(\mathbb{C}^\times)^2 / \Gamma_{\alpha_1, \alpha_2}$ の極大コンパクトトーラスとする. 点 $x = [1, 0] \in M$ において, G_x は 1 次元トーラスであり, $\dim G + \dim G_x = \dim M$ が成り立つ.

より複雑で興味深い例として, LVMB と呼ばれる多様体のクラスがある. このクラスの始まりは, López de Medrano と Verjovsky によって得られたもので, $\mathbb{C}P^n$ 内の 2 つの実 2 次超曲面の完全交差に, それと横断的な複素 1 次元の葉層構造を上手く定めて, leaf space として複素構造を入れたものである ([LdMV1997]). これらは Hopf 多様体や Calabi-Eckman 多様体 ([CE1953]) を含み, また複素トーラスを除いてシンプレクティック構造を持たず, 特にケーラー多様体にならない. 一方で, Loeb と Nicolau によってこの多様体には複素 1 次元の横断ケーラー* な葉層構造が自然に入り, これを用いてほとんどの場合に複素部分多様体をほとんど持たないことを示した ([LN1999]). LVM, LVMB 多様体はこれ (LV 多様体と呼ぶことにする) の一般化のために, LVM と LVMB を説明する前に, LV 多様体とその上の葉層構造についてももう少しだけ説明しておく. 2 つの実数列 $(a_0, \dots, a_n), (b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ に対して, $\mathbb{C}P^n$ 内の 2 つの実 2 次超曲面 $\{[z] \in \mathbb{C}P^n \mid \sum_{i=0}^n a_i |z_i|^2 = 0\}$, $\{[z] \in \mathbb{C}P^n \mid \sum_{i=0}^n b_i |z_i|^2 = 0\}$ が横断的に交わる場合を考える. $\lambda_i = a_i + \sqrt{-1}b_i$ とおき, $\mathbb{C}^{n+1}$ 上の正則ベクトル場 $\sum_{i=0}^n \lambda_i z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$ は $\mathbb{C}P^n$ 上の正則ベクトル場 ξ に落ち, $M := \{[z] \in \mathbb{C}P^n \mid \sum_{i=0}^n \lambda_i |z_i|^n = 0\}$ に対して横断的であることが確かめられる. これによって M は $\mathbb{C}P^n$ のある開集合上の正則ベクトル場 ξ による葉層構造の leaf space として複素構造が定まる. さらに正則ベクトル場 $\sum_{i=0}^n a_i z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$ は M 上の至る所 0 でない正則ベクトル場 η に落ち, さらに横断ケーラー形式が具体的に構成される.

LV 多様体の後に Meersseman は López de Medrano と Verjovsky の構成を $\mathbb{C}P^n$ 内の $\sum_{i=1}^n a_i |z_i|^2 = 0$ で与えられる偶数個の実 2 次超曲面の完全交差に, Loeb と Nicolau の横断ケーラーな葉層構造を一般化したものを得て, LVM 多様体と呼ばれている ([Mee2000]). LVM 多様体はその上の葉層構造の葉がすべて閉であるときに射影的トーリック軌道体上のザイフェルトトーラス束の構造を持つ ([MV2004]). また, LVM 多様体のトポロジーが十分複雑であることが, Bosio と Meersseman によって調べられており, 例えば任意の有限生成アーベル群に対し, それを整係数コホモロジー群の部分群に持つような LVM 多様体が存在することが示されている ([BM2006]). LVM 多様体の後, Bosio によって実 2 次超曲面の交叉を介さずに, $\mathbb{C}P^n$ の開集合上のある葉層構造の leaf space として構成, 一般化されたものが LVMB 多様体である ([Bos2001]). LVMB 多様体の構成はやや複雑であるが, 複素構造を保つような極大トーラス作用が自然に入ることを見るのは易しい.

*4 節で触れる.

他の興味深い例として, moment-angle 多様体がある. Moment-angle 多様体が最初に現れたのは [DJ1991] で, トーリックトポロジーの中で発展, 一般化され, よく研究されている (トーリックトポロジーに関しては, 例えば [BP2015] を参照していただきたい). Panov と Ustinovsky によって, 偶数次元の moment-angle 多様体の多くにケーラーにならない複素構造が構成され ([PU2012, Theorem 3.7]), 特別な場合の Hodge 数の記述を得ている ([PU2012, Theorem 5.10]). また Panov, Ustinovsky と Verbitsky は LVM 多様体のときと同様に, 多くの場合ほとんど複素部分多様体を持たないことを示した ([PUV2016]).

2. 不変量の抽出

この節では M はコンパクト複素多様体で, M に極大かつ複素構造を保つようにコンパクトトーラス G が作用しているものとする. 組 (M, G) に対して, 以下で G のリー代数 $\mathfrak{g}$ 中の非特異扇 Δ と複素部分ベクトル空間 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ を定義し, その特徴づけについて述べる.

G の部分群 G' による M の固定点集合 $M^{G'}$ の各連結成分は M の複素部分多様体である. G の 1 次元部分トーラス G' による固定点集合の連結成分で, 複素余次元 1 のものを M の特性部分多様体という. M のコンパクト性から M の特性部分多様体 $M_1, \dots, M_m$ は高々有限個であることがわかる. 特性部分多様体 M_i を固定している 1 次元トーラスを G_i とすると, 各点 $x_i \in M_i$ において G_i の表現 $T_{x_i}M/T_{x_i}M_i \cong \mathbb{C}$ は忠実であり, この表現を通じて同型 $\mu_i: G_i \rightarrow S^1$ を得る. その逆写像 $\lambda_i: S^1 \rightarrow G_i \subset G$ は $\ker \exp_G \subset \mathfrak{g}$ の元とみなすことができる. 以上によって錐の集合

$$\Delta := \{\mathbb{R}_{\geq 0}\lambda_{i_1} + \dots \mathbb{R}_{\geq 0}\lambda_{i_k} \subset \mathfrak{g} \mid M_{i_1} \cap \dots \cap M_{i_k} \neq \emptyset\} \quad (2.1)$$

を得る.

G は M の複素構造を保つように作用していることと M のコンパクト性から, G の複素化 $*G^{\mathbb{C}}$ の M への正則な作用を得ることができる. これは一般に効果的でない. $G^{\mathbb{C}}$ の global stabilizer からなる部分群

$$H := \{g \in G^{\mathbb{C}} \mid g \cdot x = x, \forall x \in M\}$$

は $G^{\mathbb{C}}$ の複素解析的リー部分群. そのリー代数

$$\mathfrak{h} = \{u + \sqrt{-1}v \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \mid X_u + JX_v = 0\}^{\dagger} \quad (2.2)$$

は $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の複素部分ベクトル空間である.

(2.1) と (2.2) によって得られた $\mathfrak{g}$ 中の錐の集合 Δ と $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の複素部分ベクトル空間 $\mathfrak{h}$ は次の命題によって統制される.

命題 2.1. 1. Δ は $\mathfrak{g}$ の格子 $\ker \exp_G$ に関して非特異な扇になる[‡].

^{*} $G = (S^1)^n$ のときは, $G^{\mathbb{C}}$ は代数トーラス $(\mathbb{C}^*)^n$. $G^{\mathbb{C}}$ のリー代数は $\mathfrak{g}$ の複素化 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$.

[†]ここでは $u, v \in \mathfrak{g}$ に対し $u + \sqrt{-1}v = u \otimes 1 + v \otimes \sqrt{-1}$ とする. また J は M の複素構造で, X_u, X_v はそれぞれ $u, v \in \mathfrak{g}$ で生成される M の基本ベクトル場.

[‡]有限次元実ベクトル空間 V 中の錐 σ が V の格子 Γ について非特異であるとは, σ が Γ の $\mathbb{Z}$ -基底の一部で生成されているときをいう. 有限個の錐からなる集合 Δ が扇であるとは, $\sigma, \tau \in \Delta$ に対して $\sigma \cap \tau$ が σ, τ の共通の面になっていることをいう. 扇の各錐が非特異のとき, その扇を非特異な扇という.

2. $p: \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathfrak{g}$ を直和分解 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \otimes 1 + \mathfrak{g} \otimes \sqrt{-1}$ に関する第一射影とする. このとき制限 $p|_{\mathfrak{h}}: \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{g}$ は単射になる.
3. $\mathfrak{h}' := p(\mathfrak{h})$ とする. 商写像 $q: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{h}'$ によって, $\mathfrak{g}$ の中の扇 Δ は $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}'$ の中の完備* な扇 $q(\Delta)$ に写る.

3. 主定理

前節では, 極大トーラス作用付き複素多様体 (M, G) に対して, 扇と複素部分ベクトル空間の組 $(\Delta, \mathfrak{h})$ を対応させた. ここでは, これらの圏 $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ を考える.

$\mathcal{C}_1$ の対象は次を満たす (M, G, y) 全てである: M はコンパクト連結複素多様体, G はコンパクトトーラスで, M に極大かつ複素構造を保つように作用, $y \in M, G_y = \{1\}$. $\mathcal{C}_1$ の対象 $(M_1, G_1, y_1), (M_2, G_2, y_2)$ の間の射の集合は滑らかな準同型 $\alpha: G_1 \rightarrow G_2$ と α -同変[†]な正則写像 $f: M_1 \rightarrow M_2$ で $f(y_1) = y_2$ を満たすものの組 (f, α) 全体である.

$\mathcal{C}_2$ の対象は次を満たす $(\Delta, \mathfrak{h}, G)$ 全てである: G はコンパクトトーラス, Δ は $\mathfrak{g}$ の中の扇, $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の複素部分ベクトル空間で, 命題 2.1 を満たす. $\mathcal{C}_2$ の対象 $(\Delta_1, \mathfrak{h}_1, G_1)$ と $(\Delta_2, \mathfrak{h}_2, G_2)$ の間の射の集合は滑らかな準同型写像 $\alpha: G_1 \rightarrow G_2$ であって, その微分 $d\alpha: \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$ が扇の射 ${}^{\dagger}d\alpha: \Delta_1 \rightarrow \Delta_2$ になり, 複素化 $d\alpha^{\mathbb{C}} = d\alpha \otimes \text{id}_{\mathbb{C}}: \mathfrak{g}_1^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathfrak{g}_2^{\mathbb{C}}$ が $d\alpha^{\mathbb{C}}(\mathfrak{h}_1) \subset \mathfrak{h}_2$ を満たすものの全体である.

定理 3.1 ([Ish2016, Theorem 8.2]). 2つの圏 $\mathcal{C}_1$ と $\mathcal{C}_2$ は同値である.

より詳細には $\mathcal{C}_1$ と $\mathcal{C}_2$ の間に次の2つの関手 $\mathcal{F}_1: \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2, \mathcal{F}_2: \mathcal{C}_2 \rightarrow \mathcal{C}_1$ がある. $\mathcal{F}_1: \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$ は $\mathcal{C}_1$ の対象 (M, G, y) に対して (2.1) と (2.2) によって $\mathcal{C}_2$ の対象 $(\Delta, \mathfrak{h}, G)$ を対応させるもので, $\mathcal{C}_1$ の射 $(f, \alpha): (M_1, G_1, y_1) \rightarrow (M_2, G_2, y_2)$ に対し $\mathcal{F}_1(f, \alpha) := \alpha: G_1 \rightarrow G_2$ は $\mathcal{C}_2$ の射 $\alpha: \mathcal{F}_1(M_1, G_1, y_1) \rightarrow \mathcal{F}_1(M_2, G_2, y_2)$ になり, $\mathcal{F}_1$ は関手になることが確かめられる.

$\mathcal{C}_2$ の対象 $(\Delta, \mathfrak{h}, G)$ に対し, $X(\Delta)$ を Δ に対応するトーリック多様体, $H := \exp_{G^{\mathbb{C}}} \mathfrak{h}$ を $\mathfrak{h}$ に対応する $G^{\mathbb{C}}$ の部分群とすると, 商空間 $X(\Delta)/H$ はコンパクトな複素多様体になる ([Bat2013, Theorem 5.2]). G の $X(\Delta)$ への作用は商多様体 $X(\Delta)/H$ への極大な作用を誘導する. $X(\Delta)$ の自然な基点 $1_{G^{\mathbb{C}}} \in G^{\mathbb{C}} \subset X(\Delta)$ の商写像による像を $[1_{G^{\mathbb{C}}}] \in X(\Delta)/H$ とすると, これらによって $\mathcal{C}_1$ の対象 $\mathcal{F}_2(\Delta, \mathfrak{h}, G) := (X(\Delta)/H, G, [1_{G^{\mathbb{C}}}]$ を得る. $\mathcal{C}_2$ の射 $\alpha: (\Delta_1, \mathfrak{h}_1, G_1) \rightarrow (\Delta_2, \mathfrak{h}_2, G_2)$ はトーリック射 $\varphi_{\alpha}: X(\Delta_1) \rightarrow X(\Delta_2)$ を導き, さらに φ_{α} は α -同変正則写像 $f_{\alpha}: X(\Delta_1)/H_1 \rightarrow X(\Delta_2)/H_2$ を誘導する. $\mathcal{F}_2(\alpha) := (f_{\alpha}, \alpha)$ は $\mathcal{C}_1$ の射 $(f_{\alpha}, \alpha): (X(\Delta_1)/H_1, G_1, [1_{G_1^{\mathbb{C}}}] \rightarrow (X(\Delta_2)/H_2, G_2, [1_{G_2^{\mathbb{C}}}]$ になり, $\mathcal{F}_2$ も関手になることが確かめられる.

$\mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_2: \mathcal{C}_2 \rightarrow \mathcal{C}_2$ は $\mathcal{C}_2$ の恒等関手 $\text{id}_{\mathcal{C}_2}$ になり, $\mathcal{C}_1$ の恒等関手 $\text{id}_{\mathcal{C}_1}$ と $\mathcal{F}_2 \circ \mathcal{F}_1: \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_1$ の間に自然同型 $\eta: \text{id}_{\mathcal{C}_1} \rightarrow \mathcal{F}_2 \circ \mathcal{F}_1$ が存在する. この2つの関手 $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ が圏 $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ の同値を与える.

注意. トーリック多様体の圏と有理扇のなす圏は同値である. これらの圏の対象を “非特異かつ完備” なものに制限したものは, それぞれ $\mathcal{C}_1$ の対象をトーリック多様体に制限

*ベクトル空間 V の中の扇 Δ が完備であるとは, $\bigcup_{\sigma \in \Delta} \sigma = V$ を満たすことをいう.

[†] G_1, G_2 を群, $\alpha: G_1 \rightarrow G_2$ を準同型写像, X_1, X_2 をそれぞれ G_1, G_2 -集合とすると, 写像 $f: X_1 \rightarrow X_2$ が α -同変であるとは, すべての $x \in X, g \in G_1$ に対し $f(g \cdot x) = \alpha(g) \cdot f(x)$ が成り立つことをいう.

[‡]ベクトル空間 V_1, V_2 の中の扇 Δ_1, Δ_2 に対し, 線形写像 $f: V_1 \rightarrow V_2$ で任意の $\sigma_1 \in \Delta_1$ に対しある σ_2 が存在して $f(\sigma_1) \subset \sigma_2$ を満たす f が Δ_1 と Δ_2 の間の射.

したもの, $\mathcal{C}_2$ の対象を $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h} = 0$ に制限したものと一致する ([Ish2016, Theorem 9.2]).

定理 3.1 の非同変版として次の定理が成り立つ.

定理 3.2 ([Ish2016, Theorem 8.5]). $(M_1, G_1, y_1), (M_2, G_2, y_2) \in \mathcal{C}_1$ に対し以下は同値.

1. M_1, M_2 は双正則.
2. $(M_1, G_1, y_1), (M_2, G_2, y_2)$ は $\mathcal{C}_1$ の中で同型.
3. $\mathcal{F}_1(M_1, G_1, y_1), \mathcal{F}_1(M_2, G_2, y_2)$ は $\mathcal{C}_2$ の中で同型.

4. ケーラー形式, 横断ケーラー形式とモーメント写像

M はコンパクト複素多様体, ω は M 上の正の閉 $(1, 1)$ -形式 (ケーラー形式), J は M の複素構造とする. M にコンパクトトーラス G が ω, J を保って作用するとき, $v \in \mathfrak{g}$ に対してある点 $x \in M$ で $(X_v)_x = 0$ となることと, $i_{X_v}\omega$ が完全形式となることが同値になる ([Fra1959]). 定理 3.1 と Frankel の定理の応用として, $(M, G, y) \in \mathcal{C}_1$ に対して M がケーラー形式を持つための次の強い必要条件を得る.

定理 4.1 ([Ish2016]). $(M, G, y) \in \mathcal{C}_1$ とする. M がケーラー形式を持つならば, 次の同値な 2 条件を満たす.

1. M は複素トーラス上の射影的トーリック多様体をファイバーとする同変ファイバー束の構造を持つ.
2. $(\Delta, \mathfrak{h}, G) = \mathcal{F}_1(M, G, y)$ とする. トーリック多様体 $X(\Delta)$ はある射影的トーリック多様体と代数トーラスの直積である. 特に Δ は多面体的な扇と 0 だけからなる扇の直積.

ケーラー形式の概念を弱めたものを考える. ω を複素多様体 M 上の (必ずしも正とは限らない) 非負の閉 $(1, 1)$ -形式とする. $x \in M$ における ω の値 ω_x を線形写像 $T_x M \rightarrow T_x^* M$ と理解する. M にコンパクトトーラス G が J を保ちかつハミルトニアン* に作用するとき, 簡単な計算から $\ker \omega_x \supset T_x(G \cdot x) \cap JT_x(G \cdot x)$ が得られる ([Ish2017, Proposition 4.2]). これを動機として, $\mathfrak{g}$ の部分リー代数

$$\mathfrak{h}' := \{u \in \mathfrak{g} \mid \exists v \in \mathfrak{g} \text{ s.t. } X_u = -JX_v\} \subset \mathfrak{g} \quad (4.1)$$

とそれに対応する部分群 $H' \subset G$ を考える.

命題 4.2 ([Ish2017, Proposition 3.3]). M をコンパクト複素多様体とし, コンパクトトーラス G は M に効果的かつ複素構造を保って作用しているものとする. $\mathfrak{h}'$ は (4.1) で定義されるものとし, $H := \exp_G \mathfrak{h}'$ を対応する G の部分リー群 (これは閉とは限らない) とする. 次が成り立つ.

1. H' は自然に複素構造を持ち, M に正則に作用する.
2. H' の M への作用は局所自由. すなわち, 固定部分群 H'_x は H' の離散部分群.

*ここでの ω はシンプレクティック形式でないが, 同様の言葉遣いをすることにする. つまり, すべての $v \in \mathfrak{g}$ に対し $i_{X_v}\omega$ が完全形式のとき, G -作用はハミルトニアン.

命題4.2から, H' の各軌道を leaf とする M の正則葉層構造 $F_{H'}$ が M の G -作用と複素構造から定まる. さらに G が M の双正則写像のなす群 $\text{Aut}(M)$ の中の極大コンパクトトーラスの場合, H' は極大コンパクトトーラス G の選び方によらない ([IK2018, Lemma 2.1]). G が $\text{Aut}(M)$ の中の極大コンパクトトーラスのとき, $F_{H'}$ を M の **canonical foliation** と呼ぶことにする.

複素多様体 M 上の正則な葉層構造 F に対し, M 上の非負の閉 $(1, 1)$ -形式 ω が横断ケーラーであるとは, 全ての $x \in M$ に対し $\ker \omega_x = T_x F$ が成り立つことを意味する. ここで, $T_x F$ は x を通る F の leaf に接するベクトルからなる $T_x M$ の部分空間である. M にコンパクトリー群 G が複素構造を保つように作用し, かつ正則な葉層構造 F から定まるベクトル束 TF が接束 TM の G -同変な部分束であるとき, F を G -不変な正則葉層構造と呼ぶことにする. G -不変な正則葉層構造 F に関する横断ケーラー形式は G 上の Haar 測度で平均化することによって G -不変な横断ケーラー形式 ω に取り替えることができ, このとき全ての $v \in \mathfrak{g}$ に対して $i_{X_v} \omega$ は閉形式である.

今, M をコンパクト複素多様体, G を M に効果的かつ複素構造を保つように作用するコンパクトトーラス, ω を F に関する G -不変な横断ケーラー形式とし, G -作用がハミルトニアンであるとする, $TF_{H'} \subset TF$ である. したがって $TF_{H'}$ は, G -作用がハミルトニアンになるような横断ケーラー形式を持つ正則葉層構造の下界になる. またモーメント写像 ${}^*\Phi: M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ の像は $\mathfrak{h}'$ と直行し, 従ってモーメント写像は (必要ならば適当な定数 $c \in \mathfrak{g}^*$ を加えて) 値域が $(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}')^*$ の写像 $\tilde{\Phi}: M \rightarrow (\mathfrak{g}/\mathfrak{h}')^*$ を誘導する. シンプレクティック幾何におけるモーメント写像の凸性定理 ([Ati1982, Theorem 1], [GS1982, Theorem 4]) のアナロジーとして次を得る.

定理 4.3 ([Ish2017, Corollary 4.5]). M をコンパクト複素多様体, G を M に効果的かつ複素構造を保つように作用するコンパクトトーラス, ω を $F_{H'}$ に関する G -不変な横断ケーラー形式とし, G -作用はハミルトニアンであると仮定する. このとき, $\tilde{\Phi}(M)$ は $(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}')^*$ の中の凸多面体になる.

$(M, G, y) \in \mathcal{C}_1$ に対して, canonical foliation に関する 1st basic cohomology $H_B^1(M)$ は消滅し, したがって任意の G -不変な横断ケーラー形式に対して G -作用はハミルトニアンになる. 定理4.3を用いることによって, $(M, G, y) \in \mathcal{C}_1$ に対して以下の特徴づけを得る.

定理 4.4 ([Ish2017, Theorem 5.8]). $(M, G, y) \in \mathcal{C}_1$ と M の canonical foliation F に対し, 次は同値.

1. F に関する横断ケーラー形式 ω が存在する.
2. $(\Delta, \mathfrak{h}, G) = \mathcal{F}_1(M, G, y)$ とする. $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}'$ の中の完備な扇 $q(\Delta)$ は凸多面体的である.

またこのとき, 凸多面体 $\tilde{\Phi}(M)$ の normal fan は $q(\Delta)$ である.

ここで, ベクトル空間 V の双対空間 V^* の中の凸多面体 $P \subset V^*$ の normal fan は次のものである. $v \in V$ を P 上の関数とみて, v の最小値をとる P の点全体

$$F_v = \{\alpha \in P \mid \langle \alpha, v \rangle \leq \langle \alpha', v \rangle \text{ for all } \alpha' \in P\}$$

*つまり $v \in \mathfrak{g}$ に対し $d\langle \Phi, v \rangle = -i_{X_v} \omega$ を満たす写像.

は P の面である. P の面 F に対し, F の inner normal cone $\sigma_F \subset V$ は

$$\sigma_F = \{v \in V^* \mid F_v \subset F\}$$

で与えられる. $\{\sigma_F \mid F \text{ は } P \text{ の面}\}$ が P の normal fan であり, V の中の扇 Δ が凸多面体的であるとは, V^* の中の凸多面体 P が存在して Δ が P の normal fan になることをいう.

定理 4.4 と Battisti の LVM 多様体の特徴づけ [Bat2013, Theorem 3.10] を合わせると, Cupit-Foutou と Zaffran による予想 [CFZ2007, Page 795, Remark] の肯定的な解決を得る.

5. Transverse equivalence と principal equivalence

$(M, G, y) \in \mathcal{C}_1$ に対し, M と M の canonical foliation F の組 (M, F) の, 横断同値類の分類および横断同値に関して不変なものを研究したい.

定義 5.1 ([Mol1988, Definition 2.1]). 葉層構造付きの滑らかな多様体 $(M_1, F_1), (M_2, F_2)$ が横断同値 (**transversely equivalent**) であるとは, 以下を満たす葉層構造付きの滑らかな多様体 (M_0, F_0) と滑らかな写像 $f_i: M_0 \rightarrow M_i, i = 1, 2$ が存在することを言う.

1. f_i は surjective submersion,
2. f_i の各ファイバーは連結,
3. F_i の葉の f_i による逆像は F_0 の葉.

滑らかな多様体の圏では横断同値の定義は上の通りであるが, 複素多様体の圏でも同様に, 適当に制限して定義できる. $\mathcal{C}_1$ の横断同値類に関しては, 次の定義と定理が基本的である.

定義 5.2 ([IKP2018, Definition 5.2]). $(M_1, G_1, y_1), (M_2, G_2, y_2) \in \mathcal{C}_1$ が **principal equivalent** であるとは, 以下を満たす $(M_0, G_0, y_0) \in \mathcal{C}_1$ と射 $(f_i, \alpha_i): (M_0, G_0, y_0) \rightarrow (M_i, G_i, y_i), i = 1, 2$ が存在することを言う.

1. $\alpha_i: G_0 \rightarrow G_i$ は全射,
2. $\ker \alpha_i \subset G_0$ は連結 (特に $\ker \alpha_i$ は G_0 の部分トーラス),
3. $f: M_0 \rightarrow M_i$ は主 $\ker \alpha_i$ -束.

定理 5.3 ([IKP2018, Theorem 5.4]). $(M_1, G_1, y_1), (M_2, G_2, y_2) \in \mathcal{C}_1$ とし, F_1, F_2 をそれぞれ M_1, M_2 の canonical foliation とする. このとき, $(M_1, G_1, y_1), (M_2, G_2, y_2)$ が principal equivalent ならば, $(M_1, F_1), (M_2, F_2)$ は (複素多様体の圏の範疇で) 横断同値である.

Principal equivalence class の組合せ的な対応物として, marked fan の概念を導入する.

定義 5.4. 以下を満たす組 $(\tilde{V}, \tilde{\Gamma}, \tilde{\Delta}, \tilde{\lambda})$ を **marked fan** と言う.

1. $\tilde{V}$ は有限次元 $\mathbb{R}$ ベクトル空間,
2. $\tilde{\Gamma}$ は $\tilde{V}$ の有限生成部分群で, $\tilde{V}$ を $\mathbb{R}$ -線形に張る,

3. $\tilde{\Delta}$ は $\tilde{V}$ の扇で, $\tilde{\Delta}$ の各錐は $\tilde{\Gamma}$ の元で生成される,
4. $\tilde{\Delta}^{(1)}$ を $\tilde{\Delta}$ の 1 次元錐の集合とする. $\tilde{\lambda}: \tilde{\Delta}^{(1)} \rightarrow \tilde{\Gamma}$ は写像で, 各 $\tilde{\rho} \in \tilde{\Delta}^{(1)}$ に対し $\tilde{\lambda}(\tilde{\rho}) \in \tilde{\Gamma}$ は $\tilde{\rho}$ を張る.

$\tilde{\Delta}$ がそれぞれ完備, 単体的な扇のときに marked fan $(\tilde{V}, \tilde{\Gamma}, \tilde{\Delta}, \tilde{\lambda})$ はそれぞれ完備, 単体的であるという. また, 2つの marked fan $(\tilde{V}_1, \tilde{\Gamma}_1, \tilde{\Delta}_1, \tilde{\lambda}_1), (\tilde{V}_2, \tilde{\Gamma}_2, \tilde{\Delta}_2, \tilde{\lambda}_2)$ が同型であるとは, ある線形同型 $\varphi: \tilde{V}_1 \rightarrow \tilde{V}_2$ が存在して, $\varphi(\tilde{\Gamma}_1) = \tilde{\Gamma}_2$, $\varphi(\tilde{\Delta}_1) = \tilde{\Delta}_2$, $\varphi \circ \tilde{\lambda}_1 = \tilde{\lambda}_2 \circ \varphi$ を満たすことをいう.

例 5.5. 例 1.4 の Hopf 曲面に対応する marked fan は次の marked fan $(\tilde{V}, \tilde{\Gamma}, \tilde{\Delta}, \tilde{\lambda})$ と同型になる. $\tilde{V} = \mathbb{R}$, $\tilde{\Gamma}$ は 3 つの実数

$$\log |\alpha_1|, \log |\alpha_2|, \log |\alpha_1| \frac{\arg \alpha_2}{2\pi} - \log |\alpha_2| \frac{\arg \alpha_1}{2\pi}$$

で生成される $\mathbb{R}$ の部分群. $\tilde{\Delta}$ は $\mathbb{R}$ の中の完備な扇 $\{\{0\}, \mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}_{\leq 0}\}$ で, $\tilde{\lambda}: \{\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}_{\leq 0}\} \rightarrow \tilde{\Gamma}$ は $\tilde{\lambda}(\mathbb{R}_{\geq 0}) = \log |\alpha_1|$, $\tilde{\lambda}(\mathbb{R}_{\leq 0}) = -\log |\alpha_2|$ で与えられる.

単体的かつ完備な marked fan のなす class を $\tilde{\mathcal{C}}_2$ とする. $\mathcal{C}_2$ の対象 $(\Delta, \mathfrak{h}, G)$ に対して, 商写像 $q: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{h}'$ を通じて単体的かつ完備な marked fan を得ることができる. すなわち, $\tilde{V} := \mathfrak{g}/\mathfrak{h}'$, $\tilde{\Gamma} := q(\ker \exp_G)$, $\tilde{\Delta} := q(\Delta)$, $\tilde{\lambda}(q(\rho)) := q(\lambda(\rho))^*$ とすれば, $(\tilde{V}, \tilde{\Gamma}, \tilde{\Delta}, \tilde{\lambda}) \in \tilde{\mathcal{C}}_2$. この対応と $\mathcal{F}_1: \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$ を合成して, 対応 $\tilde{\mathcal{F}}_1: \mathcal{C}_1 \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}_2$ を得る.

定理 5.6 ([IKP2018, Theorems 5.7, 5.8]). 1. $(M_1, G_1, y_1), (M_2, G_2, y_2) \in \mathcal{C}_2$ が principal equivalent であることと, 対応する marked fan $\tilde{\mathcal{F}}_1(M_1, G_1, y_1), \tilde{\mathcal{F}}_1(M_2, G_2, y_2)$ が同型であることは同値.

2. $\tilde{\mathcal{F}}_1$ は本質的に全射. すなわち, 単体的かつ完備な marked fan $(\tilde{V}, \tilde{\Gamma}, \tilde{\Delta}, \tilde{\lambda}) \in \tilde{\mathcal{C}}_2$ に対し, $\tilde{\mathcal{F}}_1(M, G, y)$ が $(\tilde{V}, \tilde{\Gamma}, \tilde{\Delta}, \tilde{\lambda})$ と同型になるような $(M, G, y) \in \mathcal{C}_1$ が存在する.

定理 5.3, 5.6 から次の図のようになっていることがわかる.

$$\begin{array}{ccc} \text{principal equivalence} & \Longleftrightarrow & \text{marked fan isomorphism} \\ \Downarrow & & \\ \text{transverse equivalence} & & \end{array}$$

極大トーラス作用付き複素多様体 $(M, G, y) \in \mathcal{C}_1$ とその canonical foliation に対して, (M, F) の横断同値類の任意の不変量および不変な性質は, すべて対応する marked fan を用いて記述できる (例えば定理 4.4).

6. Basic cohomology

葉層構造付きの滑らかな多様体 (M, F) に対し, basic complex

$$\Omega_B^*(M) = \{\alpha \in \Omega^* \mid \text{全ての } X \in C^\infty(M, TF) \text{ に対し } i_X \alpha = 0, L_X \alpha = 0\}$$

は横断同値類で不変である. 特に basic cohomology $H_B^*(M)$ は横断同値類であり, M/F が多様体の場合には M/F の de Rham cohomology $H^*(M/F)$ との間に自然な同型があ

*ただし $\lambda(\rho)$ は $\rho \in \Delta^{(1)}$ の primitive な生成元.

る. LVMB 多様体の場合には Battaglia と Zaffran によって, 加群としての構造が調べられている ([BZ2015]). より一般に $(M, G, y) \in \mathcal{C}_1$, F が M の canonical foliation の場合に, G -equivariant cohomology を用いて basic cohomology の積構造も含めた具体的な記述を得た.

定理 6.1 (一般の場合は [IKP2018, Theorem 5.9], 横断ケーラーの場合は [Ish2018, Theorem 7.3]). $(M, G, y) \in \mathcal{C}_1$, F を M の canonical foliation とする. 対応する marked fan を $(\tilde{V}, \tilde{\Gamma}, \tilde{\Delta}, \tilde{\lambda})$ とし, $\{\tilde{\rho}_1, \dots, \tilde{\rho}_m\} = \tilde{\Delta}^{(1)}$ とする. このとき, 次の次数付き $\mathbb{R}$ -代数の同型がある:

$$H_B^*(M) \cong \mathbb{R}[x_1, \dots, x_m]/\mathcal{I} + \mathcal{J},$$

ここで各 x_i の次数は 2 で, $\mathcal{I}$ は Stanley-Reisner イデアル

$$\mathcal{I} = \langle x_{i_1} \dots x_{i_k} \mid \tilde{\rho}_{i_1} + \dots + \tilde{\rho}_{i_k} \notin \tilde{\Delta} \rangle,$$

$\mathcal{J}$ は線形イデアル

$$\mathcal{J} = \left\langle \sum_{i=1}^m \langle u, \tilde{\lambda}(\tilde{\rho}_i) \rangle x_i \mid u \in (g/\mathfrak{h}')^* \right\rangle.$$

定理 6.1 から $H_B^*(M)$ は次数 2 の元で生成されることがわかる. このことと, basic Dolbeult cohomology の Hodge 分解, 横断ケーラー形式の定める basic cohomology class のなす $H_B^2(M)$ の部分集合が開であることを示すことによって, 次を得た.

定理 6.2 ([Ish2018, Theorem 8.1]). $(M, G, y) \in \mathcal{C}_1$, F を M の canonical foliation とする. F に関する横断ケーラー形式が存在するならば,

$$H_B^{p,q}(M) \cong \begin{cases} 0 & \text{if } p \neq q, \\ H_B^{2p}(M) \otimes \mathbb{C} & \text{if } p = q. \end{cases}$$

参考文献

- [Ati1982] M. F. Atiyah, *Convexity and commuting Hamiltonians*, Bull. London Math. Soc. **14** (1982), no. 1, 1–15. MR642416
- [Bat2013] L. Battisti, *LVMB manifolds and quotients of toric varieties*, Math. Z. **275** (2013), no. 1-2, 549–568. MR3101820
- [BM2006] F. Bosio and L. Meersseman, *Real quadrics in $\mathbb{C}^n$, complex manifolds and convex polytopes*, Acta Math. **197** (2006), no. 1, 53–127. MR2285318
- [Bos2001] F. Bosio, *Variétés complexes compactes: une généralisation de la construction de Meersseman et López de Medrano-Verjovsky*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **51** (2001), no. 5, 1259–1297. MR1860666
- [BP2015] V. M. Buchstaber and T. E. Panov, *Toric topology*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 204, American Mathematical Society, Providence, RI, 2015. MR3363157
- [BZ2015] F. Battaglia and D. Zaffran, *Foliations modeling nonrational simplicial toric varieties*, Int. Math. Res. Not. IMRN **22** (2015), 11785–11815. MR3456702
- [CE1953] E. Calabi and B. Eckmann, *A class of compact, complex manifolds which are not algebraic*, Ann. of Math. (2) **58** (1953), 494–500. MR0057539
- [CFZ2007] S. Cupit-Foutou and D. Zaffran, *Non-Kähler manifolds and GIT-quotients*, Math. Z. **257** (2007), no. 4, 783–797. MR2342553
- [DJ1991] M. W. Davis and T. Januszkiewicz, *Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions*, Duke Math. J. **62** (1991), no. 2, 417–451. MR1104531

- [Fra1959] T. Frankel, *Fixed points and torsion on Kähler manifolds*, Ann. of Math. (2) **70** (1959), 1–8. MR0131883
- [GS1982] V. Guillemin and S. Sternberg, *Convexity properties of the moment mapping*, Invent. Math. **67** (1982), no. 3, 491–513. MR664117
- [IK2012] H. Ishida and Y. Karshon, *Completely integrable torus actions on complex manifolds with fixed points*, Math. Res. Lett. **19** (2012), no. 6, 1283–1295. MR3091608
- [IK2018] H. Ishida and H. Kasuya, *Transverse Kähler structures on central foliations of complex manifolds*, Ann. Mat. Pura Appl. (2018).
- [IKP2018] H. Ishida, R. Krutowski, and T. Panov, *Basic cohomology of canonical holomorphic foliations on complex moment-angle manifolds*, arXiv e-prints (Nov. 2018), available at 1811.12038.
- [Ish2016] H. Ishida, *Complex manifolds with maximal torus actions*, J. reine angew. Math., Ahead of Print (2016).
- [Ish2017] ———, *Torus invariant transverse Kähler foliations*, Trans. Amer. Math. Soc. **369** (2017), no. 7, 5137–5155. MR3632563
- [Ish2018] H. Ishida, *Towards transverse toric geometry*, arXiv e-prints (July 2018), available at 1807.10449.
- [LdMV1997] S. López de Medrano and A. Verjovsky, *A new family of complex, compact, non-symplectic manifolds*, Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.) **28** (1997), no. 2, 253–269. MR1479504
- [LN1999] J. J. Loeb and M. Nicolau, *On the complex geometry of a class of non-Kählerian manifolds*, Israel J. Math. **110** (1999), 371–379. MR1750427
- [Mee2000] L. Meersseman, *A new geometric construction of compact complex manifolds in any dimension*, Math. Ann. **317** (2000), no. 1, 79–115. MR1760670
- [Mol1988] P. Molino, *Riemannian foliations*, Progress in Mathematics, vol. 73, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1988. Translated from the French by Grant Cairns, With appendices by Cairns, Y. Carrière, É. Ghys, E. Salem and V. Sergiescu. MR932463
- [MV2004] L. Meersseman and A. Verjovsky, *Holomorphic principal bundles over projective toric varieties*, J. Reine Angew. Math. **572** (2004), 57–96. MR2076120
- [PU2012] T. Panov and Y. Ustinovsky, *Complex-analytic structures on moment-angle manifolds*, Mosc. Math. J. **12** (2012), no. 1, 149–172, 216. MR2952429
- [PUV2016] T. Panov, Y. Ustinovskiy, and M. Verbitsky, *Complex geometry of moment-angle manifolds*, Math. Z. **284** (2016), no. 1-2, 309–333. MR3545497