

特別講演

自己相似性を持たない半線形熱方程式の可解性

藤嶋 陽平 (静岡大学)*

1. 序

次の半線形熱方程式の初期値問題の可解性を考察する.

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u + f(u), & x \in \mathbb{R}^N, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, & x \in \mathbb{R}^N. \end{cases} \quad (1.1)$$

ここで, $N \geq 1$ であり, 初期値 u_0 は $\mathbb{R}^N$ 上の非負値可測関数とする. また, 非線形項 $f = f(u)$ は $f \in C^1([0, \infty))$ であり, $f(s) > 0$, $f'(s) \geq 0$ ($s > 0$) かつ

$$\int_1^\infty \frac{1}{f(s)} ds < \infty \quad (1.2)$$

を満たすものとする. 上の条件を満たす非線形項 $f(u)$ の例としては, 冪乗型非線形項 $f(u) = u^p$ ($p > 1$) や指数型非線形項 $f(u) = e^u$ などの典型的なものに加え, 他にも $f(u) = u[\log(u+1)]^p$ ($p > 1$) や $f(u) = e^{u^p}$ ($p > 1$) などが挙げられる.

初期値 u_0 が $\mathbb{R}^N$ 上の有界な関数である場合には, 初期値問題 (1.1) の時間局所可解性は容易に示され, 任意の初期値 $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ に対して (1.1) の局所古典解が存在することが分かる. 従って, (1.1) の局所可解性を論じる場合には, 初期値 u_0 が空間特異性を持つ場合に (1.1) の解が存在するか否かが問題となる. 非有界な初期値に対する (1.1) の局所可解性は, 非線形項の増大度と初期値の特異性のバランスにより決まるため, 非線形項 $f(u)$ の $u \rightarrow \infty$ での挙動と特異な初期値を扱う関数空間の設定が重要な役割を果たす. 最も典型的な非線形項の一つである冪乗型非線形項 $f(u) = u^p$ ($p > 1$) に対しては, [21] により Lebesgue 空間における局所可解性が考察されており, 局所解の存在・非存在を分ける初期値の臨界の可積分性が得られている. ([2] および [6] も参照のこと.) さらに冪乗型方程式に対する局所可解性については, その初期値の特異性の最適な発散オーダーが [1], [9] によって特定されている.

一方, 時間大域可解性については非線形項 $f(u)$ の $u \rightarrow 0$ での挙動と初期値の空間無限遠方での減衰のバランスによって決まり, 冪乗型非線形項 $f(u) = u^p$ ($p > 1$) に対しては [5] による大域可解性を分ける臨界指数 (Fujita 指数) の存在がよく知られている. その後, [22] により Lebesgue 空間における大域解の存在が示され, さらに [15], [17], [20] などの結果により, 大域解の存在・非存在を分ける初期値の空間無限遠方での最適な減衰オーダーが特定されている. また, 冪乗型以外の半線形熱方程式に対する結果としては, 指数型非線形項 $f(u) = e^u$ に対する (1.1) の局所可解性のための最適な初期値の特異性 ([19]) や, $f(u) = u^\lambda e^{u^2}$ ($\lambda > 1$) のような強い増大度を持つ半線形熱方程式に対する局所可解性および大域可解性 ([10], [11], [12]) に関する結果が得られている.

本講演では, 冪乗型などに限らない一般の非線形項 $f(u)$ に対する初期値問題 (1.1) を扱い, 時間局所および時間大域可解性を考察する. 特に, 初期値の特異性や空間遠方での減衰に関する条件を非線形項 $f(u)$ に応じて定め, 問題 (1.1) に対して,

本研究は科研費 (課題番号:15K17573) の助成を受けたものである.

* 〒432-8561 静岡県浜松市中区城北 3-5-1 静岡大学 学術院工学領域
e-mail: fujishima@shizuoka.ac.jp

- 時間局所解の存在・非存在を分ける初期値の臨界の可積分性の導出
- 時間大域解の存在・非存在を分ける $f(u)$ の $u \rightarrow 0$ の挙動の導出

を行うことを目指す. 一般の非線形項 $f(u)$ に対する問題 (1.1) の可解性については, [18] により (1.1) に対する優解の構成方法が示されており, (1.1) に対する局所解存在のための十分条件が与えられている. [18] で得られた十分条件は, 冪乗型非線形項に対しては可解性のための初期値の最適な特異性を導くことに効力を発揮する一方, その条件は明示的なものではなく, 一般の非線形項 $f(u)$ に対する (1.1) の局所可解性のための初期値の条件は明らかではないように思われる. 本講演では [18] とは異なる優解の構成方法を紹介し, 時間局所可解性のための初期値の可積分性の条件を明示的に述べる. 局所解の非存在に関する結果についても紹介し, その可積分性が最適なものであることを示す. さらに (1.1) に対する時間大域解の存在・非存在の結果を述べ, 一般の非線形項 $f(u)$ に対する問題 (1.1) の Fujita 指数の一般化についても言及する. なお, 本講演の内容は猪奥倫左氏 (愛媛大学) との共同研究に基づくものである.

2. 時間局所可解性

本節では問題 (1.1) の時間局所可解性を考察し, 局所解存在のための臨界の初期値の可積分性を導出する. 始めに (1.1) の古典解の定義を述べる.

定義 2.1. $T > 0$ とし, X を Banach 空間とする. $u = u(x, t) \in C^{2,1}(\mathbb{R}^N \times (0, T))$ が (1.1) の X における (古典) 解であるとは, u が次の条件を満たすことである.

- すべての $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times (0, T)$ に対して, u が $\partial_t u = \Delta u + f(u)$ を満たす.
- $\lim_{t \rightarrow +0} \|u(\cdot, t) - e^{t\Delta} u_0\|_X = 0$ を満たす.

ここで, $e^{t\Delta} u_0$ は

$$(e^{t\Delta} u_0)(x) := (4\pi t)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y) dy$$

で与えられる, 初期値を u_0 とする熱方程式の解である.

注意 2.1. 本講演で考察する初期値は特異性を有するものを許容するが, $t > 0$ に対しては $u(\cdot, t)$ の特異性が解消される古典解のみを扱うことにする. また, u の初期値への収束については上の意味で考えることとし, u 自身の u_0 への収束は考察しない.

問題 (1.1) の可解性について, $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ であれば通常の不動点定理による議論により, (1.1) の $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ における古典解の存在が容易に得られる. すなわち, (1.1) を積分方程式

$$u(x, t) = (e^{t\Delta} u_0)(x) + \int_0^t \left[e^{(t-s)\Delta} f(u(\cdot, s)) \right](x) ds$$

に書き直し, 適当な関数空間における積分方程式の解を見つけ, 正則性の議論により u の滑らかさを得ることで古典解の存在が示される. なお, $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ の場合には一般に $e^{t\Delta} u_0$ の u_0 への $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ における収束は期待できない. 実際, u_0 に不連続点が存在する場合には $\|e^{t\Delta} u_0 - u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \not\rightarrow 0$ ($t \rightarrow 0$) となるため, 一般に定義 2.1 での初期値への収束について, $e^{t\Delta} u_0$ を u_0 に置き換えることはできない.

一方, $u_0 \notin L^\infty(\mathbb{R}^N)$ の場合には (1.1) の可解性は自明ではない. 初期値 u_0 が特異性を持つ場合には (1.1) の解が存在するか否かについては, その特異性の強さと非線形項の増大度のバランスによって決定されるため, 非線形項 $f(u)$ の挙動が重要となる.

2.1. 冪乗型半線形熱方程式

Weissler は [21] において, $f(u) = u^p$ ($p > 1$) の場合を考察し, 特異性を持つ初期値に対する可解性を議論した. 特に, 特異性を持つ初期値を扱うために $L^r(\mathbb{R}^N)$ に属する u_0 を考え, 方程式の解の存在・非存在を分ける初期値の臨界の可積分性を導出し, 以下の結果を示した: $r \geq 1$ とし, $r_c := \frac{N}{2}(p-1)$ とおく.

- $r > r_c$ または $r = r_c > 1$ とする. 任意の $u_0 \in L^r(\mathbb{R}^N)$ に対して, ある $T > 0$ が存在して (1.1) の $L^r(\mathbb{R}^N)$ における古典解 $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^N \times (0, T))$ が存在する.
- $1 \leq r < r_c$ とする. ある $u_0 \in L^r(\mathbb{R}^N)$ が存在して, 初期値を u_0 とする (1.1) の非負値な時間局所古典解が存在しない.

Weissler の結果から, r_c が問題 (1.1) の時間局所解の存在・非存在を分ける初期値の最適な可積分を与えることが分かるが, 臨界指数 r_c は方程式の自己相似性とも関連があることが確かめられる. $\lambda > 0$ とし,

$$u_\lambda(x, t) := \lambda^{\frac{2}{p-1}} u(\lambda x, \lambda^2 t) \quad (2.1)$$

とおく. このとき u が $\partial_t u = \Delta u + u^p$ を満たせば, u_λ も同じ方程式を満たしていることが分かる. これを冪乗型半線形熱方程式の自己相似性と呼ぶ. (2.1) で定まる u_λ に対して, $\|u_\lambda(\cdot, 0)\|_{L^r(\mathbb{R}^N)} = \|u(\cdot, 0)\|_{L^r(\mathbb{R}^N)}$ であるための必要十分条件は $r = r_c$ が成り立つ. よって, 臨界指数 r_c はスケール変換 (2.1) のもとで $L^r(\mathbb{R}^N)$ ノルムが不変となる Lebesgue 空間の指数であり, 解の存在・非存在を分ける初期値の臨界の可積分性と一致する.

2.2. 自己相似性を持たない半線形熱方程式

$f(u)$ が冪乗型とは限らない一般の非線形項の場合には, 方程式を不変にするスケール変換が存在するとは限らない. よって, 冪乗型のように方程式の自己相似性に基づいた初期値の臨界の可積分性の導出は期待できないが, (2.1) で与えられるスケール変換を冪乗型とは限らない f に対して一般化することが可能である ([3]). 関数 $F(u)$ ($0 < u < \infty$) を

$$F(u) := \int_u^\infty \frac{1}{f(s)} ds$$

により定める. このとき, F は $(0, \infty)$ 上の正值単調減少関数であるから, その逆関数 F^{-1} が存在する. F および F^{-1} を用いて,

$$u_\lambda(x, t) := F^{-1}\left[\lambda^{-2}F(u(\lambda x, \lambda^2 t))\right] \quad (2.2)$$

と定めると, スケール変換 (2.2) は $f(u) = u^p$ の場合には (2.1) に一致する. ところが, 方程式の自己相似性は一般には期待できないため, u が $\partial_t u = \Delta u + f(u)$ を満たすとしても u_λ が同じ方程式を満たすとは限らず, スケール変換された関数 u_λ は

$$\partial_t u_\lambda = \Delta u_\lambda + f(u_\lambda) + \frac{|\nabla u_\lambda|^2}{f(u_\lambda)F(u_\lambda)} \left[f'(u)F(u) - f'(u_\lambda)F(u_\lambda) \right]$$

を満たす. このとき, (2.2) で定まる変換は方程式を不変にするものではないが, この変換のもとで不変な積分量を見い出すことができ, 時刻 $t = 0$ において

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{F(u_\lambda(x, 0))^{\frac{N}{2}}} dx = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{F(u(x, 0))^{\frac{N}{2}}} dx \quad (2.3)$$

が成立することが確かめられる. $f(u) = u^p$ の場合には初期時刻における積分 (2.3) から定まる初期値の可積分性は, Weissler の結果における変換 (2.1) のもとで不変なノルム $\|\cdot\|_{L^{\frac{N}{2}(p-1)}(\mathbb{R}^N)}$ のそれと一致する. [4] においては, (2.3) から導かれる積分が, 問題 (1.1) の局所解の存在・非存在を分ける初期値の臨界の可積分性を与えることを示した. その結果を述べるために uniformly local Lebesgue 空間 $L_{\text{ul}}^r(\mathbb{R}^N)$ の定義を述べる. ($L_{\text{ul}}^r(\mathbb{R}^N)$ については [7], [16] などを参照のこと.)

定義 2.2. $1 \leq r < \infty$ に対して,

$$L_{\text{ul}}^r(\mathbb{R}^N) := \left\{ u \in L_{\text{loc}}^r(\mathbb{R}^N) : \|u\|_{L_{\text{ul}}^r(\mathbb{R}^N)} := \sup_{z \in \mathbb{R}^N} \left(\int_{B_1(z)} |u(x)|^r dx \right)^{\frac{1}{r}} < \infty \right\}$$

と定める. ただし, $B_1(z)$ は中心 z , 半径 1 の球を表すものとする. さらに, $\text{BUC}(\mathbb{R}^N)$ により有界な一様連続関数全体の空間を表すこととし, $\text{BUC}(\mathbb{R}^N)$ の $L_{\text{ul}}^r(\mathbb{R}^N)$ ノルムによる完備化を $\mathcal{L}_{\text{ul}}^r(\mathbb{R}^N)$ で表す. すなわち, $\mathcal{L}_{\text{ul}}^r(\mathbb{R}^N) := \overline{\text{BUC}(\mathbb{R}^N)}^{\|\cdot\|_{L_{\text{ul}}^r(\mathbb{R}^N)}}$ と定める.

関数 f の増大度について, 極限

$$\lim_{s \rightarrow \infty} f'(s)F(s) =: A \quad (2.4)$$

が存在すると仮定する. (2.4) の極限が存在する場合には $A \geq 1$ であることが容易に確かめられる. また, $A > 1$ の場合に可積分性に関する臨界指数 $r_c(A)$ を

$$r_c(A) := \frac{N}{2} \cdot \frac{1}{A-1}$$

により定める. 上記の関数空間 $L_{\text{ul}}^r(\mathbb{R}^N)$ および極限 A を用いて, 一般の f に対する問題 (1.1) の時間局所可解性に関する結果を述べる.

定理 2.1 ([4]). $N \geq 1$ とし, $f \in C^1([0, \infty))$ は $f(s) > 0$, $f'(s) \geq 0$ ($s > 0$) および (1.2) を満たすとする. $r \geq 1$ とする. さらに (2.4) で定まる極限 A が存在すると仮定し, ある $s_0 > 0$ が存在して, 関数 $f'(s)F(s)$ が

$$f'(s)F(s) \leq A, \quad s \geq s_0 \quad (2.5)$$

を満たすとする.

(1) $A > 1$ の場合

- $1/F(u_0)^{A-1} \in L_{\text{ul}}^r(\mathbb{R}^N)$ ($r > r_c(A)$ のとき) または $1/F(u_0)^{A-1} \in \mathcal{L}_{\text{ul}}^r(\mathbb{R}^N)$ ($r = r_c(A) > 1$ のとき) を満たす任意の初期値 $u_0 \geq 0$ に対して, ある $T > 0$ が存在し, 問題 (1.1) の $L_{\text{ul}}^r(\mathbb{R}^N)$ における古典解 $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^N \times (0, T))$ が存在する.
- $1 \leq r < r_c(A)$ のとき, 問題 (1.1) の $L_{\text{ul}}^r(\mathbb{R}^N)$ における非負値な局所古典解が存在しないような, $1/F(u_0)^{A-1} \in \mathcal{L}_{\text{ul}}^r(\mathbb{R}^N)$ を満たす初期値 u_0 が存在する.

(2) $A = 1$ の場合

- $1/F(u_0)^r \in L_{\text{ul}}^1(\mathbb{R}^N)$ ($r > \frac{N}{2}$ のとき) または $1/F(u_0)^{\frac{N}{2}} \in \mathcal{L}_{\text{ul}}^1(\mathbb{R}^N)$ ($r = \frac{N}{2}$ のとき) を満たす任意の初期値 $u_0 \geq 0$ に対して, ある $T > 0$ が存在し, 問題 (1.1) の $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ における古典解 $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^N \times (0, T))$ が存在する.

- $0 < r < \frac{N}{2}$ のとき, 問題 (1.1) の $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ における非負値な局所古典解が存在しないような, $1/F(u_0)^{\frac{N}{2}} \in \mathcal{L}_{\text{ul}}^1(\mathbb{R}^N)$ を満たす初期値 u_0 が存在する.

注意 2.2. (1) $A > 1$ とする. 仮定 (2.5) より, 十分に大きな $s > 0$ に対して $1/F(s)^{A-1} \gtrsim s$ が成立することが確かめられる. よって, $1/F(u_0)^{A-1} \in L_{\text{ul}}^r(\mathbb{R}^N)$ の条件のもとでは $u_0 \in L_{\text{ul}}^r(\mathbb{R}^N)$ が成り立ち, u の初期値への収束は u_0 が許容する特異性を示す空間で成立していることが分かる.

(2) $f(u) = u^p$ ($p > 1$) とする. このとき, 任意の $s > 0$ に対して $f'(s)F(s) \equiv \frac{p}{p-1}$ であることが容易に確かめられる. 従って, 非線形性が強くなると (2.4) により定まる極限の値は小さくなり, $p \rightarrow \infty$ とすると, $\frac{p}{p-1} \rightarrow 1$ となる. 一方, $f(u) = e^u$ とすると $f'(s)F(s) \equiv 1$ となり, $A = 1$ が達成される. さらに強い増大度を持つ非線形項 $f(u) = e^{u^2}$ を考えた場合にも $A = 1$ となり, このとき, 十分に大きな $s > 0$ に対して $f'(s)F(s) < 1$ となること, すなわち, (2.5) が成立することが確かめられる.

3. 時間大域可解性

次に問題 (1.1) の時間大域可解性を考察する. 本節では, $f(u)$ の $u = 0$ 付近での挙動により, (1.1) の時間大域解の存在・非存在が決定されることを紹介する. 非負値な大域解の存在・非存在を考えるため, 以下では $f(0) = 0$ を仮定する.

冪乗型非線形項 $f(u) = u^p$ ($p > 1$) に対しては, Fujita [5] による時間大域解の存在・非存在を分ける臨界指数 (Fujita 指数) の存在がよく知られており, 以下の結果が示されている.

- $p > p_F := 1 + \frac{2}{N}$, $f(u) = u^p$ とする. このとき, ある $\epsilon > 0$, $\delta > 0$ が存在して,

$$0 \leq u_0(x) \leq \epsilon G(x, \delta) \quad \text{in } \mathbb{R}^N, \quad G(x, t) := (4\pi t)^{-\frac{N}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

を満たす初期値 u_0 に対して (1.1) の時間大域解が存在する.

- $1 < p < p_F$, $f(u) = u^p$ とする. このとき, $u_0 \geq 0$ ($\neq 0$) に対して (1.1) の時間大域解は存在しない.

さらに, Hayakawa [8], Kobayashi-Sirao-Tanaka [14] によって, $p = p_F$ の場合にも非自明な非負値時間大域解が存在しないことが示されている. よって, $p = p_F$ は大域解の存在・非存在を分ける臨界指数となっており, Fujita 指数と呼ばれる. また, Weissler [22] は Lebesgue 空間における大域可解性を扱い, $p > p_F$, $f(u) = u^p$ のとき, ある $\delta > 0$ が存在して, $\|u_0\|_{L^{\frac{N}{2(p-1)}}(\mathbb{R}^N)} < \delta$ ならば (1.1) の時間大域解が存在することを示した. 従って, スケール変換 (2.1) のもとで不変なノルムが十分に小さい状況下で大域解の存在が示される. さらに Lee-Ni [15], Naito [17], Wang [20] らの結果によって, 時間大域解が存在するための初期値の空間無限遠方での最適な減衰レートが求められており, Lebesgue 空間の指数としては $\frac{N}{2}(p-1)$ が初期値の最適な減衰を与えていることが分かる.

非線形項 $f(u)$ が冪乗型とは限らない一般の非線形性の場合には, 自己相似変換の一般化 (2.2) が導入されるため, この変換のもとで不変な積分量

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{F(u_0(x))^{\frac{N}{2}}} dx$$

が十分に小さければ、時間大域解の存在が示されると予想される。本節ではこの予想が適当な条件のもと示されることを紹介する。一般の非線形項 $f(u)$ に対する大域可解性を述べるため、 f の増大度についての極限の存在 (2.4) に加え、 $u = 0$ 付近での極限

$$\lim_{s \rightarrow +0} f'(s)F(s) =: \alpha \quad (3.1)$$

が存在すると仮定する。増大度に関する極限と同様に、 $f(0) = 0$ のとき、極限 (3.1) が存在するならば、 $\alpha \geq 1$ であることが従う。

まずは時間大域解の存在について述べる。

定理 3.1. $N \geq 1$ とし、 $f \in C^1([0, \infty))$ は $f(0) = 0$, $f(s) > 0$, $f'(s) \geq 0$ ($s > 0$) および (1.2) を満たすとする。 (2.4) で定まる極限 A が存在すると仮定し、ある $s_0 > 0$ が存在して、関数 $f'(s)F(s)$ が (2.5) を満たすとする。さらに (3.1) で定まる極限 α が存在するとし、 $\alpha < 1 + \frac{N}{2}$ とする。 $r \geq 1$ とし、初期値 $u_0 \geq 0$ が $1/F(u_0)^{\frac{N}{2}} \in L^1(\mathbb{R}^N)$ かつ

- $A > 1$, $r > r_c(A)$ のとき、 $1/F(u_0)^{A-1} \in L^r(\mathbb{R}^N)$;
- $A > 1$, $r = r_c(A)$ のとき、 $r_c(A) > 1$;
- $A = 1$, $r > \frac{N}{2}$ のとき、 $1/F(u_0)^r \in L^1(\mathbb{R}^N)$;

を満たすとする。このとき、ある $\delta > 0$ が存在して、

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{F(u_0)^{\frac{N}{2}}} dx < \delta$$

ならば、 $L^r_{\text{ul}}(\mathbb{R}^N)$ ($A > 1$ のとき) または $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ ($A = 1$ のとき) における (1.1) の時間大域解が存在する。

次に時間大域解の非存在について述べる。

定理 3.2. $N \geq 1$ とし、 $f \in C^1([0, \infty))$ は $f(0) = 0$, $f(s) > 0$, $f'(s) \geq 0$ ($s > 0$) および (1.2) を満たすとする。 (3.1) により定まる極限 α が存在するとし、 $\alpha \geq 1 + \frac{N}{2}$ を仮定する。 $\alpha = 1 + \frac{N}{2}$ であるときにはさらに、

$$\limsup_{s \rightarrow +0} f(s)F(s)^\alpha < \infty$$

が成り立つとする。このとき、非負な初期値 $u_0 \geq 0$ に対して (1.1) の時間大域解は存在しない。

定理 3.1, 3.2 より、 $\alpha = 1 + \frac{N}{2}$ が (1.1) の非負値時間大域解の存在・非存在を分ける臨界指数であることが分かる。特に $f(u) = u^p$ の場合には、 $\alpha = 1 + \frac{N}{2} \iff p = 1 + \frac{2}{N}$ であるから、 $\alpha = \lim_{s \rightarrow +0} f'(s)F(s) = 1 + \frac{N}{2}$ は Fujita 指数の一般化を与えるものである。

4. 優解の構成

本節では、(1.1) の可解性を示す際に必要となる優解の構成方法を解説する。ここで、(1.1) の優解は積分方程式の意味で考えることとする。すなわち、 $\bar{u} \in C^{2,1}(\mathbb{R}^N \times (0, T))$ ($T > 0$) が (1.1) の優解であるとは、

$$\bar{u}(x, t) \geq (e^{t\Delta} u_0)(x) + \int_0^t (e^{(t-s)\Delta} f(\bar{u}(s)))(x) ds \quad \text{in } \mathbb{R}^N \times (0, T) \quad (4.1)$$

が成り立つことである. (4.1) の意味での優解が存在するとき, 古典的な意味で方程式を満たす解 u が存在することが知られている. ([13], [18] など参照のこと.) よって (1.1) の古典解を構成するためには (4.1) の意味での優解を探し, そのときに構成される解に対して適切な空間における初期値への収束を示せば良い. なお, 以下の議論においては積分方程式の意味での優解と古典的な意味での優解の両方を用いることになるが, これらの同一視は適当な条件のもとで可能である.

(1.1) の優解の構成を行うために, 方程式

$$\partial_t v = \Delta v + g(v) \quad (4.2)$$

を考える. $v \in C^{2,1}(\mathbb{R}^N \times (0, T))$ ($T > 0$) が (4.2) を満たすとし,

$$\bar{u}(x, t) := F^{-1}[G(v(x, t))] \quad \text{in } \mathbb{R}^N \times (0, T) \quad (4.3)$$

とおく. ただし, $g \in C^1([0, \infty))$ は $g(s) > 0$, $g'(s) \geq 0$, $G(s) := \int_s^\infty \frac{du}{g(u)} < \infty$ ($s > 0$) を満たすとする. このとき, $\bar{u}$ は

$$\partial_t \bar{u} - \Delta \bar{u} - f(\bar{u}) = \frac{|\nabla \bar{u}|^2}{f(\bar{u})F(\bar{u})} [g'(v)F(v) - f'(\bar{u})F(\bar{u})]$$

を満たす. よって,

$$f'(\sigma(s))F(\sigma(s)) \leq g'(s)G(s), \quad \sigma(s) := F^{-1}(G(s)) \quad (4.4)$$

が成り立つならば

$$\partial_t \bar{u} \geq \Delta \bar{u} + f(\bar{u}) \quad \text{in } \mathbb{R}^N \times (0, T) \quad (4.5)$$

となる. このとき, $\bar{u}$ が (4.1) を満たすならば, $\bar{u}$ は (1.1) の優解である. 従って, (4.4) を満たす g および対応する方程式 (4.2) の局所解や大域解の存在を示し, (4.1) を確かめることで, (1.1) の局所解および大域解の存在が示される. 以下では $A > 1$ の場合を考察し, g の構成について述べる.

時間局所解: $g(s) = (A-1)s^{\frac{A}{A-1}}$ とする. このとき, $g'(s)G(s) \equiv A$, $G(s) = s^{-\frac{1}{A-1}}$ であるから, 定理 2.1 における仮定 (2.5) より, s が十分に大きいとき, (4.5) が成り立つ. よって, 局所解の構成のためには初期値 u_0 の代わりに $\max\{u_0, k\}$ を用いて, $v(\cdot, 0) = F(\max\{u_0, k\})^{-(A-1)}$ となる (4.2) の解を v とし, 十分に大きな k に対して $\bar{u}$ を (4.3) により定めると (1.1) の優解が得られる. 特にこのとき, (4.5) を満たす $\bar{u}$ は (4.1) を満たし, 積分方程式の意味でも優解であることが確かめられるので, 実際に (1.1) の局所解を構成することが可能となる.

時間大域解: 時間大域解の構成のためには $g'(s)G(s)$ が定数となるような非線形項では不十分であり, ゼロ付近での挙動も考慮して g を選ぶ必要がある. 大まかに述べると, 初期値 u_0 の特異点付近では $\partial_t v = \Delta v + (A-1)v^{\frac{A}{A-1}}$ を用い, 空間無限遠では $\partial_t v = \Delta v + (\alpha_* - 1)v^{\frac{\alpha_*}{\alpha_*-1}}$ ($\alpha < \alpha_* < 1 + N/2$) を用いて, (1.1) の大域的に存在する優解を構成する. 実際,

$$g(s) = (\alpha - 1)s^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \quad (0 < s \ll 1), \quad g(s) = (A-1)s^{\frac{A}{A-1}}(1 + O(s^{-1})) \quad (s \gg 1),$$

かつ (4.4) を満たす g の存在を示すことが可能であり, (4.2) の大域解 v を構成することで, (4.3) により定まる $\bar{u}$ が (1.1) の大域的に存在する優解であることが示される.

参考文献

- [1] P. Baras and M. Pierre, *Critère d'existence de solutions positives pour des équations semi-linéaires non monotones*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **2** (1985), 185–212.
- [2] H. Brezis and T. Cazenave, *A nonlinear heat equation with singular initial data*, J. Anal. Math. **68** (1996), 277–304.
- [3] Y. Fujishima, *Blow-up set for a superlinear heat equation and pointedness of the initial data*, Discrete Continuous Dynamical Systems A **34** (2014), 4617–4645.
- [4] Y. Fujishima and N. Ioku, *Existence and nonexistence of solutions for the heat equation with a superlinear source term*, J. Math. Pures Appl. **118** (2018), 128–158.
- [5] H. Fujita, *On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$* , J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I **13** (1966), 109–124.
- [6] Y. Giga, *Solutions for semilinear parabolic equations in L^p and regularity of weak solutions of the Navier-Stokes system*, J. Differential Equations **62** (1986), 415–421.
- [7] J. Ginibre and G. Velo, *The Cauchy problem in local spaces for the complex Ginzburg-Landau equation II. Contraction methods*, Commun. Math. Phys. **187** (1997), 45–79.
- [8] K. Hayakawa, *On nonexistence of global solutions of some semilinear parabolic differential equations*, Proc. Japan Acad. **49** (1973), 503–505.
- [9] K. Hisa and K. Ishige, *Existence of solutions for a fractional semilinear parabolic equation with singular initial data*, Nonlinear Anal. **175** (2018), 108–132.
- [10] S. Ibrahim, R. Jrad, M. Majdoub and T. Saanouni, *Local well posedness of a 2D semilinear heat equation*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin **21** (2014), 535–551.
- [11] N. Ioku, *The Cauchy problem for heat equations with exponential nonlinearity*, J. Differential Equations **251** (2011), 1172–1194.
- [12] N. Ioku, B. Ruf and E. Terraneo, *Existence, non-existence, and uniqueness for a heat equation with exponential nonlinearity in $\mathbb{R}^N$* , Math. Phys. Anal. Geom. **18** (2015), 18:29.
- [13] K. Ishige, T. Kawakami and M. Sierżega, *Supersolutions of parabolic systems with power nonlinearities*, J. Differential Equations **260** (2016), 6084–6107.
- [14] K. Kobayashi, T. Sirao and H. Tanaka, *On the growing up problem for semilinear heat equations*, J. Math. Soc. Japan **29** (1977), 407–424.
- [15] T.-Y. Lee and W.-M. Ni, *Global existence, large time behavior and life space of solutions of a semilinear parabolic Cauchy problem*, Tras. Amer. Math. Soc. **333** (1992), 365–378.
- [16] Y. Maekawa and Y. Terasawa, *The Navier-Stokes equations with initial data in uniformly local L^p spaces*, Differential Integral Equations **19** (2006), 369–400.
- [17] Y. Naito, *The role of forward self-similar solutions in the Cauchy problem for semilinear heat equation*, J. Differential Equations **253** (2012), 3029–3060.
- [18] J. C. Robinson and M. Sierżega, *Supersolutions for a class of semilinear heat equations*, Rev. Mat. Complut. **26** (2013), 341–360.
- [19] J. L. Vazquez, *Domain of existence and blowup for the exponential reaction-diffusion equation*, Indiana Univ. Math. J. **48** (1999), 677–709.
- [20] X. Wang, *On the Cauchy problem for reaction-diffusion equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **337** (1993), 549–590.
- [21] F. B. Weissler, *Local existence and nonexistence for semilinear parabolic equations in L^p* , Indiana Univ. Math. J. **29** (1980), 79–102.
- [22] F. B. Weissler, *Existence and nonexistence of global solutions for a semilinear heat equation*, Israel J. Math. **38** (1981), 29–40.