

レブナー方程式による擬等角拡張の構成について

堀田 一敬 (山口大学工学部)

2019年3月17日

1. Introduction

1.1. はじめに

この小論文ではレブナー微分方程式を用いた単葉関数の擬等角拡張の構成についての緒結果を紹介する. 基本となる擬等角拡張定理は1972年にBeckerによりもたらされたが, 近年のレブナー理論の発展とともに擬等角拡張の研究も発展を遂げている.

1.2. 記号や基本定理

本稿で用いる記号などを列挙する.

- $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$
- $\mathcal{S}$: $\mathbb{D}$ 上定義された単葉関数で $f(0) = 0, f'(0) = 1$ と正規化されたものの族. この $\mathcal{S}$ に関する理論を単葉関数論という. $\mathcal{S}$ は広義一様収束の位相のもとコンパクトである.
- $\mathcal{S}(k)$: $\mathcal{S}$ の元で, $\mathbb{C}$ から $\mathbb{C}$ への k -擬等角写像に拡張できるようなものの全体. $\mathcal{S}(k)$ も広義一様収束の位相のもとコンパクトである ([Sch75, Theorem 14.1]).
- S_f : Schwarz 微分 $S_f := (f''/f')' - (f''/f')^2/2$.
- $\text{Hol}(\mathbb{D}, D)$: $\mathbb{D}$ 上定義された正則関数 $f: \mathbb{D} \xrightarrow{\text{into}} D$ 全体の集合
- $\text{Hol}(\mathbb{D}) := \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$.
- $\text{Gen}(\mathbb{D})$: $\text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{C})$ 内の Infinitesimal Generator 全体
- LC : 一般化された Loewner chain 全体
- EF : evolution family $\varphi_{s,t}$ 全体
- $\Omega[(f_t)]$: Loewner Range, つまり $\Omega[(f_t)] := \cup_{t \geq 0} f_t(\mathbb{D})$
- $\mathcal{L}[(\varphi_{s,t})]$: $(\varphi_{s,t}) \in \text{EF}$ より生成された $(f_t) \in \text{LC}$ で $f_0 \in \mathcal{S}$ を満たすものの全体
- LC_0 : LC の元で standard なものの全体 (Theorem 3.4)
- HV : Herglotz Vector Field 全体.
- HF : 一般化された Herglotz function 全体
- DW : Danjow-Wolff function, つまり可測関数 $\tau: [0, \infty) \rightarrow \overline{\mathbb{D}}$ 全体
- BP : Berkson-Porta Data, つまり $p \in \text{HF}$ と $\tau \in \text{DW}$ の組 (p, τ) 全体

2. 古典的な Loewner 方程式と擬等角拡張

2.1. Classical Loewner chain

$f_t(z) = e^t z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n(t) z^n$ を $t \in [0, \infty)$ で parametrize された $\mathbb{D}$ 上の正則関数族とする. $(f_t)_{t \geq 0}$ が (Classical) Loewner chain であるとは, 次の性質を満たす時にいう;

1. 各々の $t \in [0, \infty)$ に対し f_t は $\mathbb{D}$ 上単葉である (つまり $f_t/e^t \in \mathcal{S}$),
2. 任意の $s, t \in [0, \infty)$, $s < t$ に対し, 包含関係 $f_s(\mathbb{D}) \subset f_t(\mathbb{D})$ が成り立つ.

このとき, (f_t) の第一係数が e^t であることから像領域の包含関係は真である, つまり $f_s(\mathbb{D}) \subsetneq f_t(\mathbb{D})$. また Koebe 1/4-定理より $f_t(\mathbb{D})$ は半径 $e^t/4$ の円板を含むので, $t \rightarrow \infty$ で $f_t(\mathbb{D}) \rightarrow \mathbb{C}$ となることがわかる. なお, 定義においては (f_t) の t による連続性は特に仮定していない事に注意する.

関数族 $\mathcal{S}$ の性質を応用することにより, (f_t) は全ての $s < t$ に対して

$$|f_s(z) - f_t(z)| \leq \frac{8|z|}{(1 - |z|)^4} |e^s - e^t| \quad (z \in \mathbb{D})$$

を満たすことがわかる. 特に (f_t) は任意の固定された $z \in \mathbb{D}$ に対して $t \in [0, \infty)$ 上絶対連続である. さらに, t に無関係なある除外集合 $E \subset [0, \infty)$ が存在して, 任意の z と $t \in [0, \infty) \setminus E$ に対して $\dot{f}_t := \partial f_t / \partial t$ が存在することが示される.

Loewner chain (f_t) に対し, 次の正則関数族 $p(z, t)$ を考える;

$$p(z, t) := \frac{\dot{f}_t(z)}{z f'_t(z)}. \quad (1)$$

この $p(z, t)$ を **Herglotz 関数** と呼ぶ. p は次の性質を持たすことが知られている;

- (i) 任意の固定された a.e. $t \geq 0$ に対して, $p(z, t)$ は $\mathbb{D}$ 上正則な関数で, $p(0, t) = 1$ および $\operatorname{Re} p(z, t) > 0$ を満たす;
- (ii) 任意の固定された $z \in \mathbb{D}$ に対して, $p(z, t)$ は $[0, \infty)$ 上可測;

つまり (f_t) は次の **Loewner 偏微分方程式 (Loewner PDE)** を満たす;

$$\dot{f}_t(z) = z f'_t(z) p(z, t) \quad (z \in \mathbb{D}_{r_0}, \text{ a.e. } t \in [0, \infty)) \quad (2)$$

なお $\mathcal{S}$ の任意の元はある Loewner chain (f_t) に f_0 として埋め込むことができる;

Theorem 2.1 ([Pom75, p.159]). 任意の $f \in \mathcal{S}$ に対してある Loewner chain (f_t) で $f_0 \equiv f$ となるものが存在する.

2.2. Becker による擬等角拡張への応用

1972年に Jochen Becker により, Loewner chain を用いた等角写像の擬等角拡張の構成法が与えられた.

Theorem 2.2 ([Bec72]). (f_t) を *Loewner chain* とし, 対応する *Herglotz function* $p(z, t)$ が全ての $z \in \mathbb{D}$ とほとんど全ての $t \in [0, \infty)$ に対して

$$p(z, t) \in U(k) := \left\{ w \in \mathbb{C} : \left| \frac{w-1}{w+1} \right| \leq k \right\} \quad (3)$$

を満たすと仮定する. このとき, 各々の $t \in [0, \infty)$ に対し f_t は $\overline{\mathbb{D}}$ 上へと連続的に拡張され, さらに

$$F(re^{i\theta}) = \begin{cases} f_0(re^{i\theta}), & \text{if } r < 1, \\ f_{\log r}(e^{i\theta}), & \text{if } r \geq 1, \end{cases}$$

は f_0 の $\mathbb{C}$ への k -擬等角拡張を与える.

つまり時間発展する単連結領域 $f_t(\mathbb{D})$ の境界を敷き詰めた写像 F を生成すると, それが $p \in U(k)$ であれば k -擬等角になっている, という主張である. $f_t(\mathbb{D})$ の境界においての連続性を気にしなければ証明自体は易しい. 実際, F の Beltrami 係数を直接計算してやれば

$$\mu_F(re^{i\theta}) = \frac{ir \frac{\partial F(re^{i\theta})}{\partial r} - \frac{\partial F(re^{i\theta})}{\partial \theta}}{ir \frac{\partial F(re^{i\theta})}{\partial r} + \frac{\partial F(re^{i\theta})}{\partial \theta}} = \frac{\zeta f'(\zeta) - \dot{f}_t(\zeta)}{\zeta f'(\zeta) + \dot{f}_t(\zeta)} = \frac{p(\zeta, t) - 1}{p(\zeta, t) + 1} \quad (\zeta = e^{i\theta}, t = \log r)$$

となるからである. 実際の証明では, $\rho < 1$ として F_ρ を $f_t(\rho z)/\rho$ を用いて定義することで境界での議論を回避, のちに正規族を用いて $\rho \rightarrow 1$ と極限を取る.

Becker の定理から様々な義等角拡張の十分条件が示されている (例えば [Hot09], [Hot14] を参照). また既知の擬等角拡張の十分条件の, Becker の定理による別証明も多く与えられている. 以下にその一例を挙げる;

Theorem 2.3 ([AW62]). f を $\mathbb{D}$ 上定義された非定数有理型関数とし, $k \in [0, 1)$ とする. もし f が $\|S_f\| \leq 2k$ を満たせば, f は $\widehat{\mathbb{C}}$ 上の k -擬等角写像に拡張できる. このときの拡張 F は

$$F(z) = f\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) + \frac{\left(z - \frac{1}{\bar{z}}\right) f'\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}{1 - \frac{1}{2} \left(z - \frac{1}{\bar{z}}\right) \frac{f''\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}{f'\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}} \quad (|z| \geq 1),$$

に適当な一次変換を合成したもので与えられる.

証明は, f を適当な一次変換で $f(z) = z + O(z^3)$ としたあとに f_t を

$$f_t(z) := f(e^{-t}z) - \frac{(e^t - e^{-t})z f'(e^{-t}z)}{1 + \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})z \frac{f''(e^{-t}z)}{f'(e^{-t}z)}}$$

と定義する. この時点ではある $z \in \mathbb{D}$ に対して $f'(z) = 0$ となる可能性があるが, t に依存しない原点のある近傍が存在しその中では $f'(z) \neq 0$ である. すると仮定 $|(1-|z|^2)^2 S_f| \leq 2k$ より, f_t は Loewner chain であり対応する $p(z, t)$ は (3) を満たすことが示される.

なお Becker の定理は, Loewner chain の第一係数を複素数値関数 $a : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ で $a(t)$ は t に関して局所絶対連続, $|a(t)|$ は t に関して狭義単調増加, $\lim_{t \rightarrow \infty} |a(t)| = \infty$ を満たすものに一般化しても成り立つことが示されている ([Hot11]).

2.3. Betker による Inverse Loewner chains と擬等角拡張定理

Loewner chain は時間発展する単連結領域を描いた．一方で，時間経過により像領域が減少していく関数，inverse Loewner chain が1992年に Betker により導入された [Bet92].

Definition 2.4. $g_t(z) = b(t)z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n(t)z^n$ を $t \in [0, \infty)$ で parametrize された $\mathbb{D}$ 上の正則関数族とする，ここで $b: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ は t に関して狭義絶対連続であり $\lim_{t \rightarrow \infty} b(t) = 0$ を満たすものである．このとき $(g_t)_{t \geq 0}$ が **inverse Loewner chain** であるとは，次の性質を満たす時にいう；

1. 各々の $t \in [0, \infty)$ に対し f_t は $\mathbb{D}$ 上単葉である，
2. 任意の $s, t \in [0, \infty), s < t$ に対し．包含関係 $f_s(\mathbb{D}) \supset f_t(\mathbb{D})$ が成り立つ，
3. $g_0(z) = z$.

Inverse Loewner chain は次の微分方程式を満たす；

$$\dot{g}_t(z) = -zg'_t(z)q(z, t) \quad (z \in \mathbb{D}_{r_0}, \text{ a.e. } t \in [0, \infty)),$$

ここで q は Herglotz function である．また与えられた q を Herglotz function に持つ inverse Loewner chain g_t が一意に存在する．

Inverse Loewner chain による興味深い擬等角拡張定理を紹介する．ひとつは Becker の定理の一般化である；

Theorem 2.5. (f_t) を Loewner chain とし，対応する Herglotz function p が全ての $z \in \mathbb{D}$ とほとんど全ての $t \geq 0$ に対して

$$\left| \frac{p(z, t) - \overline{q(z, t)}}{p(z, t) + q(z, t)} \right| \leq k \quad (4)$$

を満たすと仮定する，ここで q はある Herglotz function である． (g_t) を q より生成される inverse Loewner chain とする．このとき，各々の $t \in [0, \infty)$ に対し f_t, g_t は $\mathbb{D}$ 上へと連続的に拡張され，さらに

$$\begin{cases} \Phi(re^{i\theta}) = f_0(re^{i\theta}), & \text{if } r < 1, \\ \Phi\left(\frac{1}{g_t(e^{i\theta})}\right) = f_t(e^{i\theta}), & \text{if } r \geq 1, \end{cases}$$

で定義される $\Phi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ は k -擬等角写像である．

例えば $q(z, t) = p(z, t)$ と取れば，擬等角拡張の十分条件 $|\arg p(z, t)| < k\pi/2$ を得る．ただしこのとき，具体的な擬等角拡張を記述できる場合は限られている ([HW17, pp.199-201])．これは次の理由による： $q(z, t)$ から g_t を記述するためには， $q(z, t)$ を Herglotz function に持つ Loewner chain h_t の z に関する逆関数 h_t^{-1} が必要である．しかし spiral-like function など特別な場合を除き， h_t^{-1} の正確な形を得るのは困難である．

Theorem 2.5 において $f_t(z) = e^t z$ と選ぶことで，次の定理を得る；

Theorem 2.6. (g_t) を *inverse Loewner chain* とし, 対応する *Herglotz function* q が全ての $z \in \mathbb{D}$ とほとんど全ての $t \geq 0$ に対して $q(z, t) \in U(k)$ を満たすとする. このとき, 各々の $t \in [0, \infty)$ に対し g_t は $\overline{\mathbb{D}}$ 上へと連続的に拡張され, さらに

$$\Phi(re^{i\theta}) = \begin{cases} g_{-\log r}(e^{i\theta}), & \text{if } r < 1, \\ re^{i\theta} & \text{if } r \geq 1, \end{cases}$$

で定義される $\Phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ は k -擬等角写像である.

上記で得られる擬等角写像 Φ は $\mathbb{D}$ の境界上で恒等写像となっているため, Φ の Beltrami 係数 $\mu_\Phi(re^{i\theta}) = (1 - q(e^{i\theta}, -\log r)) / (1 + q(e^{i\theta}, -\log r))$ は trivial Beltrami coefficient となっている. つまり Theorem 2.6 は trivial Beltrami coefficient の inverse Loewner chain による構成法を与える (例えば [Sug19] を参照).

3. 一般化された Loewner 方程式とその理論

Loewner 方程式はその正規化条件により Radial case (内点の正規化) と Chordal case (境界点の正規化) に分けられていたが, 2010-2012 年にかけて導入された理論 ([BCDM12], [CDMG10]) によりこれらの統一的な扱いが可能になった.

3.1. One-parameter semigroups

いわゆる現代流のレブナー理論を展開するためには, one-parameter semigroup of holomorphic functions の知識が必要である. 基本的なことを以下にまとめる.

Schwarz-Pick の定理より, 任意の $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}) \setminus \{\text{id}\}$ は $\mathbb{D}$ 内に多くとも 1 つの固定点を持つ. そのような点が存在するとき, それを **Denjoy-Wolff point** と呼ぶ. 一方でもしそのような点が $\mathbb{D}$ 内に存在しないとき, 境界固定点 $\tau = \angle \lim_{z \rightarrow \tau} f(z) \in \partial\mathbb{D}$ が一意に存在し f の反復合成の列 $\{f^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が τ に $\mathbb{D}$ 上広義一様に収束する. ここで $\angle \lim$ は non-tangential limit を, また f^n は f の n 回合成写像 ($f^1 := f, f^n := f \circ f^{n-1}$) を表す. このような境界点も同様に **Denjoy-Wolff point** と呼ぶ.

$\mathbb{D}$ 上の正則自己写像族 $\{\phi_t\}_{t \geq 0} \subset \text{Hol}(\mathbb{D})$ が **one-parameter semigroup** であるとは, 以下の性質が満たされる時にいう;

- (i) $\phi_0 = \text{id}_{\mathbb{D}}$;
- (ii) 任意の $s, t \geq 0$ に対し $\phi_{s+t} = \phi_t \circ \phi_s$;
- (iii) $\mathbb{D}$ 上広義一様に $\lim_{t \rightarrow 0^+} \phi_t(z) = z$.

One-parameter semigroup $\{\phi_t\}$ に対しては以下の定理が基本的である.

Theorem 3.1 (see e.g. [ES10, p.18]). $(\phi_t)_{t \geq 0}$ を $\mathbb{D}$ 上の正則自己写像による *one-parameter semigroup* とする. このとき任意の $z \in \mathbb{D}$ に対して極限

$$G(z) := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\phi_t(z) - z}{t} \quad (5)$$

が $\mathbb{D}$ 上広義一様に存在し, $G \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{C})$ である. さらに, この G により定義され

る初期値問題

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_t(z)}{\partial t} = G(\psi_t(z)), & t \geq 0 \\ \psi_0(z) = z, & z \in \mathbb{D} \end{cases} \quad (6)$$

の一意解の族 $(\psi_t)_{t \geq 0}$ は *one-parameter semigroup* となり, これは $(\phi_t)_{t \geq 0}$ と一致する.

上記定理より, $(\phi_t)_{t \geq 0}$ は $t \geq 0$ に関して微分可能であること, また t を固定した時に現れる正則関数 ϕ_t は $\mathbb{D}$ 上で単葉であることがわかる.

(6) で得られる関数 $G \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{C})$ を **infinitesimal generator** と呼び, そのような G 全体を $\text{Gen}(\mathbb{D})$ で表す. $G \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{C})$ が $\text{Gen}(\mathbb{D})$ に含まれるための必要十分条件は種々知られているが, ここではその中でもっとも重要な Berkson-Porta の定理を紹介する.

Theorem 3.2 ([BP78]). $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{C})$ とする. このとき $f \in \text{Gen}(\mathbb{D})$ であるための必要十分条件は, ある $p \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \overline{\mathbb{H}})$ と点 $\tau \in \overline{\mathbb{D}}$ が存在し

$$G(z) = (z - \tau)(\bar{\tau}z - 1)p(z) \quad (z \in \mathbb{D}) \quad (7)$$

が満たされることである.

(7) は **Berkson-Porta representation** と呼ばれる. τ は $G \in \text{Gen}(\mathbb{D})$ から生成される semigroup $\{\phi_t\}$ により定義される DW-point である.

3.2. Loewner chains and evolution families

まずは一般化された Loewner chain を定義する.

Definition 3.3 ([CDMG10, Definition 1.2]). 単位円板 $\mathbb{D}$ 上定義された正則関数の族 $(f_t)_{t \geq 0}$ が **Loewner chain** であるとは, 次の条件を満たすときにいい, $(f_t) \in \text{LC}$ で記す;

- LC1. 各 $t \in [0, \infty)$ に対し, $f_t : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ は単葉;
- LC2. 全ての $0 \leq s < t < \infty$ に対し $f_s(\mathbb{D}) \subset f_t(\mathbb{D})$;
- LC3. 任意のコンパクト集合 $K \subset \mathbb{D}$ と $T > 0$ に対してある非負な局所可積分関数 $k_{K,T} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ が存在し, 全ての $z \in K$ と $0 \leq s \leq t \leq T$ に対し

$$|f_s(z) - f_t(z)| \leq \int_s^t k_{K,T}(\zeta) d\zeta \quad (8)$$

を満たす.

また Loewner chain が**正規化された**とは, $f_0 \in \mathcal{S}$ であるときにいう.

$(f_t) \in \text{LC}$ に対し, $\mathbb{D}$ から $\mathbb{D}$ 内への関数 $\varphi_{s,t} := f_t^{-1} \circ f_s \in \text{Hol}(\mathbb{D})$, $t \geq s \geq 0$, は次の3条件を満たす ([CDMG10, Definition 1.2]) ;

- EF1. $\varphi_{s,s}(z) = z$;
 EF2. 任意の $0 \leq s \leq u \leq t < \infty$ に対して $\varphi_{s,t} = \varphi_{u,t} \circ \varphi_{s,u}$;
 EF3. 任意の $z \in \mathbb{D}$ と $T > 0$ に対してある非負な局所可積分関数 $k_{z,T} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ が存在し,

$$|\varphi_{s,u}(z) - \varphi_{s,t}(z)| \leq \int_u^t k_{z,T}(\zeta) d\zeta \quad (9)$$

が $0 \leq s \leq u \leq t \leq T$ に対して成立.

これを **evolution family** と呼び, その全体を EF で記す. evolution family は one-parameter semigroup の一般化となっている, 実際 $(\phi_{t-s})_{0 \leq s \leq t < \infty} \in \text{EF}$ となる.

与えられた $(f_t) \in \text{LC}$ に対して, 関係式 $\varphi_{s,t} = f_t^{-1} \circ f_s$ により $(\varphi_{s,t}) \in \text{EF}$ が定まる. 一方で与えられた $(\varphi_{s,t}) \in \text{EF}$ に対して $\varphi_{s,t} = f_t^{-1} \circ f_s$ を満たす $(f_t) \in \text{LC}$ は無数に存在するが, ある性質を満たすものに限れば $(\varphi_{s,t})$ と 1 対 1 対応をつけることができる. この事実を紹介しよう. ここで $\Omega[(f_t)]$ を

$$\Omega[(f_t)] := \bigcup_{t \geq 0} f_t(\mathbb{D})$$

で定義し, これを **Loewner range** と呼ぶ. $\Omega[(f_t)] = \mathbb{C}$ となるとは限らないことに注意. また $\beta(z) := \lim_{t \rightarrow +\infty} |\varphi'_{0,t}(z)| / (1 - |\varphi_{0,t}(z)|^2)$ とする.

Theorem 3.4 ([CDMG10, Theorem 1.6, Theorem 1.7]). $(\varphi_{s,t}) \in \text{EF}$ とし, $\mathcal{L}[(\varphi_{s,t})] \subset \text{LC}$ を $(\varphi_{s,t})$ により生成される正規化された (つまり $f_0 \in \mathcal{S}$ であるような) *Loewner chains* の族とする. このとき, $\Omega[(f_t)]$ が $\mathbb{C}$ または $\mathbb{C}$ 上の原点中心の円となるような $(f_t) \in \mathcal{L}[(\varphi_{s,t})]$ の元が一意に存在する. さらに;

- 以下の 4 条件は同値である.
 - (i) $\Omega[(f_t)] = \mathbb{C}$;
 - (ii) $\mathcal{L}[(\varphi_{s,t})]$ はひとつの元のみから成る;
 - (iii) 全ての $z \in \mathbb{D}$ に対し $\beta(z) = 0$;
 - (iv) ある点 $z_0 \in \mathbb{D}$ が少なくともひとつ存在し, $\beta(z_0) = 0$.
- 一方, もし $\Omega[(f_t)] \neq \mathbb{C}$ であれば, $\mathcal{L}[(\varphi_{s,t})]$ 内の一意元 (f_t) の *Loewner range* は

$$\Omega[(f_t)] = \left\{ w : |w| < \frac{1}{\beta(0)} \right\}$$

で表され, 他の全ての $(g_t) \in \mathcal{L}[(\varphi_{s,t})]$ は次の形で表される;

$$g_t(z) = \frac{h(\beta(0)f_t(z))}{\beta(0)} \quad (h \in \mathcal{S}).$$

上記の定理により一意に定まる Loewner chain を **standard** であるといい, LC_0 で記す.

3.3. Herglotz vector fields and Herglotz functions

初期値問題の立場から見ると, one-parameter semigroup は自励系 (つまりベクトル場 $G \in \text{Gen}(\mathbb{D})$ が時間に依らない) である. それに対して evolution family は非自励系の微分方程式系を与える. $\text{Gen}(\mathbb{D})$ の一般化として次の概念を導入しよう.

Definition 3.5. 函数 $G : \mathbb{D} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ が **Herglotz vector field** であるとは, 次の条件を満たすときにいい, その全体を HV で記す.

HV1. 任意の $z \in \mathbb{D}$ に対し, $G(\cdot, t)$ は $t \in [0, \infty)$ 上可測である;

HV2. 任意のコンパクト集合 $K \subset \mathbb{D}$ に対してある非負な局所可積分函数 $k_K : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ が存在し, 全ての $z \in K$ とほとんど全ての $t \in [0, \infty)$ に対し

$$|G(z, t)| \leq k_K(t) \quad (10)$$

を満たす;

HV3. ほとんど全ての $t \in [0, \infty)$ に対し, $G(\cdot, t) \in \text{Gen}(\mathbb{D})$ である.

任意の $G \in \text{HV}$ に対して, **Loewner-Kufarev ODE**

$$\begin{cases} \frac{dw(t)}{dt} = G(w(t), t), & t \geq s \\ w(0) = z, & z \in \mathbb{D} \end{cases} \quad (11)$$

により得られる一意解の全体 $(\varphi_{s,t}(z))_{0 \leq s \leq t < \infty} := (w_{z,s}(t))_{z \in \mathbb{D}, s \geq 0}$ は evolution family を定める. また任意の $(\varphi_{s,t}) \in \text{EF}$ に対して, Loewner-Kufarev ODE により $G \in \text{HV}$ が **本質的に一意に**定まる, つまり $G^* \in \text{HV}$ を $(\varphi_{s,t})$ により生成された Herglotz vector field としたとき, ほとんど全ての $t \geq 0$ に対して $\mathbb{D}$ 上 $G(\cdot, t) = G^*(\cdot, t)$ である.

さらに式 (7) で紹介した Berkson-Porta の定理を一般化する. そのために Herglotz function を定義しよう.

Definition 3.6 ([BCDM12, Definition 4.5]). $\mathbb{D}$ 上の **Herglotz function** とは, 以下の性質を満たす函数 $p : \mathbb{D} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ であり, $p \in \text{HF}$ で記す:

HF1. 全ての $z \in \mathbb{D}$ に対し, $p(z, \cdot)$ は $[0, \infty)$ 上局所可積分である;

HF2. ほとんど全ての $t \geq 0$ に対し, $p(\cdot, t)$ は $\mathbb{D}$ 上正則である;

HF3. 全ての $z \in \mathbb{D}$ とほとんど全ての $t \in [0, \infty)$ に対し $\text{Re } p(z, t) \geq 0$ である.

$p \in \text{HF}$ を用いて, Berkson-Porta representation の次のような一般化が得られる.

Theorem 3.7 ([BCDM12, Theorem 4.8]). 任意の $G \in \text{HV}$ に対し, 可測函数 $\tau : [0, \infty) \rightarrow \overline{\mathbb{D}}$ と $p \in \text{HF}$ が本質的に一意に存在し,

$$G(z, t) = (z - \tau(t))(\overline{\tau(t)}z - 1)p(z, t) \quad (12)$$

を全ての $z \in \mathbb{D}$ とほとんど全ての $t \in [0, \infty)$ に対して満たす.

逆に, 与えられた可測函数 $\tau : [0, \infty) \rightarrow \overline{\mathbb{D}}$ と $p \in \text{HF}$ に対し, 上記の等式は *Herglotz vector field* を定める.

上記の可測函数 τ 全体を DW で記す. $p \in \text{HV}$ と $\tau \in \text{DW}$ のペア (p, τ) を $G \in \text{HV}$ に対する **Berkson-Porta データ** と呼ぶ. Berkson-Porta データ全体を BP で記す. つまり

$$(\varphi_{s,t}) \in \text{EF} \quad \Leftrightarrow \quad G \in \text{HV} \quad \Leftrightarrow \quad (p, \tau) \in \text{BP}$$

の 3 者の間に本質的な 1 対 1 対応がある. また (11) と (12) により, $\varphi_{s,t}$ と (p, τ) の関係は次の常微分方程式によって特徴付けられることがわかる;

$$\dot{\varphi}_{s,t}(z) = (\tau(t) - \varphi_{s,t}(z))(1 - \overline{\tau(t)}\varphi_{s,t}(z))p(\varphi_{s,t}(z), t). \quad (13)$$

$\tau = 0$ のときは radial case, $\tau = 1$ のときは chordal case を与える. (11) を $(f_t) \in \text{LC}$ で書き換えれば **Loewner-Kufarev PDE**

$$\frac{\partial f_t(z)}{\partial t} = -f'_t(z)G(z, t) \quad (14)$$

を得る. これと (12) を合わせれば, (f_t) は PDE

$$\frac{\partial f_t(z)}{\partial t} = (z - \tau(t))(1 - \overline{\tau(t)}z)f'_t(z)p(z, t) \quad (15)$$

を満たすこととなる.

4. 擬等角拡張定理

4.1. 定理の主張

Becker の擬等角拡張定理が一般化された Loewner chain についても成り立つのかは興味深い問題である. これについては以下の定理が示されている.

Theorem 4.1. $k \in [0, 1)$ とする. $(f_t) \in \text{LC}$ に対し, 対応する $p \in \text{HF}$ が

$$\left| \frac{p(z, t) - 1}{p(z, t) + 1} \right| \leq k \quad (z \in \mathbb{D}, \text{ a.e. } t \in [0, \infty)) \quad (16)$$

を満たすとする. このとき次の性質が成り立つ;

- (i) 各 $t \in [0, \infty)$ に対して f_t は $\widehat{\mathbb{C}}$ への k -擬等角拡張を持つ;
- (ii) 各 $s, t \in [0, \infty)$, $s \leq t$ に対して $\varphi_{s,t} = f_t^{-1} \circ f_s$ は $\widehat{\mathbb{C}}$ への k -擬等角拡張を持つ;
- (iii) $\Omega[(f_t)] = \mathbb{C}$.

この定理において, $\tau \in \text{DW}$ に関してはいかなる制限も要求されない.

上記は [Hot16] によって示されたが, その後すぐに [GP18] により Holomorphic Motion と Extended λ -Lemma による短い別証明が与えられた. 次節よりそれぞれの証明の簡単な解説を記す.

4.2. 近似定理による証明

[Hot16] の証明においては次の近似定理が本質的である. 事実自体は解析函数による制御理論の結果 [Rot98] から従うが, [Hot16] ではそのレブナー理論へのカスタマイズが図られている.

Theorem 4.2 ([Rot98], [Hot16]). 任意の $T > 0$ に対して

$$\Gamma := \{G(\cdot, t) : a.e. t \in [0, T]\} \subset \text{HV}$$

は正規族をなすとする. もし Herglotz vector field の列 $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Gamma$ がある $G \in \text{HV}$ に弱収束するのなら, $\{G_n\}$ に対応する evolution family の列 $\{(\varphi_{s,t}^n)\}_n \subset \text{EF}$ は G に対応する $(\varphi_{s,t}) \in \text{EF} \wedge (z, t) \in \mathbb{D} \times [s, \infty)$ 上広義一様収束する.

Theorem 4.3 ([Hot16]). evolution family の列 $(\varphi_{s,t}^n) \subset \text{EF}$ が, ある $(\varphi_{s,t}) \in \text{EF}$ に $(z, t) \in \mathbb{D} \times [0, \infty)$ 上広義一様収束するとする. また $(\varphi_{s,t}^n) \subset \text{EF}$, $(\varphi_{s,t}) \in \text{EF}$ にそれぞれ対応する standard Loewner chain を $(f_t^n) \in \text{LC}_0$, $(f_t) \in \text{LC}_0$ とする. このとき (f_t^n) は $(z, t) \in \mathbb{D} \times [0, \infty)$ 上 (f_t) へ広義一様収束する.

つまり Herglotz function の列 $p_n(z, t)$ および Denjoy-Wolff function の列 $\tau_n(t)$ が都合よく収束すれば, 対応する Loewner chain の列 (f_t^n) は広義一様に収束する, という事を言っている. これにより τ を単関数と仮定してよく, 結局は τ が定数の場合に帰着する事になる.

なお [Hot16] では, Becker の定理ではなく Betker の定理 (Theorem 2.5) を現代流レブナー理論の枠組みまで一般化し, その特別な場合として (f_t) の擬等角拡張性を示している.

4.3. λ -Lemma による証明

[GP18] は Holomorphic Motion による擬等角拡張性を用いて Theorem 4.1 を示した. 本質的なアイデアは [Sug99] でも用いられているように, 右半平面に像領域を持つ正則関数に複素パラメータ $\lambda \in \mathbb{D}$ を入れることで Holomorphic motion を作り出す, というものである.

Cayley transform を $K(z) = \frac{1+z}{1-z}$ として, $\lambda \in \mathbb{D}$ に依存する Herglotz function $p_\lambda(z, t)$ を

$$p_\lambda(z, t) := K \circ \phi_\lambda, \quad \text{ここで} \quad \phi_\lambda(z, t) := \frac{\lambda}{k} K^{-1}(p(z, t))$$

で定義する. $p(z, t) \in U(k)$ という仮定より任意の λ に対して $|\phi_\lambda| < 1$ となることがわかる. $(\varphi_{s,t}^\lambda)$ を p_λ から生成される evolution family とすると, $(\varphi_{s,t}^\lambda)$ も $\lambda \in \mathbb{D}$ に正則に依存することがわかる. $\lambda = 0$ の場合を確認しなければならないが, G_λ を $(\varphi_{s,t}^\lambda)$ に対応する Herglotz vector field として

$$\frac{d}{dt} S_{\varphi_{s,t}^\lambda}(z) = \left(\frac{d}{dz} \varphi_{s,t}^\lambda(z) \right)^2 G_\lambda'''(\varphi_{s,t}^\lambda(z), t)$$

と $G_0''' \equiv 0$ から, $\varphi_{s,t}^0$ は linear-fractional map (つまり 0-擬等角拡張可能) になることがわかる. よって $(\lambda, z) \mapsto (\varphi_{s,t}^0)^{-1} \circ \varphi_{s,t}^\lambda(z)$ は holomorphic motion となり, [Slo91] より $\varphi_{s,t}^k$ の k -擬等角拡張性がいえる. (f_t) は $(\varphi_{s,t})$ の広義一様収束の極限で与えられる事から, f_t の擬等角拡張性も従う.

参考文献

- [AW62] L. V. Ahlfors and G. Weill, *A uniqueness theorem for Beltrami equations*, Proc. Amer. Math. Soc. **13** (1962), no. 6, 975–978.
- [BCDM12] F. Bracci, M. D. Contreras, and S. Díaz-Madrigal, *Evolution families and the Loewner equation I. The unit disc*, J. Reine Angew. Math. **672** (2012), 1–37.
- [Bec72] J. Becker, *Löwnersche Differentialgleichung und quasikonform fortsetzbare schlichte Funktionen*, J. Reine Angew. Math. **255** (1972), 23–43.
- [Bet92] Th. Betker, *Löwner chains and quasiconformal extensions*, Complex Variables Theory Appl. **20** (1992), no. 1-4, 107–111.
- [BP78] E. Berkson and H. Porta, *Semigroups of analytic functions and composition operators*, Michigan Math. J. **25** (1978), no. 1, 101–115.
- [CDMG10] M. D. Contreras, S. Díaz-Madrigal, and P. Gumenyuk, *Loewner chains in the unit disk*, Rev. Mat. Iberoam. **26** (2010), no. 3, 975–1012.
- [ES10] M. Elin and D. Shoikhet, *Linearization models for complex dynamical systems*, Operator Theory: Advances and Applications, vol. 208, Birkhäuser Verlag, Basel, 2010.
- [GP18] P. Gumenyuk and I. Prause, *Quasiconformal extensions, Loewner chains, and the λ -lemma*, Anal. Math. Phys. **8** (2018), no. 4, 621–635.
- [Hot09] I. Hotta, *Explicit quasiconformal extensions and Löwner chains*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **85** (2009), no. 8, 108–111.
- [Hot11] ———, *Löwner chains with complex leading coefficient*, Monatsh. Math. **163** (2011), no. 3, 315–325.
- [Hot14] ———, *Loewner theory for quasiconformal extensions: old and new*, preprint (arXiv:1402.6006) (2014).
- [Hot16] ———, *Loewner chains with quasiconformal extensions: an approximation approach*, preprint (arXiv:1605.07839) (2016).
- [HW17] I. Hotta and L.-M. Wang, *Quasiconformal extendability of integral transforms of noshiro-warschawski functions*, Rocky Mountain J. Math. **47** (2017), no. 1, 185–204.
- [Pom75] Ch. Pommerenke, *Univalent functions*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1975.
- [Rot98] O. Roth, *Control Theory in $\mathcal{H}(\mathbb{D})$* , Ph.D. thesis, Universität Würzburg, 1998.
- [Sch75] G. Schober, *Univalent functions - selected topics*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 478, Springer-Verlag, Berlin, 1975.
- [Slo91] Z. Slodkowski, *Holomorphic motions and polynomial hulls*, Proc. Amer. Math. Soc. **111** (1991), no. 2, 347–355.
- [Sug99] T. Sugawa, *Holomorphic motions and quasiconformal extensions*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska Sect. A **53** (1999), 239–252.
- [Sug19] ———, *A construction of trivial Beltrami coefficients*, Proc. Amer. Math. Soc. **147** (2019), no. 2, 629–635. MR 3894901