複素曲面上の力学系

上原 崇人 (岡山大学)*

1. 導入

力学系理論において、連続写像に対して位相的エントロピーとよばれる量が定義される。エントロピーは重要な指標の一つであり、エントロピーが正の場合、写像の反復合成による力学系は複雑な挙動を示すことになる。本講演では複素曲面、つまり、コンパクトで連結な2次元複素多様体に着目して、その上の双正則自己同型写像による力学系のエントロピーについて考察する。複素曲面上の写像でエントロピーが正の場合、Gromov, Yomdinの結果とHodgeの指数定理を応用することで、写像のエントロピーはSalem数とよばれる代数的数を用いて記述されることが示される(2節参照)。Salem数は最も単純な代数的数である1の根に類する数であると考えられるが、それ故Salem数は良い数論的性質をもっている。近年、このSalem数のもつ性質を用いて、複素曲面やその上の双正則写像が構成され、さらにその力学系的性質が研究されてきている。

後述するように、エントロピー正の双正則写像が存在する複素曲面は、複素トーラス、Enriques曲面、K3曲面、そして有理曲面のいずれかと双有理同値となることが示されている。本講演では、近年研究が進んできているK3曲面と有理曲面上の力学系についてエントロピーを用いて考察していく。

2. エントロピー

まず、位相的エントロピーの定義を与える。 $X = (X, d)$ をコンパクト距離空間として、 $f : X \rightarrow X$ を連続写像とする。また、 f^k で f の k 回反復合成 $f^k = f \circ \dots \circ f$ を表すことにする。固定した $\varepsilon > 0$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して、部分集合 $E \subset X$ が (n, ε) -分離的であるとは、任意の $x \in X$ に対して、ある $y \in E$ が存在して、 $\max\{d(f^k(x), f^k(y)) \mid 0 \leq k \leq n-1\} < \varepsilon$ となることである。つまり、任意の点 $x \in X$ を出発する n ステップまでの軌道 $\{f^k(x)\}_{k=0}^{n-1}$ は、誤差 $\varepsilon > 0$ の範囲内で適当な点 $y \in E$ を出発する軌道 $\{f^k(y)\}_{k=0}^{n-1}$ で近似されることになる。濃度が最小となる (n, ε) -分離的な部分集合 E の濃度を $N(n, \varepsilon)$ とおく。空間 X はコンパクトであるため、 $N(n, \varepsilon)$ は有限となることに注意する。この最小濃度 $N(n, \varepsilon)$ の指数増大度を与えるのが写像 f の位相的エントロピーである：

$$h_{\text{top}}(f) := \lim_{\varepsilon \searrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log N(n, \varepsilon) \geq 0.$$

エントロピー $h_{\text{top}}(f)$ は距離 d の取り方に依らず、位相共役不変量となる。また、エントロピーは力学系 $f : X \rightarrow X$ の軌道の豊富さを表しており、力学系 $f : X \rightarrow X$ がカオス系であることを $h_{\text{top}}(f) > 0$ でもって定義することもある。

一般に、定義から直接エントロピーを計算することは困難である。しかしながら、力学系が特別なクラスの場合、次の結果によりエントロピーを計算することが可能となる。

定理 2.1 (Gromov, Yomdin [5, 16]) X をコンパクト Kähler 多様体、 $f : X \rightarrow X$ を

本研究は科研費(課題番号:16K17617)の助成を受けたものである。

* 〒700-8530 岡山市北区津島中3-1-1 岡山大学大学院自然科学研究科

e-mail: takaue@okayama-u.ac.jp

双正則自己同型写像とする. このとき, f のエントロピーは

$$h_{\text{top}}(f) = \log \lambda(f^*|_{H^*(X)})$$

と表される. ただし, $\lambda(f^*|_{H^*(X)}) := \max\{|\lambda| \mid \lambda : \text{eigenvalue of } f^* : H^*(X) \rightarrow H^*(X)\}$ は f^* のスペクトル半径である.

また, X が複素曲面, つまり, コンパクトで連結な 2次元複素多様体の場合, 次の結果が知られている. 複素曲面 X 上の双正則自己同型写像 $f : X \rightarrow X$ 全体の集合を $\text{Aut}(X)$ と表すことにする.

定理 2.2 (Diller, Favre [4]) X を複素曲面として, $f \in \text{Aut}(X)$ を $h_{\text{top}}(f) = 0$ となる双正則写像とする. このとき, 次のいずれかが成立する:

- (1) ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, f^N は恒等写像とイソトピックとなる.
- (2) X は楕円曲面となり, f は楕円ファイブレーションを保存する.

つまり, エントロピーが 0 の場合, f は本質的に有限位数となるか, ファイブレーションを保ち 1次元の力学系に簡約されるかのいずれかとなる. 一方, エントロピーが正の場合, Enriques-Kodaira の分類理論を用いて次の結果が示されている.

定理 2.3 (Cantat [3]) X を複素曲面として, $f \in \text{Aut}(X)$ を $h_{\text{top}}(f) > 0$ となる双正則写像とする. このとき, X は Kähler 曲面となり, 次の曲面のいずれかと双有理同値となる: (1) 複素トーラス, (2) Enriques 曲面, (3) K3 曲面, (4) 有理曲面 (射影平面). また, f のエントロピーは次で与えられる:

$$h_{\text{top}}(f) = \log \lambda(f^*|_{H^2(X)}).$$

つまり, 複素曲面 X 上の双正則写像 $f : X \rightarrow X$ による力学系のエントロピーを計算するには, コホモロジー群への作用 $f^* : H^2(X) \rightarrow H^2(X)$ のスペクトル半径を計算すればよい. 写像 $f \in \text{Aut}(X)$ に対して, $f^* : H^2(X; \mathbb{Z})_{\text{free}} \rightarrow H^2(X; \mathbb{Z})_{\text{free}}$ は交叉形式を保つため, $f^* \in O(H^2(X; \mathbb{Z})_{\text{free}})$ を誘導する. さらに, $h_{\text{top}}(f) > 0$, つまり, $\lambda(f^*) > 1$ を仮定すると, f^* は Hodge 構造と Kähler 錐を保つため, f^* の特性多項式は

$$\chi_{f^*}(t) := \det(t \cdot \text{id} - f^*) = R_{f^*}(t)S_{f^*}(t)$$

と表されることが知られている. ただし, $R_{f^*}(t)$ は円分多項式の積であり, $S_{f^*}(t)$ は Salem 多項式である. ここで, 多項式 $S(t) \in \mathbb{Z}[t]$ が Salem 多項式であるとは, 次をみたす既約でモニックな整数係数の多項式である: (1) ある $\lambda > 1$ が存在して $S(\lambda) = S(\lambda^{-1}) = 0$, (2) $\lambda^{\pm 1}$ 以外の $S(t) = 0$ の根はすべて絶対値が 1 である. Salem 多項式 $S(t) = 0$ の根 $\lambda > 1$ を Salem 数とよぶ. 特に, $|\lambda| > 1$ となる f^* の固有値は唯一であり, それは Salem 数 $\lambda = \lambda(f^*) > 1$ となる. 重要な Salem 数は Lehmer 数 $\lambda_{\min} \approx 1.1762 > 1$ とよばれる次の Salem 多項式の根である:

$$S_{\min}(t) := t^{10} + t^9 - t^7 - t^6 - t^5 - t^4 - t^3 + t + 1 = 0.$$

Lehmer 数 $\lambda_{\min}$ は次の意味で重要な Salem 数となる.

定理 2.4 (McMullen [8]) X を複素曲面として, $f \in \text{Aut}(X)$ を $h_{\text{top}}(f) = \log \lambda(f^*) > 0$ となる双正則写像とする. このとき, $h_{\text{top}}(f) \geq \log \lambda_{\min}$ をみたす.

後述するように, X が K3 曲面もしくは有理曲面の場合には, $h_{\text{top}}(f) = \log \lambda_{\min}$ を実現する写像 $f \in \text{Aut}(X)$ が存在する. 一方, X が複素トーラスもしくは Enriques 曲面の場合には, 任意の $f \in \text{Aut}(X)$ に対して $h_{\text{top}}(f) > \log \lambda_{\min}$ となることが知られている. 次節以降, エントロピーを介して K3 曲面と有理曲面上の力学系について考察していく.

3. K3 曲面上の力学系

本節では, K3 曲面上の力学系について考察する ([7, 10, 11] 参照). まず, 格子について復習する. 格子 $L = (L, (\cdot, \cdot))$ とは有限生成自由加群 $L = \mathbb{Z}^r = \mathbb{Z}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}e_r$ と非退化対称双線型形式 $(\cdot, \cdot) : L \times L \rightarrow \mathbb{Z}$ の組である. 格子 L が偶であるとは, 任意の $x \in L$ に対して, $(x, x) \in 2\mathbb{Z}$ となることであり, L がユニモジュラーであるとは, $L \cong L^\vee := \text{Hom}(L, \mathbb{Z})$ となることである. また, L が符号数 (p, q) をもつとは, Gram 行列 $((e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq r}$ が p 個の正の固有値と q 個の負の固有値をもつことであり, L が不定値であるとは, $p \geq 1$ かつ $q \geq 1$ となることである. 一般に, 偶でユニモジュラーかつ不定値な格子は同型を除いて一意に決まり, 符号数 (p, q) の偶でユニモジュラーな格子が存在するための必要十分条件は $p - q \in 8\mathbb{Z}$ となることが知られている.

複素曲面 X が K3 曲面であるとは, X が単連結かつ X 上に至る所消えない正則 2 次形式 σ_X が存在することである. K3 曲面は Kähler 曲面であり, 全ての K3 曲面は互いに可微分同相である. また, K3 曲面 X のコホモロジー群 $H^2(X; \mathbb{Z}) = H^2(X; \mathbb{Z})_{\text{free}}$ と交叉形式 $(\cdot, \cdot) : H^2(X; \mathbb{Z}) \times H^2(X; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$ の組 $(H^2(X; \mathbb{Z}), (\cdot, \cdot))$ は符号数 $(3, 19)$ の偶でユニモジュラーな格子 $\Pi_{3,19}$ と同型となることが知られている.

K3 曲面 X は Kähler 曲面のため, Hodge 分解

$$H^2(X; \mathbb{C}) = H^2(X; \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} = H^{2,0}(X) \oplus H^{1,1}(X) \oplus H^{0,2}(X)$$

を与える. コホモロジー群 $H^2(X; \mathbb{Z})$ 上の交叉形式 $(\cdot, \cdot)$ を $H^2(X; \mathbb{C})$ 上の $\mathbb{C}$ -双線型形式に拡張する. Dolbeault の定理と Serre の双対性により, $H^{2,0}(X)$ と $H^{0,2}(X)$ は X 上の至る所消えない正則 2 次形式 σ_X を用いて,

$$H^{2,0}(X) = \mathbb{C} \cdot \sigma_X, \quad H^{0,2}(X) = \mathbb{C} \cdot \bar{\sigma}_X$$

と表され, 交叉形式は,

$$(\sigma_X, \sigma_X) = \int_X \sigma_X \wedge \sigma_X = 0, \quad (\sigma_X, \bar{\sigma}_X) = \int_X \sigma_X \wedge \bar{\sigma}_X > 0$$

と表される. つまり, $H^{2,0}(X) \oplus H^{0,2}(X)$ を実部 $(H^{2,0}(X) \oplus H^{0,2}(X))_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\text{Re}(\sigma_X) \oplus \mathbb{R}\text{Im}(\sigma_X)$ に制限すると,

$$(\text{Re}(\sigma_X), \text{Re}(\sigma_X)) = (\text{Im}(\sigma_X), \text{Im}(\sigma_X)) > 0, \quad (\text{Re}(\sigma_X), \text{Im}(\sigma_X)) = 0$$

となるため, $H^{2,0}(X) \oplus H^{0,2}(X)$ の符号数は $(2, 0)$ である. 一方, $H^{1,1}(X)$ は交叉形式に関する直交補空間 $H^{1,1}(X) = (H^{2,0}(X) \oplus H^{0,2}(X))^{\perp}$ となり, $H^{1,1}(X)$ の符号数は $(1, 19)$ である.

K3 曲面 X は Kähler 曲面のため, Kähler 錐

$$\mathcal{K}_X := \{[\omega] \mid \omega : \text{Kähler form}\} \neq \emptyset \subset H^{1,1}(X)_{\mathbb{R}} := \{x \in H^{1,1}(X) \mid \bar{x} = x\}$$

が存在する. K3 曲面において Kähler 錐は

$$W_X := \{\omega \in H^{1,1}(X)_{\mathbb{R}} \mid (\omega, \omega) > 0, (\omega, \delta) \neq 0 (\delta \in \Delta_X)\}$$

の連結成分と一致する. ただし, $\Delta_X := \{\delta \in H^{1,1}(X) \cap H^2(X; \mathbb{Z}) \mid (\delta, \delta) = -2\}$ ¹.

上記の結果を鑑みて, 抽象的な格子 $\Pi_{3,19}$ 上で周期領域

$$\mathcal{P} := \{\sigma \in \mathbb{P}(\Pi_{3,19} \otimes \mathbb{C}) \mid (\sigma, \sigma) = 0, (\sigma, \bar{\sigma}) > 0\}$$

を定義しておく. 周期 $\sigma \in \mathcal{P}$ に対して, $L = \Pi_{3,19}$ 上の Hodge 分解が与えられる:

$$L \otimes \mathbb{C} = L_{\sigma}^{2,0} \oplus L_{\sigma}^{1,1} \oplus L_{\sigma}^{0,2}, \quad (L_{\sigma}^{2,0} := \mathbb{C}\sigma, \quad L_{\sigma}^{0,2} := \mathbb{C}\bar{\sigma}, \quad L_{\sigma}^{1,1} := (L_{\sigma}^{2,0} \oplus L_{\sigma}^{0,2})^{\perp}).$$

定義 3.1 格子 $L = \Pi_{3,19}$ 上の K3 構造とは次のデータの組 $(\sigma, \mathcal{K})$ のことである:

- (1) 周期 $\sigma \in \mathcal{P}$. そこで, $L_{\sigma}^{1,1} := (\mathbb{C}\sigma \oplus \mathbb{C}\bar{\sigma})^{\perp}$, $\Delta := \{\delta \in L_{\sigma}^{1,1} \cap L \mid (\delta, \delta) = -2\}$ とおく.
- (2) Kähler 錐 $\mathcal{K} : W := \{\omega \in (L_{\sigma}^{1,1})_{\mathbb{R}} \mid (\omega, \omega) > 0, (\omega, \delta) \neq 0 (\delta \in \Delta)\}$ の連結成分.

K3 曲面に対する Torelli の定理と周期写像の全射性を用いて次の結果が示される.

定理 3.2 任意の K3 構造 $(\sigma, \mathcal{K})$ に対して, K3 曲面 X と同型写像 (マーキング) $\phi : \Pi_{3,19} \rightarrow H^2(X; \mathbb{Z})$ が唯一存在して, $\phi(\mathbb{C}\sigma) = \mathbb{C}\sigma_X$ かつ $\phi(\mathcal{K}) = \mathcal{K}_X$ をみたす. また, $w \in O(\Pi_{3,19})$ が $w(\mathbb{C}\sigma) = \mathbb{C}\sigma$ かつ $w(\mathcal{K}) = \mathcal{K}$ をみたすならば, 双正則写像 $f \in \text{Aut}(X)$ が唯一存在して, 次の可換図式をみたす:

$$\begin{array}{ccc} \Pi_{3,19} & \xrightarrow{w} & \Pi_{3,19} \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi \\ H^2(X, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{f^*} & H^2(X; \mathbb{Z}). \end{array}$$

このとき, 写像 f のエントロピーは, $h_{\text{top}}(f) = \log \lambda(w)$ と表される.

つまり, $h_{\text{top}}(f) = \log \lambda$ となる $f \in \text{Aut}(X)$ を構成するには, (1) $\chi_w(\lambda) = 0$, (2) $w(\mathbb{C}\sigma) = \mathbb{C}\sigma$, (3) $w(\mathcal{K}) = \mathcal{K}$ となる K3 構造 $(\sigma, \mathcal{K})$ と $w \in O(\Pi_{3,19})$ を構成すればよい. $\chi_w(t)$ が (既約な)22 次 Salem 多項式となる場合, 次の結果が知られている.

定理 3.3 (Bayer-Fluckiger, Taelman [1]) $S(t) \in \mathbb{Z}$ を 22 次 Salem 多項式とし, $\lambda > 1$ を $S(\lambda) = 0$ となる Salem 数とする. このとき, $h_{\text{top}}(f) = \log \lambda > 0$ となる K3 曲面 X 上の双正則写像 $f \in \text{Aut}(X)$ が存在するための必要十分条件は, $|S(1)|$, $|S(-1)|$, $-S(1)S(-1)$ が全て平方数となることである.

¹有効因子で代表される $\delta \in \Delta_X$ 全体の集合を Δ_X^+ とし, $\Delta_X^- := -\Delta_X^+$ とおくと, 分解 $\Delta_X = \Delta_X^+ \cup \Delta_X^-$ が得られる. また, $\{\omega \in H^{1,1}(X)_{\mathbb{R}} \mid (\omega, \omega) > 0\}$ の 2 つの連結成分のうち, Kähler 錐 $\mathcal{K}_X$ を含む成分を $H^{1,1}(X)_{\mathbb{R},+}$ とおくと, $\mathcal{K}_X = \{\omega \in H^{1,1}(X)_{\mathbb{R},+} \mid (\omega, \delta) > 0 (\delta \in \Delta_X^+)\}$ と表される. $\mathcal{K}_X$ は Δ_X に付随する鏡映群の $H^{1,1}(X)_{\mathbb{R},+}$ への作用に関する基本領域である.

$\chi_w(t)$ が 22 次 Salem 多項式となる場合, $L_\sigma^{1,1} \cap L = \emptyset$ であるため, $w(\mathcal{K}) = \mathcal{K}$ となる成分 $\mathcal{K}$ の存在は自明である. 一方, $\chi_w(t)$ が 20 次以下の Salem 多項式を含む場合, $w(\mathcal{K}) = \mathcal{K}$ となる成分 $\mathcal{K}$ の存在は非自明である. McMullen は $\chi_w(t)$ が 10 次 Salem 多項式 $S_{\min}(t)$ を含み, $w(\mathcal{K}) = \mathcal{K}$ となる成分 $\mathcal{K}$ をもつ $w \in O(\Pi_{3,19})$ の存在をコンピュータを用いて示している.

定理 3.4 (McMullen [10, 11]) *Lehmer 数 $\lambda_{\min} > 0$ に対して, $h_{\text{top}}(f) = \log \lambda_{\min} > 0$ となる K3 曲面 X 上の双正則写像 $f \in \text{Aut}(X)$ が存在する.*

McMullen は論文 [10] において非射影的な K3 曲面 X 上の力学系 $f \in \text{Aut}(X)$ の存在を示し, 論文 [11] において射影的な K3 曲面 X 上の力学系 $f \in \text{Aut}(X)$ の存在を示している.

4. 有理曲面上の力学系

本節では, 有理曲面上の力学系について考察する ([9, 14, 15] 参照). 滑らかな射影曲面 X が有理曲面であるとは, X と射影平面 $\mathbb{P}^2$ が双有理同値であること, すなわち, 適当な射影曲面 Y と双有理射 $\psi : Y \rightarrow X$, $\pi : Y \rightarrow \mathbb{P}^2$ が存在することである:

$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ \psi \swarrow & & \searrow \pi \\ X & & \mathbb{P}^2. \end{array} \quad (1)$$

エントロピーが正となる双正則写像 $f \in \text{Aut}(X)$ が存在するとき, 有理曲面 X は次の形で特徴付けられる ([6, 12] 参照).

命題 4.1 有理曲面 X に対して, $\#\text{Im}\{\text{Aut}(X) \ni f \mapsto f^* \in O(H^2(X; \mathbb{Z}))\} = \infty$ を仮定する. このとき, (1) をみたす同型射 $\psi : Y \rightarrow X$ が存在する. すなわち, 双有理射 $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^2$ が存在し, $\mathbb{P}^2$ が X の相対的極小モデルとなる. 特に, $h_{\text{top}}(f) > 0$ となる $f \in \text{Aut}(X)$ が存在するとき, 双有理射 $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^2$ が存在する.

以下, 双有理射 $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^2$ が存在すると仮定する. 一般に, 双有理射 $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^2$ は,

$$\pi : X = X_N \xrightarrow{\pi_N} X_{N-1} \xrightarrow{\pi_{N-1}} \cdots \xrightarrow{\pi_1} X_0 = \mathbb{P}^2 \quad (2)$$

と 1 点ブローアップ $\pi_i : X_i \rightarrow X_{i-1}$ の合成で表される. ここで, $\pi_i : X_i \rightarrow X_{i-1}$ がブローアップであるとは, 曲線 $E_i^0 \cong \mathbb{P}^1 \subset X_i$ と 1 点 $p_i \in X_{i-1}$ が存在して, $\pi_i : X_i \setminus E_i^0 \xrightarrow{\cong} X_{i-1} \setminus \{p_i\}$ が同型となることである. 曲線 E_i^0 は例外曲線とよばれる. ブローアップの合成 (2) を固定すると, X のコホモロジー群は,

$$H^2(X; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[E_0] \oplus \mathbb{Z}[E_1] \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}[E_N]$$

と表される. ここで, E_0 は $\mathbb{P}^2$ 内の直線の π による全変換であり, $i = 1, \dots, N$ に対して, E_i は π_i の例外曲線 $E_i^0 \subset X_i$ の $\pi_{i+1} \circ \cdots \circ \pi_n$ による全変換である. さらに, $[D]$ は D の線形同値類を表す. また, コホモロジー群 $H^2(X; \mathbb{Z})$ 上の交叉形式は次の形で与えられる:

$$([E_i], [E_j]) = \begin{cases} 1 & (i = j = 0), \\ -1 & (i = j = 1, \dots, N), \\ 0 & (i \neq j). \end{cases}$$

これに基づいて, Lorentz 格子を導入する. Lorentz 格子 $\mathbb{Z}^{1,N}$ とは, 次で定義される Lorentz 内積をもった格子である:

$$\mathbb{Z}^{1,N} = \bigoplus_{i=0}^N \mathbb{Z} \cdot e_i, \quad (e_i, e_j) = \begin{cases} 1 & (i = j = 0), \\ -1 & (i = j = 1, \dots, N), \\ 0 & (i \neq j). \end{cases}$$

すると, 同型写像 (マーキング)

$$\phi : \mathbb{Z}^{1,N} \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z}), \quad \phi(e_i) = [E_i] \quad (i = 0, 1, \dots, N)$$

が定まる. マーキング ϕ は分解 (2) の取り方に依存することに注意する.

さらに, Lorentz 格子に作用する Weyl 群を定義する. Weyl 群 $W_N \subset O(\mathbb{Z}^{1,N})$ とは, $(\rho_i)_{i=0}^{N-1}$ によって生成される群である. ただし, $\rho_i : \mathbb{Z}^{1,N} \rightarrow \mathbb{Z}^{1,N}$ は次で定義される鏡映変換である:

$$\rho_i(x) = x + (x, \alpha_i) \cdot \alpha_i, \quad \alpha_i := \begin{cases} e_0 - e_1 - e_2 - e_3 & (i = 0), \\ e_i - e_{i+1} & (i = 1, \dots, N-1). \end{cases}$$

次の命題により, Weyl 群 W_N が重要な役割を果たすことになる (see [13]).

命題 4.2 双正則写像 $f \in \text{Aut}(X)$ に対して, Weyl 群 W_N の元 $w \in W_N$ が唯一存在して, 次の可換図式をみたす:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^{1,N} & \xrightarrow{w} & \mathbb{Z}^{1,N} \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi \\ H^2(X, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{f^*} & H^2(X; \mathbb{Z}). \end{array}$$

このとき, w は f により実現されるという.

写像 $f \in \text{Aut}(X)$ が $w \in W_N$ を実現するとき, f のエントロピーは, $h_{\text{top}}(f) = \log \lambda(w)$ と表される.

$$\Lambda := \{\lambda(w) \geq 1 \mid w \in W_N, N \in \mathbb{N}\}$$

とおくと, 次の命題が成立する.

命題 4.3 有理曲面 X 上の双正則写像 $f \in \text{Aut}(X)$ のエントロピーは, ある元 $\lambda \in \Lambda$ を用いて $h_{\text{top}}(f) = \log \lambda$ と表される.

ここで興味があるのは逆の問題である. すなわち, 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して, 有理曲面 X 上の双正則写像 $f \in \text{Aut}(X)$ で $h_{\text{top}}(f) = \log \lambda$ となるものは存在するか? この問題は肯定的である:

定理 4.4 ([14, 15]) 任意の元 $\lambda \in \Lambda$ に対して, $h_{\text{top}}(f) = \log \lambda$ となる有理曲面 X 上の双正則写像 $f \in \text{Aut}(X)$ が存在する. 特に,

$$\{h_{\text{top}}(f) \mid X : \text{有理曲面}, f \in \text{Aut}(X)\} = \{\log \lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$$

が成立する.

ここで, $w = \rho_0 \rho_1 \cdots \rho_9 \in W_{10}$ とおくと, $\lambda(w) = \lambda_{\min}$ となる. 特に, $h_{\text{top}}(f) = \log \lambda_{\min} > 0$ となる有理曲面上の双正則写像 $f \in \text{Aut}(X)$ が存在する ([2, 9] 参照).

定理 4.4 における力学系の構成には尖点反標準曲線を用いる ([14, 15] 参照). 既約な曲線 $Y \subset X$ が尖点反標準曲線であるとは, Y は反標準曲線, つまり, $[Y] = 3[E_0] - [E_1] - \cdots - [E_N]$ であり, Y は唯一の特異点をもちその特異点が尖点となることである. 尖点反標準曲線 Y における滑らかな点全体の集合 Y_{reg} は複素平面 $\mathbb{C}$ と同型になることが知られている. 尖点反標準曲線 Y を保つ双有理写像

$$\text{Bir}(X, Y) := \{g : X \dashrightarrow X \mid g : \text{双有理写像}, I(g^{\pm 1}) \subset Y_{\text{reg}}, g(Y) := \overline{g(Y \setminus I(g))} = Y\}$$

を考えて, $\text{Aut}(X, Y) := \text{Aut}(X) \cap \text{Bir}(X, Y)$ とおく. ただし, $I(g), I(g^{-1})$ はそれぞれ g, g^{-1} の不確定点集合である. 双有理写像 $g \in \text{Bir}(X, Y)$ に対して, 同型 $Y_{\text{reg}} \cong \mathbb{C}$ を固定すると, $g|_{Y_{\text{reg}}} : Y_{\text{reg}} \rightarrow Y_{\text{reg}}$ は $\delta(g) \in \mathbb{C}^\times$ と $k(g) \in \mathbb{C}$ を用いて $g|_{Y_{\text{reg}}} : \mathbb{C} \ni t \mapsto \delta(g) \cdot t + k(g) \in \mathbb{C}$ と表現される. 特に $\delta(g) \in \mathbb{C}^\times$ は同型 $Y_{\text{reg}} \cong \mathbb{C}$ に依らない定数で, g のディターミナントとよばれる. ディターミナントとよぶ所以は, Y 上で 1 位の極をもち他で零や極をもたない有理型 $(2, 0)$ -形式 η を用いて, 関係式

$$g^* \eta = \delta(g) \cdot \eta$$

が成立するためである (Y は反標準曲線であることに注意).

今, 尖点を $\text{cusp} = [0 : 1 : 0]$ にもつ尖点 3 次曲線 $C = \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2 \mid yz^2 = x^3\}$ を考えると, C は $\mathbb{P}^2$ 上の尖点反標準曲線となる. 同型 $p : \mathbb{C} \rightarrow C_{\text{reg}} = C \setminus \{\text{cusp}\}$ を $p(t) = [t : t^3 : 1]$ で与えておく.

命題 4.5 X を有理曲面, Y を X 上の尖点反標準曲線, $f \in \text{Aut}(X, Y)$ を $h_{\text{top}}(f) > 0$ となる双正則写像とする. このとき, $\delta(f)$ は $f^* : H^2(X) \rightarrow H^2(X)$ の固有値となる. また, $\sum_{i=0}^N v_i \cdot [E_i] \in H^2(X; \mathbb{C})$ を f^* の $\delta(f)$ に対応する固有ベクトルとすると, 合成 (2) で与えられる双有理射 $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^2$ が存在して, ブローアップされる点 $\{p_i\}_{i=1}^N$ は

$$p_i = p(v_i + \frac{1}{3}v_0) \in C_{\text{reg}}$$

で与えられる. さらに, Y は π による C の固有変換となる.

定理 4.4 における有理曲面 X と写像 $f \in \text{Aut}(X)$ は尖点反標準曲線 $Y \subset X$ を保つ写像 $f \in \text{Aut}(X, Y)$ によって実現される, つまり, 次の関係式が成立する:

$$\{h_{\text{top}}(f) \mid X : \text{有理曲面}, Y \subset X : \text{尖点反標準曲線}, f \in \text{Aut}(X, Y)\} = \{\log \lambda \mid \lambda \in \Lambda\}. \quad (3)$$

写像 $f \in \text{Aut}(X, Y)$ を構成するため, $\lambda(w) > 1$ となる $w \in W_N$ を固定して, δ を Salem 多項式 $S_w(t) = 0$ の根, $v = \sum_{i=0}^N v_i \cdot e_i \in \mathbb{Z}^{1, N} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ を δ に対応する w の固有ベクトルとする. 命題 4.5 により, ブローアップされる点の配置は w の固有ベクトルを用いて記述されるため, $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^2$ を N 点 $\{p(v_i + \frac{1}{3}v_0)\}_{i=1}^N \subset C_{\text{reg}}$ のブローアップとして, $Y \subset X$ を π による C の固有変換とする. w がある条件 (*) をみたせば, 双有理写像 $g \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2, C)$ が存在して, w は $f := \pi^{-1} \circ g \circ \pi \in \text{Aut}(X, Y)$ により実現され, $\delta(f) = \delta(g) = \delta$ となる. 特に, $h_{\text{top}}(f) = \log \lambda(w) > 0$ となる. また, w が条件 (*) をみたさない場合にも,

$\lambda(\tilde{w}) = \lambda(w)$ かつ条件 (*) をみたす $\tilde{w} \in W_N$ が存在することが示される. 従って, 関係式 (3) が成立することになる.

ここで, 上記の写像 g を構成するためには g の不確定点の推移を制御する必要がある. 不確定点を制御するには δ が 1 の根では難しく, Salem 多項式の根とした方が都合がよい. つまり, 有限位数の写像に対して本構成方法の適用は困難であり, 正エントロピーをもつ写像の構成に対して本構成方法が有効となるのである.

参考文献

- [1] E. Bayer-Fluckiger and L. Taelman, *Automorphisms of even unimodular lattices and equivariant Witt groups*, To appear in J. Eur. Math. Soc. arXiv:1708.05540v4 [math.NT] 7 Aug 2018, 21 pages.
- [2] E. Bedford and K. Kim, *Dynamics of rational surface automorphisms: linear fractional recurrences*, J. Geom. Anal. **19** (2009), no. 3, 553–583.
- [3] S. Cantat, *Dynamique des automorphismes des surfaces projectives complexes*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **328** (1999), no. 10, 901–906.
- [4] J. Diller and C. Favre *Dynamics of bimeromorphic maps of surfaces*, Amer. J. Math. **123** (2001), 1135–1169.
- [5] M. Gromov, *On the entropy of holomorphic maps*, Enseign. Math. (2) **49** (2003), no. 3-4, 217–235.
- [6] B. Harbourne, *Rational surfaces with infinite automorphism group and no antipluri-canonical curve*, Proc. Amer. Math. Soc. **99** (1987), no. 3, 409–414.
- [7] 金銅誠之, *K3曲面*, 共立出版, 2015.
- [8] C. McMullen, *Coxeter groups, Salem numbers and the Hilbert metric*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **95** (2002), 151–183.
- [9] C. McMullen, *Dynamics on blowups of the projective plane*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **105** (2007), 49–89.
- [10] C. McMullen, *K3 surfaces, entropy and glue*, J. Reine Angew. Math. **658** (2011), 1–25.
- [11] C. McMullen, *Automorphisms of projective K3 surfaces with minimum entropy*, Invent. Math. **203** (2016), 179–215.
- [12] M. Nagata, *On rational surfaces. I. Irreducible curves of arithmetic genus 0 or 1*, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto Ser. A Math. **32** (1960), 351–370.
- [13] M. Nagata, *On rational surfaces. II*, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto Ser. A Math. **33** (1961), 271–293.
- [14] T. Uehara, *Rational surface automorphisms with positive entropy*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **66** (2016), 377–432.
- [15] T. Uehara, *Rational surface automorphisms preserving cuspidal anticanonical curves*, Math. Ann. **365** (2016), 635–659.
- [16] Y. Yomdin, *Volume growth and entropy*, Israel J. Math. **57** (1987), no. 3, 285–300.