特別講演

リサージェント函数と合成積

神本　晋吾　(広島大学)*

1. リサージェンス理論とは？

リサージェンス理論は, J. Écalle 氏によるリサージェント函数に関する研究 [7] から始まった. ここでは, エイリアン微分やムールド解析などの, 発散級数の扱いや, Stokes 現象の解析に有効な手法が考案された. その後, リサージェンス理論は, 微分方程式の解析 ([8], [4], [5]) やベクトル場の解析 ([19], [23]), 完全WKB解析 ([6], [1], [15], [16]), 多重ゼータ値 ([26], [27]) などに応用され, 近年では, 数理物理学への有効性 ([18], [20], [11]) や, Connes-Kreimer Hopf 代数 ([3]) との関係性 ([9], [10]) からも, 活発に研究が行われている. リサージェンス理論では, 発散級数の扱いが重要となるが, ここでは Borel 総和法に基づいて解析を行う.

定義 1.1 形式的 Borel 変換 $\mathcal{B} : \mathbb{C}[[x]] \to \mathbb{C}\,\delta \oplus \mathbb{C}[[\xi]]$ を

$$\mathcal{B} : \varphi(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j x^j \mapsto \varphi_0 \delta + \hat{\varphi}(\xi), \quad \hat{\varphi}(\xi) := \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j \frac{\xi^{j-1}}{(j-1)!}$$

で定義する. また, $\hat{\varphi}(\xi)$ が $\xi = 0$ の近傍で収束し,

$$S(d,\alpha) := \{\xi \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid |\arg \xi - d| < \alpha\} \quad (d \in \mathbb{R}, \alpha > 0)$$

に解析接続され, $S(d,\alpha)$ 上 $|\hat{\varphi}(\xi)| \leq Ce^{h|\xi|}$ が成立するとき, $\varphi(x)$ は d 方向に Borel 総和可能であるといい, その Borel 和 $\mathcal{S}^d(\varphi)(\xi)$ を Laplace 変換 $\mathcal{L}^d$ を用いて

$$\mathcal{S}^d(\varphi)(\xi) := \varphi_0 + \mathcal{L}^d(\hat{\varphi})(x), \quad \mathcal{L}^d(\hat{\varphi})(x) := \int_0^{\infty} \hat{\varphi}(\xi) e^{-\xi/x} d\xi$$

により定義する.

この Borel 和 $\mathcal{S}^d(\varphi)(\xi)$ は, d 方向を中心とし, $\xi = 0$ を頂点とするある角領域上で, $\varphi(x)$ に漸近展開されるような解析函数を定める. これにより, 形式級数に対し解析的な実体を与えることができる.

$$\begin{tikzcd} \boxed{\text{解析函数}} \arrow[r, bend left, "\text{漸近展開}"] & \boxed{\text{形式級数}} \arrow[l, dashed, bend left, "\text{Borel 和}"] \end{tikzcd}$$

本研究は科研費 (課題番号:JP18K13427) の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: 34M30, 34M25, 34M40
キーワード：リサージェント函数, 合成積, Borel 総和法, Stokes 現象
* 〒739-8526 広島県東広島市鏡山 1-3-1　広島大学大学院理学研究科数学専攻
e-mail: kamimoto@hiroshima-u.ac.jp

しかしながら, この対応は考えている方向 d に依存し, 一般に Borel 和により定まる解析函数が, 不連続的に変化する方向が存在する．このような, 形式的な対象と解析的な対象の対応が, 不連続的に変化する現象を Stokes 現象と呼ぶ. (収束級数に対しては, この対応は, 解析函数の $\xi = 0$ を中心とする Taylor 展開を考えていることに他ならないため, 当然ながら, Stokes 現象は起こらない.) Stokes 現象は, 例えば, 微分方程式の特異点における, 形式的構造と解析的構造との差異として現れ, 特異点の構造を知る上で重要となる. 数理物理学的には, これは摂動的構造と非摂動的構造の差と言うこともできる．リサージェンス理論は, これらの構造の差を補う理論として, 今注目されている ([12]).

リサージェンス理論では, Stokes 現象の構造は, Borel 変換により Borel 平面上での $\hat{\varphi}(\xi)$ の持つ特異点の構造へと翻訳される．このような特異点の構造を表現するため, [7] では, 次のどこまでも解析接続可能な函数の概念が導入された．ここでは, より明瞭な [2] の定義を採用する：

定義 1.2 Π を $\gamma(0) = 0$ を満たす, Lipschitz 連続な曲線 $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ のなす集合とする．このとき, 収束級数 $\hat{\varphi}(\xi) \in \mathbb{C}\{\xi\}$ がどこまででも解析接続可能であるとは, 任意の $L > 0$ に対し, ある有限集合 $F_L \subset \mathbb{C}$ が存在し, $\hat{\varphi}(\xi)$ により定まる $\xi = 0$ での解析函数が長さが L 以下の $\gamma\big((0,1]\big) \subset \mathbb{C} \setminus F_L$ を満たす任意の $\gamma \in \Pi$ に沿って解析接続可能であることである．どこまででも解析接続可能な函数のなす空間を $\hat{\mathscr{R}}$ により表す.

このとき, リサージェント函数は次で定義される：

定義 1.3 形式級数 $\varphi(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ の形式的 Borel 変換 $\hat{\varphi}(\xi)$ が $\xi = 0$ の近傍で収束し, どこまででも解析接続可能であるとき, $\varphi(x)$ はリサージェントであるという．リサージェント函数のなす空間を $\mathscr{R}$ により表す.

しかしながら, 定義 1.2 が示すように, リサージェント函数の Borel 平面上の特異点の構造は, 極めて複雑なものとなり, 一般には Borel 平面上に稠密に特異点が現れ得る. 本講演では, 次の非線形微分方程式

$$x^2 \frac{d\varphi}{dx} = F(x, \varphi) \tag{1}$$

の特異点 $x = 0$ での形式級数解 $\varphi(x) \in \mathbb{C}^n[[x]]$ のリサージェンス構造の解明に焦点を合わせたい．ただし, $F(x, \varphi) \in \mathbb{C}^n\{x, \varphi\}$ は $F(0,0) = 0$, $\det\big(\partial_\varphi F(0,0)\big) \neq 0$ を満たすとする．この方程式の解析を行う前に, まずリサージェント函数の函数概念の吟味から行いたい.

2. 離散的フィルター付き集合

定義 1.2 で, どこまでも解析接続可能な函数を定義したが, この定義では函数空間が広すぎて, 実際の問題には扱い難い. 例えば, $\hat{\varphi}(\xi) \in \hat{\mathscr{R}}$ の特異点の位置の情報は有限集合族 $\{F_L\}_{L \geq 0}$ に現れているが, この部分を明確にすることにより, より精密な函数空間を構成したい. そのために, 次の離散的フィルター付き集合の概念を導入する.

定義 2.1 $\mathbb{C}$ の部分集合族 $\Omega = (\Omega_L)_{L \geq 0}$ は, 以下の条件を満たすとき, 離散的フィルター付き集合であると言う.

i) Ω_L $(L \geq 0)$ は有限集合,

ii) $\Omega_{L_1} \subseteq \Omega_{L_2}$ が任意の $L_1 \leq L_2$ に対し成立する,

iii) ある $\delta > 0$ が存在し, $\Omega_\delta = \emptyset$.

ここで, 以下の記号を導入する.

– $\gamma \in \Pi$ の $[0,t]$ $(0 \leq t \leq 1)$ への制限を $\gamma_{|t}$ とし, その長さを $L(\gamma_{|t})$ とする.

– 離散的フィルター付き集合 Ω に対し,

$$\mathcal{S}_\Omega := \big\{(\lambda,\omega) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{C} \mid \omega \in \Omega_\lambda\big\}, \qquad \mathcal{M}_\Omega := \big(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{C}\big) \setminus \overline{\mathcal{S}}_\Omega$$

とする. ただし, $\mathbb{R}_{\geq 0} := \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda \geq 0\}$ とし, $\overline{\mathcal{S}}_\Omega$ は $\mathcal{S}_\Omega$ の $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{C}$ における閉包とする.

このとき, 離散的フィルター付き集合 Ω に対し, 以下を定義する.

定義 2.2 曲線 $\gamma \in \Pi$ が Ω-適合であるとは, 任意の $t \in [0,1]$ に対し

$$\tilde{\gamma}(t) := \big(L(\gamma_{|t}), \gamma(t)\big) \in \mathcal{M}_\Omega$$

が成立することである. Ω-適合な曲線のなす集合を Π_Ω により表す.

定義 2.3 収束級数 $\hat{\varphi}(\xi) \in \mathbb{C}\{\xi\}$ が Ω-接続可能であるとは, $\hat{\varphi}(\xi)$ により定まる $\xi = 0$ での解析函数が, 任意の $\gamma \in \Pi_\Omega$ に沿って解析接続可能であることである. Ω-接続可能な函数のなす空間を $\hat{\mathscr{R}}_\Omega$ により表す.

定義 2.4 形式級数 $\varphi(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ の形式的 Borel 変換 $\hat{\varphi}(\xi)$ が $\xi = 0$ の近傍で収束し, Ω-接続可能であるとき, $\varphi(x)$ は Ω-リサージェントであるという. Ω-リサージェント函数のなす空間を $\mathscr{R}_\Omega$ により表す.

定義から, 次の同型が成立する.

$$\mathcal{B} : \mathscr{R}_\Omega \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}\,\delta \oplus \hat{\mathscr{R}}_\Omega. \tag{2}$$

例 2.5 Σ を $\mathbb{C}$ の $0 \notin \Sigma$ となる離散的閉集合とする. この Σ に対し, 離散的フィルター付き集合 $\Omega(\Sigma) = (\Omega(\Sigma)_L)_{L \geq 0}$ を

$$\Omega(\Sigma)_L := \{\omega \in \Sigma \mid |\omega| \leq L\}$$

により定義する. このとき, $\gamma \in \Pi$ が $\Omega(\Sigma)$-適合であることと, $\gamma([0,1]) \subset \mathbb{C} \setminus \Sigma$ となることは同値となる. よって, $\hat{\varphi}(\xi) \in \mathbb{C}\{\xi\}$ が $\Omega(\Sigma)$-接続可能であることと, $\mathbb{C} \setminus \Sigma$ の普遍被覆空間 $X_{\Omega(\Sigma)}$ に解析接続可能であることとは同値となる. つまり, 次の同型が成立する.

$$\hat{\mathscr{R}}_{\Omega(\Sigma)} \xrightarrow{\sim} \Gamma\big(X_{\Omega(\Sigma)}; \mathscr{O}_{X_{\Omega(\Sigma)}}\big). \tag{3}$$

ただし, $\mathscr{O}_{X_{\Omega(\Sigma)}}$ は $X_{\Omega(\Sigma)}$ 上の正則函数のなす層とする. 特に, $\Sigma = \emptyset$ として次の同型が得られる.

$$\hat{\mathscr{R}}_{\Omega(\emptyset)} \xrightarrow{\sim} \Gamma\big(\mathbb{C}; \mathscr{O}_\mathbb{C}\big).$$

さて, このΩ-リサージェント函数のなす空間$\mathscr{R}_\Omega$の上で解析的な議論を行いたい. そのためには, $\mathscr{R}_\Omega$上に位相が必要となる. 例2.5のように, 離散的閉集合Σから定まる離散的フィルター付き集合$\Omega(\Sigma)$の場合には, (3)の表示を用いて, $X_{\Omega(\Sigma)}$のコンパクト集合Kにより定まるセミノルム

$$\|\hat{\varphi}\|_K := \sup_{\underline{\xi}\in K} |\hat{\varphi}(\underline{\xi})| \quad \big(\hat{\varphi}(\xi) \in \hat{\mathscr{R}}_{\Omega(\Sigma)}\big) \tag{4}$$

により, $\hat{\mathscr{R}}_{\Omega(\Sigma)}$に Fréchet 空間の構造が定まり, (2)の同型により$\mathscr{R}_{\Omega(\Sigma)}$上にも同様の構造が定まる. しかしながら, 一般の離散的フィルター付き集合Ωに対しては, (3)のような表示は明らかではない. 一般のΩに対しても, (3)と類似の表示を求めるために, 以下の概念を導入する.

定義 2.6 Xを連結なリーマン面, $\underline{0}$をX上の点, $\mathfrak{p}: X \to \mathbb{C}$を$\mathfrak{p}(\underline{0}) = 0$を満たす局所双正則写像とする. このとき, 任意の$\gamma \in \Pi_\Omega$に対し, $\mathfrak{p}\circ\underline{\gamma} = \gamma$となる曲線$\underline{\gamma}: [0,1] \to X$で, $\underline{\gamma}(0) = \underline{0}$となるものが存在するとき, $(X, \mathfrak{p}, \underline{0})$は$\Omega$-無限 Riemann 面であると言う. また, Ω-無限 Riemann 面の射$\mathfrak{q}: (X, \mathfrak{p}, \underline{0}) \to (X', \mathfrak{p}', \underline{0}')$とは, 局所双正則写像$\mathfrak{q}: X \to X'$で, 次の図式が可換となるもののことである.

$$\begin{tikzcd} (X,\underline{0}) \arrow[rr, "\mathfrak{q}"] \arrow[dr, "\mathfrak{p}"'] & & (X',\underline{0}') \arrow[dl, "\mathfrak{p}'"] \\ & (\mathbb{C},0) & \end{tikzcd}$$

このようなΩ-無限 Riemann 面の圏の中でも, 次の始対象の存在が重要となる.

定理 2.7 ([17]) 単連結な Ω-無限 Riemann 面 $(X_\Omega, \mathfrak{p}_\Omega, \underline{0}_\Omega)$ が存在し, 任意の Ω-無限 Riemann 面$(X, \mathfrak{p}, \underline{0})$に対し, 射$\mathfrak{q}: (X_\Omega, \mathfrak{p}_\Omega, \underline{0}_\Omega) \to (X, \mathfrak{p}, \underline{0})$ が一意的に存在する.

これは, この$(X_\Omega, \mathfrak{p}_\Omega, \underline{0}_\Omega)$が, Ω-無限 Riemann 面の中で, 最も細かなシート構造を持っていることを示している. 例えば, 例2.5のように, 離散的閉集合Σから定まる離散的フィルター付き集合$\Omega(\Sigma)$の場合には, $X_{\Omega(\Sigma)}$は$\mathbb{C}\setminus\Sigma$の普遍被覆空間と一致する. この$(X_\Omega, \mathfrak{p}_\Omega, \underline{0}_\Omega)$を用いると, (3)の表示の拡張として, 次が成立する.

命題 2.8 ([17]) 任意の離散的フィルター付き集合Ωに対し, 次が成立する.

$$\mathfrak{p}_\Omega^* : \hat{\mathscr{R}}_\Omega \xrightarrow{\sim} \Gamma(X_\Omega, \mathscr{O}_{X_\Omega}). \tag{5}$$

この表示から, 例2.5の場合と同様に, X_Ωのコンパクト集合により定まるセミノルム

$$\|\hat{\varphi}\|_K := \sup_{\underline{\xi}\in K} |\mathfrak{p}_\Omega^*\hat{\varphi}(\underline{\xi})| \quad \big(\hat{\varphi}(\xi) \in \hat{\mathscr{R}}_\Omega\big) \tag{6}$$

により, $\hat{\mathscr{R}}_\Omega$, $\mathscr{R}_\Omega$に Fréchet 空間の構造が定まる.

以上により, 函数空間の設定が成された. 最後に, 異なる離散的フィルター付き集合に対する函数空間の比較を行いたい. まず, 離散的フィルター付き集合の間に, 次のように半順序$\subset$を定める. 離散的フィルター付き集合Ω, Ω'が, 任意の$L \geq 0$に対し$\Omega_L \subset \Omega'_L$を満たすとき, $\Omega \subset \Omega'$と表す. このとき, 定義から, 以下の関係式が直ちに従う.

$$\Pi_{\Omega'} \subset \Pi_\Omega, \quad \hat{\mathscr{R}}_\Omega \subset \hat{\mathscr{R}}_{\Omega'}, \quad \mathscr{R}_\Omega \subset \mathscr{R}_{\Omega'}.$$

また, このとき Ω-無限 Riemann 面 $(X_\Omega, \mathfrak{p}_\Omega, \underline{0}_\Omega)$ は Ω'-無限となるので, 定理2.7より, 次の Ω'-無限 Riemann 面の射が存在する.

$$\mathfrak{q}^{\Omega}_{\Omega'} : (X_{\Omega'}, \mathfrak{p}_{\Omega'}, \underline{0}_{\Omega'}) \to (X_\Omega, \mathfrak{p}_\Omega, \underline{0}_\Omega).$$

また, どこまででも解析接続可能な函数の空間と, リサージェント函数の空間に関しては, 次が成立する.

定理 2.9 ([17]) 任意の $\hat{\varphi}(\xi) \in \hat{\mathscr{R}}$ に対し, ある離散的フィルター付き集合 Ω が存在し, $\hat{\varphi}(\xi) \in \hat{\mathscr{R}}_\Omega$ となる. よって, 次が成立する.

$$\hat{\mathscr{R}} = \bigcup_{\Omega} \hat{\mathscr{R}}_\Omega, \quad \mathscr{R} = \bigcup_{\Omega} \mathscr{R}_\Omega.$$

ただし, 和は全ての離散的フィルター付き集合に関して取られている.

3. リサージェント函数と合成積

次に, リサージェント函数の空間の積構造に関して考察したい. まず, 形式べき級数環 $\mathbb{C}[[x]]$ の積は, Borel 変換を通して, 次の合成積へと変換されることに注意する.

$$\mathcal{B}(\varphi\psi) = (\varphi_0\delta + \hat{\varphi}) * (\psi_0\delta + \hat{\psi}). \tag{7}$$

ただし, $\delta * \delta = \delta$, $\delta * \hat{\varphi} = \hat{\varphi} * \delta = \hat{\varphi}$ とし, $\hat{\varphi}(\xi), \hat{\psi}(\xi) \in \mathbb{C}\{\xi\}$ となるとき, その合成積 $\hat{\varphi} * \hat{\psi}$ は,

$$\hat{\varphi} * \hat{\psi}(\xi) = \int_0^\xi \hat{\varphi}(\xi - \xi')\hat{\psi}(\xi')d\xi' \tag{8}$$

と表される. すると, この $\hat{\varphi} * \hat{\psi}$ の特異点の構造は, $\hat{\varphi}$, $\hat{\psi}$ の特異点の構造から, どのように決定されるのかを知ることは, Borel 平面上での解析を行う上で重要となる. まず, 次の例を考えてみたい.

例 3.1 $\omega_1, \omega_2 \neq 0$ に対し, $\hat{\varphi}(\xi) = (\xi - \omega_1)^{-1}$, $\hat{\psi}(\xi) = (\xi - \omega_2)^{-1}$ とする. このとき, 合成積の定義から,

$$\hat{\varphi} * \hat{\psi}(\xi) = \int_0^\xi \frac{1}{\xi - \xi' - \omega_1}\frac{1}{\xi' - \omega_2}d\xi' = \frac{1}{\xi - \omega_1 - \omega_2}\Big(\int_0^\xi \frac{d\xi'}{\xi' - \omega_1} + \int_0^\xi \frac{d\xi'}{\xi' - \omega_2}\Big).$$

この2番目の表示から, $\hat{\varphi} * \hat{\psi}(\xi)$ は $\xi = \omega_1, \omega_2, \omega_1 + \omega_2$ に特異点を持つことがわかる. しかし, $\arg\omega_1 \neq \arg\omega_2$ となるとき, $\xi = 0$ と $\xi = \omega_1 + \omega_2$ を結ぶ線分上で $\hat{\varphi}$, $\hat{\psi}(\xi)$ は正則なため, 1番目の表示から, この線分の近傍上, 特に $\xi = \omega_1 + \omega_2$ で正則となる.

例3.1が示すように, 有理函数の合成積により定まる函数の特異点の構造も, そこまで単純ではない. 例えば, $\hat{\varphi}_j(\xi) = (\xi - \omega_j)^{-1}$ $(j = 1, \cdots, 4)$ から合成積を繰り返すことにより得られる函数族 $\hat{\varphi}_1^{*k_1} * \cdots * \hat{\varphi}_4^{*k_4}$ $(k_1, \cdots, k_4 \geq 0)$ の特異点集合は, 一般に $\mathbb{C}$ 上では稠密となってしまう. しかしながら, このような特異点の構造は, 離散的フィルター付き集合を用いることにより上手く捉えることができる. 実際, 例3.1の, 「直線に沿って $\xi = \omega_1 + \omega_2$ まで解析接続しても特異点は現れないが, $\xi = \omega_1$, または ω_2 を迂回して解析接続していくと $\xi = \omega_1 + \omega_2$ に特異点が現れる」という, 解析接続する曲線の長さに応じて特異点が増えてくる構造が, 特異点集合のフィルター構造に対応している. 更に, どこまででも解析接続可能な函数の合成積の特異点の構造を記述するために, 離散的フィルター付き集合の積を次で定義する.

定義 3.2 Ω, Ω' を離散的フィルター付き集合とする．このとき, Ω と Ω' の積 $\Omega * \Omega' = \big((\Omega * \Omega')_L\big)_{L \geq 0}$ を

$$(\Omega * \Omega')_L := \{\, \omega_1 + \omega_2 \mid \omega_1 \in \Omega_{L_1}, \omega_2 \in \Omega'_{L_2}, L_1 + L_2 = L \,\} \cup \Omega_L \cup \Omega'_L$$

により定義する．また, $\Omega^{*n} := \underbrace{\Omega * \cdots * \Omega}_{n\text{回}}$ とし, $\Omega^{*\infty} := \varinjlim_{n} \Omega^{*n}$ とする．

上の定義から, $m \leq n$ に対し $\Omega^{*m} \subset \Omega^{*n} \subset \Omega^{*\infty}$ が直ちに従う．この積を用いると, 例えば, 例3.1では $\hat{\varphi} \in \hat{\mathscr{R}}_{\Omega(\{\omega_1\})}$, $\hat{\psi} \in \hat{\mathscr{R}}_{\Omega(\{\omega_2\})}$ だが, 合成積は $\hat{\varphi} * \hat{\psi} \in \hat{\mathscr{R}}_{\Omega(\{\omega_1\}) * \Omega(\{\omega_2\})}$ となることがわかる．一般には次が成立する．

定理 3.3 ([24], [21], [22]) Ω, Ω' を離散的フィルター付き集合とし, $\hat{\varphi} \in \hat{\mathscr{R}}_{\Omega}$, $\hat{\psi} \in \hat{\mathscr{R}}_{\Omega'}$ とする．このとき, $\hat{\varphi} * \hat{\psi} \in \hat{\mathscr{R}}_{\Omega * \Omega'}$ となる．

4. 微分方程式への応用

微分方程式(1)の解析に移りたい．そのためには, 合成積に関する良い評価が必要となってくる．これに関して, まず次が成立する．

定理 4.1 ([25], [17]) Ω を離散的フィルター付き集合とする．このとき, 任意の $X_{\Omega^{*\infty}}$ のコンパクト集合 K に対し, ある X_{Ω} のコンパクト集合 K' と定数 $c > 0$ が存在し, 任意の $n \geq 1$ と $\hat{\varphi}_1(\xi), \cdots, \hat{\varphi}_n(\xi) \in \hat{\mathscr{R}}_{\Omega}$ に対し, $\hat{\varphi}_1 * \cdots * \hat{\varphi}_n \in \hat{\mathscr{R}}_{\Omega^{*n}} \big(\subset \hat{\mathscr{R}}_{\Omega^{*\infty}}\big)$ は, 次の評価を満たす．

$$\big\| \hat{\varphi}_1 * \cdots * \hat{\varphi}_n \big\|_K \leq \frac{c^n}{n!} \big\| \hat{\varphi}_1 \big\|_{K'} \cdots \big\| \hat{\varphi}_n \big\|_{K'}. \tag{9}$$

[17]では, $X_{\Omega^{*\infty}}$ を被覆する, あるコンパクト集合の族に対し, c と K' のより明確な表示が与えられている．例えば, この評価を用いることにより次を示すことができる．

定理 4.2 ([25], [17]) $\varphi \in \mathscr{R}_{\Omega}$ は $\varphi_0 = 0$ を満たすとする．このとき, $F(y) \in \mathbb{C}\{y\}$ に対し $F(\varphi) \in \mathscr{R}_{\Omega^{*\infty}}$ が成立する．

しかし, (1)の形式級数解のリサージェンス構造を解析するためには, 以下の定義4.5のように定まる, 根付き木により定まる反復合成積の評価が必要となってくる．

定義 4.3 $T = (V, E)$ を有限な有向木とする．ただし, V は T の節の集合, E を T の枝の集合とする．このとき, 各節 $v \in V$ から出る枝が高々一つならば, T を根付き木と呼ぶ．根付き木のなす集合を $\mathcal{T}$ により表す．

このとき, 根付き木の根, 葉を次で定義する．

定義 4.4 T を根付き木とする．T の根 $\hat{v}$ とは, 任意の $v \in V$ に対し $v \to \cdots \to \hat{v}$ となる T の道が存在するような節のことである．また, $v \in V$ が T の葉であるとは, v に入る枝が存在しないような節のことである．

また, $\mathcal{T}$ は, 節の数に応じて次のように分解される．

$$\mathscr{T} = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} \mathscr{T}_k, \quad \mathscr{T}_k = \{T = (V, E) \in \mathscr{T} \mid |V| = k\}.$$

$v \in V$ に対し V_v^1 を, $u \xrightarrow{e} v$ となる枝 $e \in E$ を持つ節 $u \in V$ の集合とし, $d(v) := |V_v^1|$ とする．このとき, 根付き木により定まる反復合成積を次で定義する．

定義 4.5 $T=(V,E)$ を根付き木とする．各節 $v\in V$ に対し, 収束級数 $\hat{f}_v, \hat{\varphi}_v \in \mathbb{C}\{\xi\}$ が与えられているとする．このとき, 次の手順により, T の葉から帰納的に $\{\hat{\psi}_v\}_{v\in V}$ を定める．

$$\hat{\psi}_v := \hat{\varphi}_v \cdot \hat{f}_v \quad (v\in L), \qquad \hat{\psi}_v := \hat{\varphi}_v \cdot \Big(\hat{f}_v * \prod_{u\in V_v^1}^{*} \hat{\psi}_u\Big) \quad (v \in V\setminus L). \tag{10}$$

ただし, $\displaystyle\prod_{u\in V_v^1}^{*}\hat{\psi}_u$ は $u\in V_v^1$ となる $\hat{\psi}_u$ 達の合成積とする． このとき, $\hat{\psi}_T := \hat{\psi}_{\hat{v}}$ を $\big(T\,;\{\hat{f}_v\}_{v\in V},\{\hat{\varphi}_v\}_{v\in V}\big)$ から定まる反復合成積と呼ぶ.

このとき, 定理4.1の拡張として, 次が成立する.

定理 4.6 ([13], [14]) Ω を離散的フィルター付き集合とする．このとき, 任意の $X_{\Omega^{*\infty}}$ のコンパクト集合 K に対し, ある X_Ω のコンパクト集合 K' と $X_{\Omega(\emptyset)}$ のコンパクト集合 K'', 定数 $c>0$ が存在し, 任意の $T=(V,E)\in\mathscr{T}_k$ $(k\geq 1)$, $\{\hat{f}_v\}_{v\in V}\subset\hat{\mathscr{R}}_{\Omega(\emptyset)}$, $\hat{\varphi}_v\in\hat{\mathscr{R}}_\Omega$ $(v\in V)$, に対し $\big(T\,;\{\hat{f}_v\}_{v\in V},\{\hat{\varphi}_v\}_{v\in V}\big)$ から定まる反復合成積 $\hat{\psi}_T\in\hat{\mathscr{R}}_{\Omega^{*\infty}}$ は次の評価を満たす.

$$\big\|\hat{\psi}_T\big\|_K \leq \frac{c^{k-1}}{(k-1)!}\prod_{v\in V}\big\|\hat{\varphi}_v\big\|_{K'}\big\|\hat{f}_v\big\|_{K''}. \tag{11}$$

では, (1) の形式級数解のリサージェンス構造の解析に入りたい. まず, 簡単のために $n=1$ とし, $F(x,\varphi)=\sum_{j=0}^\infty F_j(x)\varphi^j$ は $F_j(0,0)=0$ $(j\geq 2)$ を満たすとする．ここで,

$$\omega = \partial_\varphi F(0,0)$$

と置くと, (1) は Borel 変換を通して, 次の合成積方程式へと書き直すことができる.

$$(\xi-\omega)\hat{\varphi} = \sum_{j=0}^{\infty}\hat{F}_j(\xi) * \hat{\varphi}^{*j}. \tag{12}$$

このとき, $\hat{\varphi}=\sum_{k=1}^\infty\hat{\varphi}_k$ が (12) の解となるように, 函数列 $\{\hat{\varphi}_k\}_{k=1}^\infty$ を次の手順により帰納的に定める.

$$\varphi_1(\xi) = \frac{1}{\xi-\omega}\,\hat{F}_0(\xi), \tag{13}$$

$$\hat{\varphi}_{k+1}(\xi) := \frac{1}{\xi-\omega}\sum_{j=1}^{k}\sum_{\substack{\ell_1+\cdots+\ell_j=k\\ \ell_1,\cdots,\ell_j\geq 1}}\hat{F}_j * \hat{\varphi}_{\ell_1} * \cdots * \hat{\varphi}_{\ell_j}. \tag{14}$$

このとき, 各 $\hat{\varphi}_k(\xi)$ は, 反復合成積を用いて次のように分解される.

補題 4.7 ([13], [14]) $\hat{\varphi}_k$ $(k=1,2,\cdots)$ を (13), (14) により定まる函数列とする．このとき, $\hat{\varphi}_k$ は $T=(V,E)\in\mathcal{T}_k$, $\hat{f}_v(\xi)=\hat{F}_{d(v)}(\xi)$, $\hat{\varphi}_v(\xi)=(\xi-\omega)^{-1}$ に対し定まる反復合成積 $\hat{\psi}_T$ と $\mu_T\in\mathbb{N}$ により, 次のように分解される.

$$\hat{\varphi}_k = \sum_{T\in\mathcal{T}_k}\mu_T\,\hat{\psi}_T. \tag{15}$$

補題4.7に現れるμ_Tは, Tの持つ対称性に由来するものであり, 具体的に求めることができる．この表示(15)と反復合成積に対する評価(11)を用いることにより, $\sum_{k=1}^{\infty}\hat{\varphi}_k$は$\hat{\mathscr{R}}_{\Omega(\{\omega\})^{*\infty}}$で収束することがわかる．よって, $n=1$の場合には, (1)の形式級数解は$\Omega(\{\omega\})^{*\infty}$-リサージェントとなることがわかるが, nが一般の場合には次が成立する．

定理 4.8 ([13], [14]) (1)の形式級数解$\varphi(x)\in\mathbb{C}^n[[x]]$の各成分は$\Omega(\Sigma)^{*\infty}$-リサージェントとなる．ただし, $\Sigma=\{\xi\in\mathbb{C}\mid\det\bigl(\xi-\partial_\varphi F(0,0)\bigr)=0\}$とする．

参考文献

[1] The Bender-Wu analysis and the Voros theory II, Adv. Stud. Pure Math. **54** (2009), 19–94.

[2] B. Candelpergher, J. C. Nosmas and F. Pham : Approche de la résurgence, Actualités Mathématiques., Hermann, Paris, 1993.

[3] A. Connes and D. Kreimer : Hopf algebras, renormalization and noncommutative geometry, Comm. Math. Phys. **199** (1998), 203–242.

[4] O. Costin : On Borel summation and Stokes phenomena for rank-1 nonlinear systems of ordinary differential equations, Duke Math. J. **93** (1998), no. 2, 289–344.

[5] O. Costin : Asymptotics and Borel Summability, Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, Vol. 141, CRC Press, 2009.

[6] E. Delabaere and F. Pham : Resurgent methods in semi-classical asymptotics, Ann. Inst. Henri Poincaré **71** (1999), 1–94.

[7] J. Écalle : Les fonctions résurgentes, Publ. Math. d'Orsay, Vol.1 (81-05), 2(81-06), 3(85-05), 1981 and 1985.

[8] J. Écalle : Cinq applications des fonctions résurgentes. Publ. Math. d'Orsay 84-62, 1984.

[9] F. Fauvet and F. Menous : Ecalle's arborification-coarborification transforms and Connes-Kreimer Hopf algebra, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. **50** (2017), 39–83.

[10] F. Fauvet, F. Menous and D. Sauzin : Explicit linearization of one-dimensional germs through tree-expansions, Bull. Soc. Math. France **146** (2018), 241–285.

[11] 藤森俊明：場の理論のリサージェンス構造–摂動論と非摂動効果の密接な関係– (数理科学2017年11月号) サイエンス社 2017年11月.

[12] 藤森俊明, 三角樹弘, 坂井典佑： リサージェンス理論：摂動論から非摂動効果を理解する (日本物理学会誌2018年6月号) 日本物理学会2018年6月.

[13] S. Kamimoto : Resurgence of formal series solutions of nonlinear differential and difference equations, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **92** (2016), no. 8, 92–95.

[14] S. Kamimoto : Resurgent functions and nonlinear systems of differential and difference equations, arXiv:1610.05881.

[15] S. Kamimoto, T. Kawai and Y. Takei: Exact WKB analysis of a Schrödinger equation with a merging triplet of two simple poles and one simple turning point, I – its WKB-theoretic transformation to the Mathieu equation, Adv. Math. **260** (2014), 458–564.

[16] S. Kamimoto, T. Kawai and Y. Takei: Exact WKB analysis of a Schrödinger equation with a merging triplet of two simple poles and one simple turning point, II – its relevance to the Mathieu equation and the Legendre equation, Adv. Math. **260** (2014), 565–613.

[17] S. Kamimoto and D. Sauzin : Iterated convolutions and endless Riemann surfaces, to appear in Ann. Sc. norm. super. Pisa, Cl. sci.

[18] M. Kontsevich : Resurgence and Quantization, Course given at IHES, Paris in April, 2017.

[19] J. Martinet and J. P. Ramis : Problèmes de modules pour des équations différentielles non linéaires du premier ordre, Publ. Sc. I. H. E. S. **55** (1982), 63–164.

[20] 三角樹弘：摂動級数の発散と非摂動効果–リサージェンス理論の量子論への応用– (数理科学 2016年9月号) サイエンス社 2016年9月.

[21] C. Mitschi and D. Sauzin : Divergent Series, Summability and Resurgence. Vol. 1: Monodromy and Resurgence. Lecture Notes in Mathematics **2153**, Springer, Heidelberg, 2016.

[22] Y. Ou and E. Deleabaere : Endless continuability and convolution product, arXiv:1410.1200.

[23] D. Sauzin: Mould expansions for the saddle-node and resurgence monomials, Renormalization and Galois theories, 83–163, IRMA Lect. Math. Theor. Phys., 15, Eur. Math. Soc., Zürich, 2009.

[24] D. Sauzin : On the stability under convolution of resurgent functions, Funkcial. Ekvac., **56** (2013), no. 3, 397–413.

[25] D. Sauzin : Nonlinear analysis with resurgent functions, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. **48** (2015), 667–702.

[26] L. Schneps : Double shuffle and Kashiwara-Vergne Lie algebras, J. Algebra **367** (2012), 54–74.

[27] L. Schneps : Elliptic multiple zeta values, Grothendieck-Teichmüller and mould theory, arXiv:1506.09050, 2015.