

2018年度第17回解析学賞受賞特別講演

対称双曲系の消散構造と安定性解析

川島 秀一 (早稲田大学)*

1. 序

本講演では、双曲型平衡則系と呼ばれる

$$w_t + \sum_{j=1}^n f^j(w)_{x_j} = g(w) \quad (1.1)$$

の形の方程式系について考察する. $w = w(x, t)$ は $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ と $t \geq 0$ の未知関数であり, w , $f^j(w)$ および $g(w)$ はいずれも m 次元実ベクトルである. $g(w)$ は緩和効果を表す項で, これは気体分子運動論の Boltzmann 方程式では衝突項に対応する. 系 (1.1) をより単純な双曲型保存則系

$$w_t + \sum_{j=1}^n f^j(w)_{x_j} = 0 \quad (1.2)$$

や, 双曲・放物型保存則系

$$w_t + \sum_{j=1}^n f^j(w)_{x_j} = \sum_{i,j=1}^n \{G^{ij}(w)w_{x_j}\}_{x_i} \quad (1.3)$$

と対比しつつ考察することにする. 系 (1.2) および (1.3) はそれぞれ圧縮性 Euler 方程式と圧縮性 Navier-Stokes 方程式を一般化したものである.

本講演の主な内容は次の通りである. 系 (1.1) に対して, まず数学的エントロピーの定義を与え, そのエントロピーに基づく系 (1.1) の対称化について述べる. 次に, 系 (1.1) の安定性条件を定式化し, その条件に基づく系 (1.1) の消散構造を明らかにする. 次いで, 数学的エントロピーと安定性条件の下での系 (1.1) の数学解析の一端として, 時間大域解の存在とそのエネルギー減衰に関する一般論を紹介する. 最後に, その一般論が適用できないいくつかの具体例を取り上げ, 今後の問題点を指摘したい. なお, 本アブストラクトは [11] と重複する部分が多々あることをお断りしておきたい.

2. 数学的エントロピーと系の対称化

双曲型平衡則系 (1.1) に対し, 数学的エントロピーの定義と対応する系の対称化の理論を2004年の論文 [14] に従って紹介する. 系 (1.1) の数学的エントロピーの定義を与えるため, 次の二つの集合を導入しよう.

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \{\psi \in \mathbb{R}^m; \langle \psi, g(w) \rangle = 0 \text{ for any } w\}, \\ \mathcal{E} &= \{w; g(w) = 0\}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

本研究は科研費(課題番号:18H01131)の助成を受けたものである。

2010 Mathematics Subject Classification: 35L40, 35B35

キーワード: 対称双曲系, 安定性

* 〒169-8555 東京都新宿区大久保3-4-1 早稲田大学 理工学術院
e-mail: kawashim@aoni.waseda.jp

記号 $\langle, \rangle$ は $\mathbb{R}^m$ の内積を表す．気体分子運動論の Boltzmann 方程式では $\mathcal{M}$ は衝突不変量の空間に相当し，平衡状態の集合 $\mathcal{E}$ は Maxwell 分布の集合を表す．

定義 1 (数学的エントロピー [14]). 滑らかな関数 $\eta(w)$ は次の4条件を満たすとき，双曲型平衡則系 (1.1) の **数学的エントロピー** と呼ばれる．

- (1) $\eta(w)$ は w の狭義凸関数，即ち， $D_w^2\eta(w)$ は各 w に対し正定値である．
- (2) 各 w と $j = 1, \dots, n$ に対し，行列 $D_w f^j(w)(D_w^2\eta(w))^{-1}$ は実対称である．
- (3) $w \in \mathcal{E}$ であることと $(D_w\eta(w))^T \in \mathcal{M}$ が成り立つことは同値である．
- (4) 行列 $-D_w g(w)(D_w^2\eta(w))^{-1}$ は $w \in \mathcal{E}$ に制限すれば実対称半正定値で，その零化空間は $\mathcal{M}$ に一致する．

上付き添え字 T は転置を表す．この定義の前半の2条件は，1961年に S.K. Godunov [4] (cf. [3]) により双曲型保存則系 (1.2) のエントロピーの定義として定式化されたものである．数学的エントロピーの概念は，1988年に [12] において双曲・放物型保存則系 (1.3) の場合に拡張されている．数学的に定義されたこれらエントロピーは，力学的には負のエントロピーというべきものであり，Boltzmann 方程式では Boltzmann の H 関数に相当する．

次に，双曲型平衡則系 (1.1) の **対称化** について述べよう． $w = w(u)$ を微分同相写像とする．系 (1.1) をこの微分同相写像で書き換えると，

$$A^0(u)u_t + \sum_{j=1}^n A^j(u)u_{x_j} = h(u) \quad (2.2)$$

となる．ここで， $A^0(u) = D_u w(u)$ ， $A^j(u) = (D_w f^j)(w(u))D_u w(u)$ ， $h(u) = g(w(u))$ ．

定義 2 (対称消散系 [14]). 系 (2.2) が **対称消散的** であるとは次の4条件が成り立つことである．

- (1) 行列 $A^0(u)$ は各 u に対し実対称正定値である．
- (2) 行列 $A^j(u)$ は各 u と $j = 1, \dots, n$ に対し実対称である．
- (3) $h(u) = 0$ が成り立つことと $u \in \mathcal{M}$ であることは同値である．
- (4) 緩和行列 $L(u) := -D_u h(u)$ は $u \in \mathcal{M}$ に制限すれば実対称半正定値で，その零化空間 $\ker(L(u))$ は $\mathcal{M}$ に一致する．

$u \in \mathcal{M}$ に制限したときの緩和行列 $L(u) = -D_u h(u)$ は系の緩和効果を表すもので，Boltzmann 方程式における線形化衝突作用素に相当する．

双曲型平衡則系 (1.1) が対称消散系に変換されるか否かは，系 (1.1) が数学的エントロピーを持つか否かで特徴付けられる．即ち，双曲型保存則系 (1.2) に対する S.K. Godunov [4] の結果の一般化として，次の定理が成り立つ．

定理 1 ([14]). 双曲型平衡則系 (1.1) がある微分同相写像により (2.2) の形の対称消散系に変換されるための必要十分条件は，系 (1.1) が数学的エントロピーを持つことである．

なお、双曲・放物型保存則系 (1.3) に対する類似の結果は [12] で得られている。

系 (1.1) が数学的エントロピー $\eta(w)$ を持つとき、 $u(w) := (D_w \eta(w))^T$ と置くと、 $u = u(w)$ は微分同相写像になる。その逆写像 $w = w(u)$ も微分同相写像であるが、この写像により系 (1.1) は (2.2) の形の対称消散系に変換される。また、系 (1.1) の数学的エントロピー $\eta(w)$ が満たす方程式は

$$\eta(w)_t + \sum_{j=1}^n q^j(w)_{x_j} = \langle u(w), g(w) \rangle \quad (2.3)$$

で与えられる。 $q^j(w)$ はエントロピー束で、 $f^j(w(u))$ のポテンシャル関数 $\tilde{q}^j(u)$ (即ち $(D_u \tilde{q}^j(u))^T = f^j(w(u))$) を満たす関数 $\tilde{q}^j(u)$ を用いて $q^j(w) = \langle u(w), f^j(w) \rangle - \tilde{q}^j(u(w))$ で与えられる。

3. 安定性条件と消散構造

数学的エントロピーを持つ双曲型平衡則系 (1.1) に対応する対称消散系 (2.2) に対し、その消散構造を調べよう。今、定数状態 $\bar{u} \in \mathcal{M}$ を任意に固定し、系 (2.2) の $u = \bar{u}$ における線形化系

$$A^0 u_t + \sum_{j=1}^n A^j u_{x_j} + L u = 0 \quad (3.1)$$

を考える。ここで、 $A^0 = A^0(\bar{u})$, $A^j = A^j(\bar{u})$, $L = L(\bar{u})$ と略記した。 A^0 は実対称正定値、 A^j は実対称、 L は実対称半正定値で、その零化空間は $\ker(L) = \mathcal{M}$ で与えられる。系 (3.1) を $x \in \mathbb{R}^n$ に関して Fourier 変換すれば、

$$A^0 \hat{u}_t + i|\xi| A(\omega) \hat{u} + L \hat{u} = 0 \quad (3.2)$$

を得る。ただし、 $A(\omega) = \sum_{j=1}^n A^j \omega_j$, $\omega = \xi/|\xi| \in S^{n-1}$ と置いた。

線形対称消散系 (3.1) のエネルギー減衰を導くための構造条件は、1984 年に [30] で初めて導入された。その条件は次の形で定式化され、今日では職人技条件と呼ばれている。

定義 3 (職人技条件 [30]). 線形対称消散系 (3.1) が職人技条件を満たすとは、次の 3 条件を満たす $m \times m$ 実行列 $K(\omega)$ が存在することである。

- (1) $K(\cdot) \in C^\infty(S^{n-1})$ であり、各 $\omega \in S^{n-1}$ に対し $K(-\omega) = -K(\omega)$ を満たす。
- (2) 各 $\omega \in S^{n-1}$ に対し、行列 $K(\omega)A^0$ は実反対称である。
- (3) 各 $\omega \in S^{n-1}$ に対し、行列 $(K(\omega)A(\omega))^{sy} + L$ は実対称正定値である。ただし、記号 X^{sy} は実正方行列 X の対称部分を表す。

この条件は [30] においては、系 (3.1) のみならず双曲・放物型保存則系 (1.3) の線形化系をも含む形で定式化されており、圧縮性 Navier-Stokes 方程式に対する松村・西田 [16] のエネルギー法で用いられた「職人技」のからくりを数学的に表現したものである。

この構造条件の下で、系 (3.1) に対して次の減衰評価が得られる。

定理 2 (線形系の減衰評価 [30]). $n \geq 1$ とする. 職人技条件の下, 線形対称消散系 (3.1) の解 u は次の減衰評価を満たす.

$$\|\partial_x^k u(t)\|_{L^2} \leq C(1+t)^{-n/4-k/2} \|u_0\|_{L^1} + Ce^{-ct} \|\partial_x^k u_0\|_{L^2}. \quad (3.3)$$

ただし, k は非負整数で, C と c は正定数である.

減衰評価 (3.3) は系 (3.1) の解 u の Fourier 空間での各点評価

$$|\hat{u}(\xi, t)| \leq Ce^{-c\rho(\xi)t} |\hat{u}_0(\xi)| \quad (3.4)$$

から従う. ここで, $\rho(\xi) = |\xi|^2/(1+|\xi|^2)$. 実際, (3.3) の右辺第1項および第2項はそれぞれ (3.4) の低周波域 $|\xi| \leq 1$ および高周波域 $|\xi| \geq 1$ に対応している. 減衰指数 $t^{-n/4-k/2}$ は, 線形熱方程式の解の L^2 - L^1 評価の減衰指数と同じであることに注意したい. 減衰評価 (3.3) は職人技条件の下 [30] で初めて得られたが, それは Boltzmann 方程式に対する鵜飼 [29] (cf. [22]) の評価や, 圧縮性 Navier-Stokes 方程式に対する松村・西田 [17] の評価と全く同じ型のものである.

各点評価 (3.4) は系 (3.2) にエネルギー法を適用することで導かれる. そのエネルギー法の鍵となるのは **Lyapunov 関数** の構成である. 我々の Lyapunov 関数 $E[\hat{u}]$ は職人技条件の行列 $K(\omega)$ を用いて

$$E[\hat{u}] = (A^0 \hat{u}, \hat{u}) - \frac{\alpha|\xi|}{1+|\xi|^2} (iK(\omega)A^0 \hat{u}, \hat{u}) \quad (3.5)$$

の形で与えられる. ここで, α は十分小さな正定数であり, 記号 $(,)$ は $\mathbb{C}^m$ の内積を表す. 明らかに $E[\hat{u}]$ は $|\hat{u}|^2$ に同値であり, 行列 $K(\omega)$ は通常のエネルギー $(A^0 \hat{u}, \hat{u})$ を補正する役目を果たしている. この Lyapunov 関数を用いれば, 系 (3.2) の解 $\hat{u}$ が次の微分不等式を満たすことが示される.

$$\frac{\partial}{\partial t} E[\hat{u}] + c|(I-P)\hat{u}|^2 + c\rho(\xi)|\hat{u}|^2 \leq 0. \quad (3.6)$$

ここで, c は正定数であり, P は緩和行列 L の零化空間 $\ker(L) = \mathcal{M}$ への正射影である. 求める各点評価 (3.4) は微分不等式 (3.6) に Gronwall の不等式を適用すれば直ちに得られる.

上述のエネルギー法を個々の問題に適用する場合, 行列 $K(\omega)$ の具体的な構成が鍵となり, 職人技が必要なことに変わりはない. 職人技条件を職人技不要の条件で置き換えることに成功したのが 1985 年の論文 [23] であり, その条件は **安定性条件** と呼ばれ次の形で定式化されている.

定義 4 (安定性条件 [23]). 線形対称消散系 (3.1) が **安定性条件** を満たすとは, 次の命題が成り立つことである. $\phi \in \mathbb{R}^m$ がある $\mu \in \mathbb{R}$ と $\omega \in S^{n-1}$ に対し, $L\phi = 0$ (即ち $\phi \in \mathcal{M}$) および $\mu A^0 \phi + A(\omega)\phi = 0$ を満たすとする. このとき, 常に $\phi = 0$ が従う.

この安定性条件が, 線形対称消散系 (3.1) の **消散構造** の特徴付けにおいて本質的な役割を果たしていることを確認しておこう. 系 (3.1) の特性方程式 $\det(\lambda A^0 + i|\xi|A(\omega) + L) = 0$ の根を $\lambda = \lambda(i\xi)$ と表す. このとき, [23] による消散構造の特徴付けは次のように述べられる.

定理 3 (消散構造の特徴付け [23]). 線形対称消散系 (3.1) にいて、次の4条件は互いに同値である.

- (1) 安定性条件が成り立つ.
- (2) 職人技条件が成り立つ.
- (3) 任意の $\xi \neq 0$ に対し, $\operatorname{Re} \lambda(i\xi) < 0$ が成り立つ.
- (4) 任意の $\xi \in \mathbb{R}^n$ に対して, $\operatorname{Re} \lambda(i\xi) \leq -c\rho(\xi)$ が成り立つ. ただし, c は正定数であり, $\rho(\xi) = |\xi|^2/(1 + |\xi|^2)$.

この定理により, 容易に確認可能な安定性条件を確かめるだけで, 職人技条件の行列 $K(\omega)$ を具体的に構成することなく, 上記のエネルギー法や減衰評価 (3.3) を利用することが可能になったわけである.

4. 時間大域解と減衰評価

双曲型平衡則系 (1.1) に対し数学的エントロピーの存在を仮定する. そのとき, 系 (1.1) から得られる対称消散系 (2.2) の初期値問題を考察しよう. 系 (2.2) は準線形対称双曲系であり, 従って標準的な一般論 (cf. [8, 10]) により, Sobolev 空間 H^s において時間局所解の存在を示すことができる.

数学的エントロピーの存在に加えて, 対称消散系 (2.2) が定数状態 $\bar{u} \in \mathcal{M}$ において安定性条件を満たすと仮定しよう. 安定性条件は職人技条件と同値であり, 従って前節で述べたエネルギー法を用いることができる. ただし, 系 (2.2) は線形ではなく準線形であるため, 前節のエネルギー法に適切な修正を加える必要がある. このエネルギー計算により, 系 (2.2) の Sobolev 空間 H^s に属する小さい解に対して, 時間一様なアприオリ評価を示すことができる. 局所解の存在定理とこのアприオリ評価を組み合わせることで, Sobolev 空間 H^s に属する小さい初期値に対して, 系 (2.2) の時間大域解の存在を示すことができる. 実際, 次の定理が成り立つ.

定理 4 (時間大域解 [15]). 双曲型平衡則系 (1.1) は数学的エントロピーを持ち, 対応する対称消散系 (2.2) は定数状態 $\bar{u} \in \mathcal{M}$ において安定性条件を満たすとする. $n \geq 1$, $s \geq [n/2] + 2$ とし, 初期値 u_0 は $u_0 - \bar{u} \in H^s$ を満たすとする. このとき, もし $\|u_0 - \bar{u}\|_{H^s}$ が小さいならば, 系 (2.2) の初期値問題は

$$u - \bar{u} \in C^0([0, \infty); H^s) \cap C^1([0, \infty); H^{s-1})$$

なる時間大域解 u を唯一つ持つ. さらに, この解は時間無限大において定数状態 $\bar{u} \in \mathcal{M}$ に一様に漸近収束する. 即ち, $t \rightarrow \infty$ のとき $\|\partial_x^l(u - \bar{u})(t)\|_{L^\infty} \rightarrow 0$ が成り立つ. ただし, $0 \leq l \leq s - ([n/2] + 1)$ である.

この定理で得られた時間大域解は, 次の形の時間一様評価を満たす.

$$\|(u - \bar{u})(t)\|_{H^s}^2 + \int_0^t \|(I - P)u(\tau)\|_{H^s}^2 + \|\partial_x u(\tau)\|_{H^{s-1}}^2 d\tau \leq C\|u_0 - \bar{u}\|_{H^s}^2. \quad (4.1)$$

ただし, $s \geq [n/2] + 2$, C は正定数, P は $\mathcal{M}$ への正射影である. 同じ形の評価式は, 線形の場合は微分不等式 (3.6) から直ちに従うことが分かる. なお, 定理 4 で用いた非線形系に対するエネルギー法では, 数学的エントロピーの狭義凸性に基づくエネルギー

ギー形式, 系 (2.2) の対称消散性, 職人技条件の行列 $K(\omega)$ を用いたエネルギーの補正が重要な役割を果たしている.

双曲型平衡則系 (1.1) の安定性条件の下での時間大域解の存在定理は, 初め [5, 38] で得られた. 定理 4 は [15] による改良版である. 安定性条件の下での類似の時間大域解の存在定理は, 他の方程式系に対しても知られている. 双曲・放物型保存則系 (1.3) については [10] を, 系 (1.1) の半線形版としての Boltzmann 方程式の離散速度モデルについては [9] を参照のこと.

初期値が $H^s \cap L^1$ に属する場合, 定理 4 で得られた時間大域解の減衰評価を示すことができる.

定理 5 (減衰評価 [15]). 定理 4 と同じ仮定を置く. $n \geq 1$, $s \geq [n/2] + 2$ とする. ただし, $n = 1$ のときは $s \geq 3$ とする. 初期値に対して $u_0 - \bar{u} \in H^s \cap L^1$ を仮定し, $E_1 = \|u_0 - \bar{u}\|_{H^s} + \|u_0 - \bar{u}\|_{L^1}$ と置く. このとき, E_1 が小さいなら, 定理 4 で得られた時間大域解 u は次の減衰評価を満たす.

$$\begin{aligned} \|\partial_x^k(u - \bar{u})(t)\|_{L^2} &\leq CE_1(1+t)^{-n/4-k/2}, & 0 \leq k \leq s-1, \\ \|(I-P)\partial_x^k u(t)\|_{L^2} &\leq CE_1(1+t)^{-n/4-1/2-k/2}, & 0 \leq k \leq s-2. \end{aligned} \quad (4.2)$$

ただし, C は正定数, P は $\mathcal{M}$ への正射影である.

この形の減衰評価は, k に比べて可微分性指数 s が十分大きいという制限の下, [1] において初めて示された. 可微分性に細心の注意を払った形の減衰評価 (4.2) は [15] による. 定理 4, 定理 5 では可微分性指数に対し $s > n/2 + 1$ を仮定しているが, Besov 空間を用いることで, この制限を臨界指数 $s = n/2 + 1$ にまで緩めることが可能である. 初期値が $B_{2,1}^{n/2+1}$ の場合の時間大域解については [32] を, 初期値が $B_{2,1}^{n/2+1} \cap \dot{B}_{2,\infty}^{-n/2}$ の場合の減衰評価については [33, 34] を参照されたい.

5. 非対称な緩和項を持つ例と問題点

前節までの一般論は緩和行列 L の対称性を仮定したものであったが, L が非対称でも

$$\ker(L) = \ker(L^{sy}) \quad (5.1)$$

であれば, 自明な変更をするだけでその一般論が成立することが確認できる. ここで, L^{sy} は L の対称部分を表す. 一方, 近年, 緩和行列 L が非対称で (5.1) を満たさない興味ある例が発見され注目されている. それは梁の運動を記述する 1 次元モデルで摩擦型の消散効果を取り入れた **Timoshenko** 系である. この系は (1.1) で $n = 1$, $m = 4$ の例であり, その消散構造は定理 3 とは異なり,

$$\operatorname{Re} \lambda(i\xi) \leq -c\eta(\xi), \quad \eta(\xi) = |\xi|^2/(1 + |\xi|^2)^2 \quad (5.2)$$

で記述される ([6, 18]). ただし, c は正定数. この消散構造は高周波域では極めて脆弱で, 定量的な減衰評価では可微分性の損失が避けられない. この可微分性損失型の消散構造に起因する困難を克服するため, [7] では初期値に十分な正則性 $H^s \cap L^1$ ($s \geq 6$) を仮定することで, 非線形 Timoshenko 系の時間大域解の存在と減衰評価を示すことに成功した. その後, より精密な解析により, 時間大域解の存在は初期値が H^s ($s \geq 2$) の場合に, 減衰評価は初期値が $H^s \cap L^1$ ($s \geq 2$) の場合に証明された ([19]). さらに,

初期値が $B_{2,1}^{3/2}$ の場合の時間大域解の存在, 初期値が $B_{2,1}^{3/2} \cap \dot{B}_{2,\infty}^{-1/2}$ の場合の減衰評価も示されている ([21, 37]).

可微分性損失型の消散構造 (5.2) を持つ他の重要なモデルには, プラズマ物理における 3次元圧縮性 **Euler-Maxwell** 系がある. この系は (1.1) で $n = 3, m = 10$ の例であり, 他に 2つの拘束条件を有する. その消散構造は [2, 27] で明らかにされた. この系に対する時間大域解の存在は, 初期値が H^s で $s \geq 4$ の場合が [2] で, $s \geq 3$ の場合が [28] で示された. 減衰評価は, 初期値が $H^s \cap L^1$ で $s \geq 13$ の場合が [2] で, $s \geq 6$ の場合が [27] で, $s \geq 3$ の場合が [36] で示された. これらの結果は Besov 空間の場合に拡張されている. 初期値が $B_{2,1}^{5/2}$ の場合の時間大域解については [31] を, 初期値が $B_{2,1}^{5/2} \cap \dot{B}_{2,\infty}^{-3/2}$ の場合の減衰評価については [35] を参照されたい.

より複雑なモデルである 3次元圧縮性 **Euler-Cattaneo-Maxwell** 系は (1.1) で $n = 3, m = 14$ の例であり, 他に 2つの拘束条件を有する. この系の消散構造が (5.2) で記述されること, 初期値が H^s ($s \geq 3$) の場合に時間大域解が存在することは [13] で示されたが, その減衰評価や Besov 空間への一般化については未解決である.

次の形の可微分性損失型消散構造を持つ具体例も知られている.

$$\operatorname{Re} \lambda(i\xi) \leq -c\eta(\xi), \quad \eta(\xi) = |\xi|^4/(1 + |\xi|^2)^3 \quad (5.3)$$

摩擦型消散効果ではなく Cattaneo 則で記述される熱伝導効果を取り入れた Timoshenko-Cattaneo 系 ([20]) や, 時間記憶項で消散効果を取り入れた Timoshenko 系 ([26]) がその具体例である. これらのモデルに対する解析は今後の課題であろう. また, 可微分性損失型消散構造の一般的な特徴付けは大変興味ある重要な問題であるが, 未だ最終的な答えが得られていない. 消散構造 (5.2) および (5.3) の特徴付けの部分的な一般化については, それぞれ [25] および [26] を参照されたい. 定理 3 に匹敵する完全な一般論構築に向けての意欲的な取り組みが [24] でなされており, 今後の更なる進展が期待される.

参考文献

- [1] S. Bianchini, B. Hanouzet and R. Natalini, Asymptotic behavior of smooth solutions for partially dissipative hyperbolic systems with a convex entropy, *Comm. Pure Appl. Math.*, **60** (2007), 1559–1622.
- [2] R.-J. Duan, Global smooth flows for the compressible Euler-Maxwell system: Relaxation case, *J. Hyperbolic Differential Equations*, **8** (2011), 375–413.
- [3] K.O. Friedrichs and P.D. Lax, Systems of conservation equations with a convex extension, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **68** (1971), 1686–1688.
- [4] S.K. Godunov, An interesting class of quasilinear systems, *Dokl. Acad. Nauk SSSR*, **139** (1961), 521–523.
- [5] B. Hanouzet and R. Natalini, Global existence of smooth solutions for partially dissipative hyperbolic systems with a convex entropy, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **169** (2003), 89–117.
- [6] K. Ide, K. Haramoto and S. Kawashima, Decay property of regularity-loss type for dissipative Timoshenko system, *Math. Models Meth. Appl. Sci.*, **18** (2008), 647–667.
- [7] K. Ide and S. Kawashima, Decay property of regularity-loss type and nonlinear effects for dissipative Timoshenko system, *Math. Models Meth. Appl. Sci.*, **18** (2008), 1001–1025.
- [8] T. Kato, The Cauchy problem for quasi-linear symmetric hyperbolic systems, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **58** (1975), 181–205.

- [9] S. Kawashima, Global existence and stability of solutions for discrete velocity models of the Boltzmann equation, *Recent Topics in Nonlinear PDE, Lecture Notes in Num. Appl. Anal.*, **6**, Kinokuniya, Tokyo, 1983, 59–85.
- [10] S. Kawashima, Systems of a hyperbolic-parabolic composite type, with applications to the equations of magnetohydrodynamics, *Doctoral Thesis, Kyoto University*, 1984.
- [11] 川島秀一, 緩和的雙曲型保存則系の数学解析, 雑誌「数学」61巻3号, (2009年7月), 248–269.
- [12] S. Kawashima and Y. Shizuta, On the normal form of the symmetric hyperbolic-parabolic systems associated with the conservation laws, *Tôhoku Math. J.*, **40** (1988), 449–464.
- [13] S. Kawashima and Y. Ueda, Mathematical entropy and Euler-Cattaneo-Maxwell system, *Analysis and Applications*, **14** (2016), 101–143.
- [14] S. Kawashima and W.-A. Yong, Dissipative structure and entropy for hyperbolic systems of balance laws, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **174** (2004), 345–364.
- [15] S. Kawashima and W.-A. Yong, Decay estimates for hyperbolic balance laws, *ZAA (J. Anal. Appl.)*, **28** (2009), 1–33.
- [16] A. Matsumura and T. Nishida, The initial value problem for the equations of motion of viscous and heat-conductive gases, *J. Math. Kyoto Univ.*, **20** (1980), 67–104.
- [17] A. Matsumura and T. Nishida, The initial value problem for the equations of motion of compressible viscous and heat-conductive fluids, *Proc. Japan Acad.*, **55** (1979), 337–342.
- [18] N. Mori and S. Kawashima, Decay property for the Timoshenko system with Fourier’s type heat conduction, *J. Hyperbolic Differential Equations*, **11** (2014), 135–157.
- [19] N. Mori and S. Kawashima, Global existence and optimal decay of solutions to the dissipative Timoshenko system, “Mathematical Analysis of Viscous Incompressible Fluid”, *RIMS Kokyuroku*, **1971** (2015), 150–164.
- [20] N. Mori and S. Kawashima, Decay property of the Timoshenko-Cattaneo system, *Analysis and Applications*, **14** (2016), 393–413.
- [21] N. Mori, J. Xu and S. Kawashima, Global existence and optimal decay rates for the Timoshenko system: the case of equal wave speeds, *J. Diff. Equations*, **258** (2015), 1494–1518.
- [22] T. Nishida and K. Imai, Global solutions to the initial value problem for the nonlinear Boltzmann equation, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, **12** (1976), 229–239.
- [23] Y. Shizuta and S. Kawashima, Systems of equations of hyperbolic-parabolic type with applications to the discrete Boltzmann equation, *Hokkaido Math. J.*, **14** (1985), 249–275.
- [24] Y. Ueda, New stability criterion for the dissipative linear system and analysis of Bresse system, *Symmetry* **2018**, 10, 542.
- [25] Y. Ueda, R.-J. Duan and S. Kawashima, Decay structure for symmetric hyperbolic systems with non-symmetric relaxation and its applications, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **205** (2012), 239–266.
- [26] Y. Ueda, R.-J. Duan and S. Kawashima, New structural conditions on decay property with regularity-loss for symmetric hyperbolic systems with non-symmetric relaxation, *J. Hyperbolic Differential Equations*, **15** (2018), 149–174.
- [27] Y. Ueda and S. Kawashima, Decay property of regularity-loss type for the Euler-Maxwell system, *Methods and Applications of Analysis*, **18** (2011), 245–268.
- [28] Y. Ueda, S. Wang and S. Kawashima, Dissipative structure of the regularity-loss type and time asymptotic decay of solutions for the Euler-Maxwell system, *SIAM J. Math. Anal.*, **44** (2012), 2002–2017.
- [29] S. Ukai, Les solutions globales de l’équation nonlinéaire de Boltzmann dans l’espace tout entier et dans le semi-espace, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **282A** (1976), 317–320.

- [30] T. Umeda, S. Kawashima and Y. Shizuta, On the decay of solutions to the linearized equations of electro-magneto-fluid dynamics, *Japan J. Appl. Math.*, **1** (1984), 435–457.
- [31] J. Xu, Global classical solutions to the compressible Euler-Maxwell equations, *SIAM J. Math. Anal.*, **43** (2011), 2688–2718.
- [32] J. Xu and S. Kawashima, Global classical solutions for partially dissipative hyperbolic systems of balance laws, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **211** (2014), 513–553.
- [33] J. Xu and S. Kawashima, The optimal decay estimates on the framework of Besov spaces for generally dissipative systems, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **218** (2015), 275–315.
- [34] J. Xu and S. Kawashima, Frequency-localization Duhamel principle and its application to the optimal decay of dissipative systems in low dimensions, *J. Diff. Equations*, **261** (2016), 2670–2701.
- [35] J. Xu and S. Kawashima, The frequency-localization technique and minimal decay-regularity for Euler-Maxwell equations, *J. Math. Anal. Appl.*, **446** (2017), 1537–1554.
- [36] J. Xu, N. Mori and S. Kawashima, L^p - L^q - L^r estimates and minimal decay regularity for compressible Euler-Maxwell equations, *J. Math. Pures Appl.*, **104** (2015), 965–981.
- [37] J. Xu, N. Mori and S. Kawashima, Global existence and minimal decay regularity for the Timoshenko system: The case of non-equal wave speeds, *J. Diff. Equations*, **259** (2015), 5533–5553.
- [38] W.-A. Yong, Entropy and global existence for hyperbolic balance laws, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **172** (2004), 247–266.