Weyl-type lower bound for non-scattering energies of time-harmonic acoustic equations

森岡 悠 (同志社大学理工学部)*

概 要

音響波動方程式に対する定常散乱理論を考える。媒質に不均質性があるとき、通常は入射波に対して散乱波が発生するのだが、波数と入射波がある一定の条件を満たすとき、散乱波が発生せず、入射波が不均質性に影響を受けず透過してしまうように見える場合がある。このような波数を非散乱エネルギー(non-scattering energy)と言う。

本講演では、不均質性が有界領域の内部にのみ分布している場合について、非散乱エネルギーが存在し、その個数に関して Weyl 則が成立していることを示す。本講演の内容は、庄司直高氏(開智未来中学校・高等学校)との共同研究に基づいている。

1. 序

次の定常音響波動方程式を考える：

$$-\Delta u = \lambda n(x)u \quad \text{on } \mathbf{R}^d, \quad \lambda > 0.$$

ここで、 $n \in C(\mathbf{R}^d)$ は次の条件を満たすものとする：

- Ω を $\text{supp}(n(x) - 1)$ の内部とする。 Ω はなめらかな境界を持つ連結な有界領域である。
- 外部領域 $\Omega^c = \mathbf{R}^d \setminus \bar{\Omega}$ は連結である。
- $n|_{\bar{\Omega}} \in C^\infty(\bar{\Omega})$ 。
- 任意の $x \in \mathbf{R}^d$ に対して $n(x) > 0$ 。
- 任意の $x \in \partial\Omega$ に対して $\partial_\nu n(x) \neq 0$ である。ここで、 $x \in \partial\Omega$ における Ω に対する外向き単位法ベクトルを $\nu(x)$ とすると、 $\partial_\nu n(x) = \lim_{y \rightarrow x, y \in \Omega} \nu(x) \cdot \nabla n(y)$ である。

なお、 n が $\partial\Omega$ で不連続な場合でも同様の議論は可能であるが、簡単のため、以下の議論では全てこの仮定で統一する。音響波動方程式に対する散乱理論では、入射波に対して散乱波がどのように表されるかを考える。物理的に最も典型的なものとして、平面波 $u^i(x) = e^{i\sqrt{\lambda}x \cdot \omega}$, $\omega \in S^{d-1}$, を入射波として選んだ場合には、音響波動方程式の解は、入射波と散乱波の和 $u = u^i + u^s$ によって表され、散乱波 u^s は空間遠方で漸近挙動

$$u^s(x) \sim C(\lambda)r^{-(d-1)/2}e^{i\sqrt{\lambda}r}A(\lambda;\omega,\theta), \quad \theta = x/|x| \in S^{d-1}, \quad r = |x|,$$

本研究は科研費(課題番号:16K17630)の助成を受けたものである。

2010 Mathematics Subject Classification: 35P25, 35P20

キーワード: Non-scattering energy, Interior transmission eigenvalue, Weyl's law

* 〒610-0394 京都府京田辺市多々羅都谷 1-3

e-mail: hisashimorioka@gmail.com

を満たす. このとき現れる関数 $A(\lambda; \theta, \omega)$ を入射方向 ω , 散乱方向 θ に対する散乱振幅と言ひ, 散乱振幅はある作用素 $A(\lambda) \in \mathbf{B}(L^2(S^{d-1}))$ の積分核であることが知られている. 作用素 $A(\lambda)$ は, 入射波として Herglotz 波

$$u^i(x) = (2\pi)^{-d/2} \int_{S^{d-1}} e^{i\sqrt{\lambda}x \cdot \omega} \phi(\omega) d\Sigma, \quad \phi \in L^2(S^{d-1}),$$

を取った場合の散乱波に現れる :

$$u^s(x) \sim C(\lambda) r^{-(d-1)/2} e^{i\sqrt{\lambda}r} (A(\lambda)\phi)(\theta), \quad \theta = x/|x| \in S^{d-1}, \quad r = |x|.$$

ここで, Herglotz 波における入射方向に関する重みとなる $\phi \in L^2(S^{d-1})$ が $A(\lambda)$ の固有値 0 に対する固有関数となっている場合には, 空間遠方において $u \sim u^i$ となり, 散乱波が発生せず入射波が透過する. そこで, 次のように定義する.

Definition 1.1 $A(\lambda)$ が固有値 0 を持つ, すなわち, $\phi \in L^2(S^{d-1})$ が $A(\lambda)\phi = 0$ の非自明な解であるとき, $\lambda > 0$ を非散乱エネルギー (Non-scattering energy, NSE) と言う.

非散乱エネルギーの研究は, Colton-Monk [4] に遡る. ここでは n が球対称な関数である場合について NSE が存在することが示されている. NSE の存在を示す研究については, [4] 以降本質的な進展が得られていなかったようである.¹ 他方で, 最近では Gell-Redman-Hassell [7], Blåsten et al. [2], Elschner-Hu [5], Päivärinta et al. [15] により, NSE を持たないような摂動の例が調べられている. [7] では Schrödinger 作用素 $-\Delta + V$ について, $V \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ であって, NSE を持たないポテンシャルの例が与えられている. [2], [5], [15] では音響, Schrödinger 作用素それぞれの場合が調べられており, 特に摂動の台が一定の条件を満たす角を持つ場合に NSE を持たないことが示されている.

非散乱エネルギーを調べる一つの方法として, Ω 内部における interior transmission eigenvalue (ITE) に帰着させる方法がある. $\lambda > 0$ が NSE であると仮定すると, 対応する入射波に対しては, 空間遠方での漸近挙動として $u(x) - u^i(x) = o(r^{-(d-1)/2})$ となるが, Helmholtz 方程式に対する Rellich 型一意性定理から, Ω の外部では $u - u^i = 0$ であることが分かる. このことから, 次の連立境界値問題が導かれる :

$$(-n^{-1}\Delta - \lambda)v = 0 \quad \text{in } \Omega,$$

$$(-\Delta - \lambda)w = 0 \quad \text{in } \Omega,$$

$$v = w, \quad \partial_\nu v = \partial_\nu w \quad \text{on } \partial\Omega.$$

ここで, $v = u|_{\bar{\Omega}}$, $w = u^i|_{\bar{\Omega}}$ である. この連立境界値問題 (interior transmission eigenvalue problem, ITEP) が非自明解を持つとき, λ を interior transmission eigenvalue (ITE) と言う. 一般に ITEP は非自己共役な問題であるため, ITE は複素数でありうる. また, ITE の集合は必ずしも離散的集合とは限らない. 従って, NSE と ITE は集合として一般には一致しないが, NSE の集合は ITE の部分集合となる.

Colton-Monk [4] は, 球対称な系に対する ITEP に問題を帰着した. このように, ITEP は散乱理論から導かれる境界値問題であるが, 他方で多くの論文では ITEP が独立に

¹ 逆散乱問題のある種の数値計算法で解く場合には, λ が NSE であると計算上の困難を生ずることが知られている. そのため, NSE はこれまでは特に逆散乱問題の分野で関心を持たれてきた問題のようである. 一方, $A(\lambda)$ は $L^2(S^{d-1})$ 上のコンパクト作用素であり, 0 は $A(\lambda)$ のスペクトルの集積点であるから, $A(\lambda)$ が固有値 0 を持つかどうかの判定は自明な問題ではない.

考察されている。² ITEP の先行研究は数多くあるが、本講演では Lakshtanov-Vainberg [13] による正の ITE に対する Weyl 則の導出手法と結果を適用する。ここでは、Dirichlet-Neumann map (D-N map) を $\partial\Omega$ 上の楕円型擬微分作用素として表し、解析的 Fredholm 理論を用いることによって ITE が離散的に分布することを示し、かつ個数に関する漸近的な下からの評価が与えられている。また、最近では、Vodev [19], Petkov-Vodev [16] により、複素数平面における ITE の非存在領域の評価と、ITE の個数に関する Weyl 則に関するより鋭い評価も得られている。本講演での NSE への応用としては [13] の主張で十分であるが、Morioka-Shoji [14] では、連立する各方程式が位相が異なる境界付き多様体上で成立する場合まで許した ITEP を検討し、[13] の結果が同様に成り立つことを示した。

本講演での主結果は次の通りである ([14])。 $\gamma = \text{sign}(\partial_\nu n|_{\partial\Omega})$ とおく。さらに、

$$V_n = (2\pi)^{-d} \text{vol}(B_d) \int_{\Omega} \sqrt{n(x)} dx, \quad V_0 = (2\pi)^{-d} \text{vol}(B_d) \text{vol}(\Omega),$$

と定める。ただし、 B_d は $\mathbf{R}^d$ における単位球である。

Theorem 1.2 $\alpha > 0$ は十分小さな定数であるとする。

(1) NSE は (α, ∞) の離散的な部分集合をなす。

(2) $N_{NSE}(\lambda) = \#\{\text{NSE} \in (\alpha, \lambda]\}$ とおく。 $(\alpha, \lambda]$ における *singular ITE* の個数は、 $\lambda \rightarrow \infty$ のとき $o(\lambda^{d/2})$ であると仮定する。さらに、もし $\gamma(V_n - V_0) > 0$ ならば、

$$N_{NSE}(\lambda) \geq \gamma(V_n - V_0)\lambda^{d/2} + o(\lambda^{d/2}), \quad \lambda \rightarrow \infty,$$

を満たす。

なお、singular ITE の厳密な定義は後述するが、これに関する主結果の仮定を満たすには、例えば Ω における $-n^{-1}\Delta$ と $-\Delta$ の共通の Dirichlet 固有値の個数が $o(\lambda^{d/2})$ であれば十分である。

証明において重要な事実は、 $A(\lambda)$ と $\partial\Omega$ 上の D-N map が 1 対 1 に対応していることである。このことは逆散乱問題ではよく知られた事実である ([9], [10], [11], [6])。逆散乱問題では、 Ω における Dirichlet 固有値は避けて議論するのだが、本講演においては Dirichlet 固有値についても議論しなければならない。その場合には、D-N map を Laurent 展開し、その正則部分がある $L^2(\partial\Omega)$ の部分空間において $A(\lambda)$ と対応することになる。

2. ITE と D-N map

2.1. D-N map

M を境界付き相対コンパクトな C^∞ -Riemann 多様体、 ∂M を M のなめらかな境界とする。 $c \in C^\infty(\overline{M})$, $c(x) > 0$, $x \in \overline{M}$, に対して、次の Dirichlet 問題を考える：

$$-c\Delta_M u = \lambda u \quad \text{in } M, \quad u = f \quad \text{on } \partial M.$$

これに対し、D-N map を

$$\Lambda_c(\lambda)f = \partial_\nu u \quad \text{on } \partial M,$$

²ITEP を独立に考えるときには、必ずしも解の一方が散乱問題における入射波と同じ形である必要はなく、単に非自明解 $(v, w) \in H^2(\Omega) \times H^2(\Omega)$ を求める。

で定義する. $-c\Delta_M$ は $L^2(M, c^{-1}dV)$ で自己共役である. Dirichlet 固有値の集合を $\sigma_D(-c\Delta_M)$ で表す. 固有値は増加列 $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ をなす. 対応する正規直交固有関数系を $\{\phi_j\}_{j=1}^\infty$ とする. $\lambda \notin \sigma_D(-c\Delta_M)$ のとき, $\Lambda_c(\lambda) \in \mathbf{B}(H^{3/2}(\partial M); H^{1/2}(\partial M))$ は well-defined で, λ に関して有理型関数となる. また, $\sigma_D(-c\Delta_M)$ に属する各点では1次の極を持つ.

以下に述べる D-N map の詳しい性質は, [12] を参照されたい.

Proposition 2.1 (1) $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \sigma_D(-c\Delta_M)$ に対し, $\Lambda_c(\lambda)$ は次のように表される:

$$(\Lambda_c(\lambda)f)(x) = - \int_{\partial M} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\partial_\nu \phi_j)(x)(\partial_\nu \phi_j)(y)}{\lambda_j - \lambda} f(y) dS(y), \quad x \in \partial M,$$

ただし, $f \in H^{3/2}(\partial M)$, $dS(x)$ は ∂M の測度である.

(2) $\lambda_0 \in \sigma_D(-c\Delta_M)$ の近傍で, $\Lambda_c(\lambda)$ は Laurent 展開

$$\Lambda_c(\lambda) = \frac{Q_{\lambda_0}}{\lambda_0 - \lambda} + H_{\lambda_0}(\lambda),$$

を持つ. μ を λ_0 の多重度とし, $\{\phi_{j_k}\}_{k=1}^\mu$ を λ_0 に対する直交固有関数系とすれば, 留数 Q_{λ_0} は

$$(Q_{\lambda_0}f)(x) = - \sum_{k=1}^{\mu} \int_{\partial M} (\partial_\nu \phi_{j_k})(y) f(y) dS(y) (\partial_\nu \phi_{j_k})(x), \quad f \in H^{3/2}(\partial M),$$

と表される. 正則部分 $H_{\lambda_0}(\lambda) \in \mathbf{B}(H^{3/2}(\partial M); H^{1/2}(\partial M))$ は λ_0 の近傍で解析的である.

$\lambda_0 \in \sigma_D(-c\Delta_M)$ の近傍での D-N map の構造を調べるには, 固有関数の Neumann 境界値からなる $L^2(\partial M)$ の部分空間について述べておく必要がある. $\lambda_0 \in \sigma_D(-c\Delta_M)$ とし, μ をその多重度とする. また, 対応する直交固有関数系を $\{\phi_{j_k}\}_{k=1}^\mu$ とし, これが生成する固有空間を $E(\lambda_0)$ で, $\partial_\nu \phi_{j_k}$, $k = 1, \dots, \mu$, が生成する $L^2(\partial M)$ の部分空間を $B(\lambda_0)$ で表す.

Lemma 2.2 $\lambda_0 \in \sigma_D(-c\Delta_M)$ のとき, Dirichlet 問題

$$-c\Delta_M u = \lambda_0 u \quad \text{in } M, \quad u = f \quad \text{on } \partial M,$$

が $H^2(M)$ で非自明解を持つことは, $f \in H^{3/2}(\partial M) \cap B(\lambda_0)^\perp$ であることが必要十分である. このとき, 任意の定数 α_{j_k} , $k = 1, \dots, \mu$, により,

$$u = - \sum_{j \notin \{j_k\}_{k=1}^\mu} \frac{1}{\lambda_j - \lambda} \int_{\partial M} (\partial_\nu \phi_j)(y) f(y) dS(y) \phi_j + \sum_{k=1}^{\mu} \alpha_{j_k} \phi_{j_k},$$

と表される. 特に, $H^2(M) \cap E(\lambda_0)^\perp$ に属する解は一意的である.

さて, ITE は D-N map を用いて表されることを示そう. 次の ITEP を考える: M_1, M_2 を境界付き相対コンパクトな C^∞ -Riemann 多様体とし, 境界を $\Gamma = \partial M_1 = \partial M_2$ とする. 正の値を取る関数 $c_1 \in C^\infty(\overline{M_1})$, $c_2 \in C^\infty(\overline{M_2})$ が与えられているとする. また, 簡単のため, 各多様体上の計量 g_1, g_2 は Γ の十分小さな近傍で $g_1 = g_2$ を満たすとしよう (実際にはもう少し緩い条件で良い). $(u_1, u_2) \in H^2(M_1) \times H^2(M_2)$ が,

$$-c_1 \Delta_{M_1} u_1 = \lambda u_1 \quad \text{in } M_1,$$

$$\begin{aligned} -c_2\Delta_{M_2}u_2 &= \lambda u_2 \quad \text{in } M_2, \\ u_1 &= u_2, \quad \partial_{\nu_1}u_1 = \partial_{\nu_2}u_2 \quad \text{on } \Gamma, \end{aligned}$$

の非自明解であるとき, λ を ITE という.

各 M_j に付随する D-N map を $\Lambda_{c_j}(\lambda)$ で表す. さらに, $\lambda_0 \in \sigma_D(-c_1\Delta_{M_1}) \cup \sigma_D(-c_2\Delta_{M_2})$ のとき,

$$\Lambda_{c_1}(\lambda) - \Lambda_{c_2}(\lambda) = \frac{Q_{\lambda_0}}{\lambda_0 - \lambda} + H_{\lambda_0}(\lambda),$$

と Laurent 展開される. $\lambda \notin \sigma_D(-c_1\Delta_{M_1}) \cup \sigma_D(-c_2\Delta_{M_2})$ のとき,

$$\text{Ker}(\Lambda_{c_1}(\lambda) - \Lambda_{c_2}(\lambda)) = \{f \in H^{3/2}(\Gamma); (\Lambda_{c_1}(\lambda) - \Lambda_{c_2}(\lambda))f = 0\},$$

$\lambda = \lambda_0 \in \sigma_D(-c_1\Delta_{M_1}) \cup \sigma_D(-c_2\Delta_{M_2})$ のとき,

$$\text{Ker}(\Lambda_{c_1}(\lambda) - \Lambda_{c_2}(\lambda)) = \{f \in H^{3/2}(\Gamma); Q_{\lambda_0}f = H_{\lambda_0}(\lambda)f = 0\},$$

と定義する.

Lemma 2.3 (1) $\lambda \notin \sigma_D(-c_1\Delta_{M_1}) \cap \sigma_D(-c_2\Delta_{M_2})$ とする. $\lambda \in \text{ITE}$ であることは, $\text{Ker}(\Lambda_{c_1}(\lambda) - \Lambda_{c_2}(\lambda)) \neq \{0\}$ であることと同値である. その多重度は $\dim(\text{Ker}(\Lambda_{c_1}(\lambda) - \Lambda_{c_2}(\lambda)))$ と一致する.

(2) $\lambda \in \sigma_D(-c_1\Delta_{M_1}) \cap \sigma_D(-c_2\Delta_{M_2})$ とする. $\lambda \in \text{ITE}$ であることは, $\text{Ker}(\Lambda_{c_1}(\lambda) - \Lambda_{c_2}(\lambda)) \neq \{0\}$, または, $\Lambda_{c_1}(\lambda)$ と $\Lambda_{c_2}(\lambda)$ の留数が共通の値域を持つことと同値である. その多重度は $\dim(\text{Ker}(\Lambda_{c_1}(\lambda) - \Lambda_{c_2}(\lambda)))$ 及び留数の共通の値域の次元の和と一致する.

Remark. (2) の条件のうち, D-N map の留数の共通値域から発生する ITE を, 特に *singular ITE* と呼ぶ. Theorem 1.2 で現れたのも, ここで定義されたものである.

2.2. D-N map の主表象と Fredholm 理論

Lakshmanov-Vainberg [13], Vainberg-Grusin [18] により, Γ の各点近傍において部分 Fourier 変換を用いて D-N map の Parametrix を計算する方法が与えられている. ここでは結果のみを述べる. 次を仮定する. Morioka-Shoji [14] での仮定よりも強いが, 本講演において NSE に応用するためにはこれで十分である.

(A-1) M_1, M_2 の Γ の十分小さい近傍において $g_1 = g_2$ である. また, 任意の $x \in \Gamma$ において, $c_1(x) = c_2(x)$, $(\partial_{\nu_1}c_1)(x) \neq (\partial_{\nu_2}c_2)(x)$ である.

Lemma 2.4 (1) $\lambda \notin \sigma_D(-c_1\Delta_{M_1}) \cup \sigma_D(-c_2\Delta_{M_2}) \cup \{0\}$ とする. このとき, $\Lambda_{c_1}(\lambda) - \Lambda_{c_2}(\lambda) \in \mathbf{B}(H^{3/2}(\Gamma); H^{7/2}(\Gamma))$ なる楕円型擬微分作用素であり, その主表象は

$$\frac{\lambda\beta(\xi')((\partial_{\nu_1}n_1)(x) - (\partial_{\nu_2}n_2)(x))}{4\sum_{j,k=1}^{d-1}\tilde{g}^{jk}(x)\xi_j\xi_k}, \quad (x, \xi) \in T^*\Gamma,$$

ただし, $n_j = c_j^{-1}$, また $\tilde{g} = (\tilde{g}^{jk})$ は Γ 上の Riemann 計量であり, $\beta \in C^\infty(\mathbf{R}^{d-1})$ は $\xi' = 0$ の近傍で $\beta(\xi') = 0$, 遠方で $\beta(\xi') = 1$ となる関数である.

(2) $\lambda \in (\sigma_D(-c_1\Delta_{M_1}) \cup \sigma_D(-c_2\Delta_{M_2})) \setminus \{0\}$ とする. このとき, $\Lambda_{c_1}(\lambda) - \Lambda_{c_2}(\lambda)$ の正則部分は $\mathbf{B}(H^{3/2}(\Gamma); H^{7/2}(\Gamma))$ なる楕円型擬微分作用素であり, その主表象は (1) と同じ形で表される.

このことから、 $\Lambda_{c_1}(\lambda) - \Lambda_{c_2}(\lambda)$ に対して Fredholm 理論が適用できるが、ITE への応用の際には、さらに $\lambda \in \mathbf{C}$ をパラメータとする解析的 Fredholm 理論を用いる。次の結果を用いる ([2])。

Theorem 2.5 $D \subset \mathbf{C}$ を連結な領域、 H_1, H_2 を Hilbert 空間とする。作用素値関数 $A(z) : H_1 \rightarrow H_2, z \in D$, が高々有限次の極を持つ有理型関数、また各 z に対して Fredholm であるとする。ある点 $z_0 \in D$ において逆作用素 $A(z_0)^{-1} : H_2 \rightarrow H_1$ が存在するならば、 $A(z)^{-1}$ は D で高々有限次の極を持つ有理型関数であり、各 $z \in D$ に対して Fredholm である。

この定理により、 $\Lambda_{c_1}(\lambda) - \Lambda_{c_2}(\lambda)$ がある一点 $\lambda_0 \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ で可逆であれば、ある $\mathbf{C}$ の離散部分集合 S' として、 $\mathbf{C} \setminus (\{0\} \cup S')$ で可逆であることが分かる。従って、次の事実が言える。

Corollary 2.6 ある $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ で $\Lambda_{c_1}(\lambda) - \Lambda_{c_2}(\lambda)$ が可逆ならば、ITE は離散的に分布し、集積点は存在すれば 0 及び無限遠である。

応用上はある点 λ で $\Lambda_{c_1}(\lambda) - \Lambda_{c_2}(\lambda)$ が可逆であることを示せば十分であるが、parameter ellipticity に関する Grubb [8] の結果を用いれば、より強いことが言える。 $\sqrt{\lambda} = \tau e^{i\theta}$, $\tau > 0, \theta \in \mathbf{R}$, と表し、

$$R(\tau) = \tau^{-2} e^{-2i\theta} (\Lambda_{c_1}(\tau^2 e^{2i\theta}) - \Lambda_{c_2}(\tau^2 e^{2i\theta})),$$

とおく。

Lemma 2.7 $R(\tau)$ の τ に関する parameter elliptic pseudo-differential operator としての主表象は

$$\frac{(\partial_\nu n_1)(x) - (\partial_\nu n_2)(x)}{4(\sum_{j,k=1}^{d-1} \tilde{g}^{jk}(x) \xi_j \xi_k - \tau^2 e^{2i\theta} n(x))}, \quad (x, \xi) \in T^*\Gamma,$$

ただし、 $n(x) = c_1(x)^{-1} = c_2(x)^{-1}, x \in \Gamma$, である。さらに、 $\lambda = \tau^2 e^{2i\theta} \in \mathbf{C} \setminus [0, \infty)$ のとき、十分大きい $\tau > 0$ に対して、 $R(\tau)^{-1} \in \mathbf{B}(H^{m,\tau}(\Gamma); H^{m-2,\tau}(\Gamma))$ が存在する。ただし、 $H^{m,t}(\Gamma), t \geq 1$, はノルム

$$\|f\|_{H^{m,t}(\Gamma)}^2 = \|f\|_{H^m(\Gamma)}^2 + t^{2m} \|f\|_{L^2(\Gamma)}^2,$$

で定義される Hilbert 空間である。

$\mathbf{S}_0$ を原点を中心とする $(0, \infty)$ と共有点を持たない扇形とする。また、 $\mathbf{S}_0^\epsilon = \mathbf{S}_0 \cap \{\lambda \in \mathbf{C}; |\lambda| \geq 1\}$ とおく。これまでの議論をまとめて、次のことが示される。

Theorem 2.8 ITE の集合は $\mathbf{C}$ の離散的な部分集合をなし、集積点は存在すれば 0 及び無限遠である。さらに、 $\mathbf{S}_0^\epsilon$ には高々有限個の ITE が存在する。

3. 正の ITE に関する Weyl 則

正の ITE に関する Weyl 則の基礎になるのは、 $\sigma_D(-c_j \Delta_{M_j})$ に対する Weyl 則である ([17])。

Theorem 3.1 $N_j(\lambda) = \#\{k ; \lambda_k \leq \lambda, \lambda_k \in \sigma_D(-c_j \Delta_{M_j})\}$ とする. $x \in M_j$ について $\mathcal{O}_j(x) = \{\xi \in \mathbf{R}^d ; c_j(x) \sum_{k,l=1}^d \xi_k \xi_l \leq 1\}$,

$$v(\mathcal{O}_j(x)) = \int_{\mathcal{O}_j(x)} d\xi,$$

と定義する. $\lambda \rightarrow \infty$ のとき,

$$N_j(\lambda) = V_j \lambda^{d/2} + O(\lambda^{(d-1)/2}), \quad V_j = (2\pi)^{-d} \int_{M_j} v(\mathcal{O}_j(x)) dV_j,$$

を満たす.

さて, M_1, M_2 は Riemann 多様体であると仮定したため, Γ は複数の連結成分を持つても良い. そこで, 仮定 (A-1) に加えて, 次の仮定を追加する.

(A-2) Γ 上の全ての点で $\partial_{\nu_1} c_1 - \partial_{\nu_2} c_2$ は符号を変えない,

以下, $\gamma = \text{sign}(\partial_{\nu_1} c_1|_{\Gamma} - \partial_{\nu_2} c_2|_{\Gamma})$, $D_{\Gamma} = -\Delta_{\Gamma} + 1$ に対して,

$$B(\lambda) = \gamma D_{\Gamma}^{3/4} (\Lambda_{c_1}(\lambda) - \Lambda_{c_2}(\lambda)) D_{\Gamma}^{3/4},$$

と定義する. $B(\lambda)$ は, $\lambda \notin \sigma_D(-c_1 \Delta_{M_1}) \cup \sigma_D(-c_2 \Delta_{M_2})$ のとき Γ 上の 1 階擬微分作用素となるため, コンパクト作用素の固有値集積の問題を回避できる. さらに, D_{Γ} は可逆であるから, Lemma 2.3 の主張は $\Lambda_{c_1}(\lambda) - \Lambda_{c_2}(\lambda)$ を $B(\lambda)$ に置き換えても成り立つ.

Lemma 3.2 $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ が $B(\lambda)$ の極ではないとき, $B(\lambda)$ は対称な 1 階楕円型擬微分作用素であり, 主表象は

$$\frac{\lambda \gamma ((\partial_{\nu_1} n_1)(x) - (\partial_{\nu_2} n_2)(x))}{4} \left(\sum_{j,k=1}^{d-1} \tilde{g}^{jk}(x) \xi_j \xi_k \right)^{1/2}, \quad (x, \xi) \in T^* \Gamma,$$

を持つ. $\sigma(B(\lambda))$ は離散的であり, 実固有値 $\{\mu_j(\lambda)\}_{j=1}^{\infty}$ からなる. $j \rightarrow \infty$ のとき, $|\mu_j(\lambda)| \rightarrow \infty$ である.

$B(\lambda)$ の主表象は正であり, また $B(\lambda)$ は λ について有理型であるから, さらに以下のこと言える. λ_0 が $B(\lambda)$ の極のとき, λ_0 の近傍での $\mu_j(\lambda)$ の Laurent 展開を

$$\mu_j(\lambda) = \frac{\text{res}_{\lambda=\lambda_0} \mu_j(\lambda)}{\lambda_0 - \lambda} + \tilde{\mu}_j(\lambda),$$

とする.

Lemma 3.3 $B(\lambda)$ が λ_0 の近傍で解析的ならば, $\mu_j(\lambda)$ もこの近傍で解析的である. λ_0 が $B(\lambda)$ の極であり, p が $B(\lambda)$ の留数 $\text{res}_{\lambda=\lambda_0} B(\lambda)$ の階数であるとき, p 個の固有値 $\mu_j(\lambda)$ とその固有関数は λ_0 で極を持ち, $\text{res}_{\lambda=\lambda_0} \mu_j(\lambda)$ は $\text{res}_{\lambda=\lambda_0} B(\lambda)$ の固有値である.

十分小さい $\alpha > 0$ を取り, $\{\lambda_j^T\}$ を (α, ∞) に含まれる ITE の集合とする. さらに,

$$N_T(\lambda) = \#\{j ; \alpha < \lambda_j^T \leq \lambda\},$$

と定める. $N_T(\lambda)$ は, singular ITE の個数と, ある $\mu_j(\lambda)$ について $\mu_j(\lambda) = 0$ となるような $\lambda \in (\alpha, \infty)$ の個数によって評価される.

$$N_-(\lambda) = \#\{j; \mu_j(\lambda) < 0\}, \quad \lambda \notin \{\lambda_j^T\} \cup \sigma_D(-c_1\Delta_{M_1}) \cup \sigma_D(-c_2\Delta_{M_2}),$$

とおく. λ' が α から ∞ に向かって実軸上を動くとする. $N_-(\lambda')$ が変化するのは, λ' が $\mu_j(\lambda') = 0$ となる点を通るか, $B(\lambda)$ の極を通ったときである. そこで, λ' が α から $\lambda > \alpha$ へ動いたときの最初の場合による変化を $\mathcal{N}_0(\lambda)$ で, 後者の場合の変化を $\mathcal{N}_{-\infty}(\lambda)$ で表すことにすると,

$$N_-(\lambda) - N_-(\alpha) = \mathcal{N}_0(\lambda) + \mathcal{N}_{-\infty}(\lambda),$$

となる. また, λ_0 が $B(\lambda)$ の極であるとき, 十分小さい $\epsilon > 0$ に対して

$$\delta\mathcal{N}_{-\infty}(\lambda_0) = N_-(\lambda_0 + \epsilon) - N_-(\lambda_0 - \epsilon),$$

とおく.

$\mu_j(\lambda)$ の Laurent 展開から, 次のことが分かる.

Lemma 3.4 $\lambda_0 \in (\alpha, \infty)$ は $B(\lambda)$ の極であるとする. $s_{\pm}(\lambda_0) = \{j; \pm \text{res}_{\lambda=\lambda_0} \mu_j(\lambda) > 0\}$ とおく. このとき, $\delta\mathcal{N}_{-\infty}(\lambda_0) = s_+(\lambda_0) - s_-(\lambda_0)$ が成り立つ.

λ_0 が $B(\lambda)$ の極のとき, $\Lambda_{c_1}(\lambda)$ と $\Lambda_{c_2}(\lambda)$ の少なくともどちらか一方の極であるから, $m_j(\lambda_0)$ を $\text{res}_{\lambda=\lambda_0} \Lambda_{c_j}(\lambda)$ の値域の次元, $m(\lambda_0)$ を $\text{res}_{\lambda=\lambda_0} \Lambda_{c_1}(\lambda)$ と $\text{res}_{\lambda=\lambda_0} \Lambda_{c_2}(\lambda)$ の共通値域の次元とする. $m_j(\lambda_0)$ は, $-c_j\Delta_{M_j}$ の固有値の多重度に対応していることに注意されたい.

Lemma 3.4 と $B(\lambda)$ の Laurent 展開から次の補題も示せる.

Lemma 3.5 $\lambda_0 \in (\alpha, \infty)$ は $B(\lambda)$ の極であるとする.

- (1) $\lambda \notin \sigma_D(-c_1\Delta_{M_1}) \cap \sigma_D(-c_2\Delta_{M_2})$ のとき, $\delta\mathcal{N}_{-\infty}(\lambda_0) = \gamma(m_2(\lambda_0) - m_1(\lambda_0))$.
- (2) $\lambda \in \sigma_D(-c_1\Delta_{M_1}) \cap \sigma_D(-c_2\Delta_{M_2})$ のとき, $|\delta\mathcal{N}_{-\infty}(\lambda_0) - \gamma(m_2(\lambda_0) - m_1(\lambda_0))| \leq m(\lambda_0)$.

以上により, ITE に関する Weyl 則を得られる.

Theorem 3.6 (A-1), (A-2) を仮定するとき, $\lambda > \alpha$ に対して,

$$N_T(\lambda) \geq \gamma \sum_{\alpha < \lambda' \leq \lambda} (m_1(\lambda') - m_2(\lambda')) - N_-(\alpha),$$

が成り立つ. ここで, 右辺の和は $\lambda' \in (\alpha, \lambda] \cap (\sigma_D(-c_1\Delta_{M_1}) \cup \sigma_D(-c_2\Delta_{M_2}))$ について取る. さらに, $\gamma(V_1 - V_2) > 0$ の場合には, $\lambda \rightarrow \infty$ のとき

$$N_T(\lambda) \geq \gamma(V_1 - V_2)\lambda^{d/2} + O(\lambda^{(d-1)/2}),$$

により評価される.

Sketch of the proof. Singular ITE の個数について, 多重度をこめて

$$N_{sng}(\lambda) = \#\{\text{singular ITEs} \in (\alpha, \lambda]\},$$

とおく. $\mathcal{N}_0(\lambda) + N_{sng}(\lambda) \leq N_T(\lambda)$ に注意する. Lemma 3.5 の $|\delta\mathcal{N}_{-\infty}(\lambda_0) - \gamma(m_2(\lambda_0) - m_1(\lambda_0))| \leq m(\lambda_0)$ において, 極に関して両辺の和を取ると,

$$\left| \mathcal{N}_{-\infty}(\lambda) - \gamma \sum_{\alpha < \lambda' \leq \lambda} (m_2(\lambda') - m_1(\lambda')) \right| \leq N_{sng}(\lambda),$$

を得る. この評価と $N_-(\lambda) - N_-(\alpha) = \mathcal{N}_0(\lambda) + \mathcal{N}_{-\infty}(\lambda)$ を合わせると,

$$N_-(\lambda) - N_-(\alpha) + \gamma \sum_{\alpha < \lambda' \leq \lambda} (m_2(\lambda') - m_1(\lambda')) \leq \mathcal{N}_0(\lambda) + N_{sng}(\lambda) \leq N_T(\lambda),$$

を得る. これで定理の最初の評価が示された.

$m_j(\lambda_0)$ は, $-c_j \Delta_{M_j}$ の固有値の多重度に対応しているから, 上の評価は

$$N_T(\lambda) \geq \gamma(N_1(\lambda) - N_2(\lambda)) - N_-(\alpha),$$

を意味する. これに Theorem 3.1 を適用すれば, Weyl 則も得られる. ■

4. NSE に関する Weyl 則

4.1. Fourier 変換の球面制限と固有作用素

定常音響波動方程式に戻ろう. ここでは, 自己共役作用素の散乱理論に関して基本的な事実をまとめておく. 詳しいことは, [1], [20], [6] 等を参照されたい.

$$L = -n^{-1}\Delta, \quad L_0 = -\Delta \quad \text{on } \mathbf{R}^d,$$

とおく. L と L_0 は, それぞれ $L^2(\mathbf{R}^d, ndx)$, $L^2(\mathbf{R}^d)$ 上で自己共役である. また, 明らかに $L, L_0 \geq 0$ である.

Proposition 4.1 $\sigma_p(L) = \emptyset$, $\sigma_{ess}(L) = \sigma_{ess}(L_0) = [0, \infty)$.

以下, Agmon-Hörmander の $\mathcal{B}$ - $\mathcal{B}^*$ 空間 ([1]) を用いる. 特に $\mathcal{B}^*$ のノルムは

$$\|u\|_{\mathcal{B}^*}^2 = \sup_{R>1} \frac{1}{R} \int_{|x|<R} |u(x)|^2 dx,$$

である. さらに, 重み付き L^2 空間として, ノルム

$$\|f\|_{L^{2,s}}^2 = \int_{\mathbf{R}^d} (1 + |x|^2)^s |f(x)|^2 dx,$$

を持つ空間 $L^{2,s}(\mathbf{R}^d)$ に対し, 次の包含関係が成り立つ.

Lemma 4.2 $s > 1/2$ のとき,

$$L^{2,s}(\mathbf{R}^d) \subset \mathcal{B} \subset L^{2,1/2}(\mathbf{R}^d) \subset L^2(\mathbf{R}^d) \subset L^{2,-1/2}(\mathbf{R}^d) \subset \mathcal{B}^* \subset L^{2,-s}(\mathbf{R}^d).$$

Fourier 変換の球面制限

$$(\mathcal{F}_0(\lambda)f)(\omega) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbf{R}^d} e^{-i\sqrt{\lambda}x \cdot \omega} f(x) dx, \quad \lambda > 0, \quad \omega \in S^{d-1},$$

を考える. この共役作用素

$$(\mathcal{F}_0(\lambda)^* \phi)(\omega) = (2\pi)^{-d/2} \int_{S^{d-1}} e^{i\sqrt{\lambda}x \cdot \omega} \phi(\omega) d\Sigma,$$

は Herglotz 波であり, L_0 の一般化固有関数を与える.

Lemma 4.3 (1) $\mathcal{F}_0(\lambda) \in \mathbf{B}(\mathcal{B}; L^2(S^{d-1}))$, $\mathcal{F}_0(\lambda)^* \in \mathbf{B}(L^2(S^{d-1}); \mathcal{B}^*)$.

(2) 任意の $\phi \in L^2(S^{d-1})$ に対して, $\mathcal{F}_0(\lambda)^*\phi$ は $(L_0 - \lambda)\mathcal{F}_0(\lambda)^*\phi = 0$ を満たす.

L に対して同様の固有関数を構成するには, $R(z) = (L - z)^{-1}$ の極限吸収を用いる.

Lemma 4.4 $\lambda > 0$, $J \subset (0, \infty)$ を任意のコンパクトな区間とする.

(1) 弱*極限 $R(\lambda \pm i0) := \lim_{\epsilon \downarrow 0} R(\lambda \pm i\epsilon) \in \mathbf{B}(\mathcal{B}; \mathcal{B}^*)$ が存在する.

(2) $\lambda \in J$ について, $C > 0$ が存在して

$$\|R(\lambda \pm i0)f\|_{\mathcal{B}^*} \leq C\|f\|_{\mathcal{B}}, \quad f \in \mathcal{B},$$

が成り立つ.

(3) 写像 $J \ni \lambda \mapsto (R(\lambda \pm i0)f, g)$, $f, g \in \mathcal{B}$, は連続である.

(4) $R_0(z) = (L_0 - z)^{-1}$ に対しても同様の性質が成り立つ.

修正された Fourier 変換 $\mathcal{F}_{\pm}(\lambda)$ を

$$\mathcal{F}_{\pm}(\lambda)(\chi - V^*R(\lambda \pm i0)), \quad \lambda > 0,$$

によって定義しよう. ここで, $\chi \in C^\infty(\mathbf{R}^d)$ は $\bar{\Omega}$ の近傍で 0 であり, 遠方では 1 をとる関数であり, $V = L\chi - \chi L_0$ である.

Lemma 4.5 (1) $\mathcal{F}_{\pm}(\lambda) \in \mathbf{B}(\mathcal{B}; L^2(S^{d-1}))$, $\mathcal{F}_{\pm}(\lambda)^* \in \mathbf{B}(L^2(S^{d-1}); \mathcal{B}^*)$.

(2) 任意の $\phi \in L^2(S^{d-1})$ に対して, $\mathcal{F}_{\pm}(\lambda)^*\phi$ は $(L_0 - \lambda)\mathcal{F}_{\pm}(\lambda)^*\phi = 0$ を満たす.

(3) $u_{\pm}^s := \mathcal{F}_{\mp}(\lambda)^*\phi - \mathcal{F}_0(\lambda)^*\phi$, $\phi \in L^2(S^{d-1})$, は Sommerfeld の放射条件

$$(\partial_r \mp i\sqrt{\lambda})u_{\pm}^s = o(r^{-(d-1)/2}), \quad r \rightarrow \infty,$$

を満たす散乱波を与える. u_+^s を外向き波, u_-^s を内向き波と言う.

Lemma 4.5 より, さらに次のことが分かる. $u_{\pm} = \mathcal{F}_{\mp}(\lambda)^*\phi$, $\phi \in L^2(S^{d-1})$, とおくと, u_+ は次の漸近挙動を持つ:

$$u_+(x) = (\mathcal{F}_0(\lambda)\phi)(x) + C_+(\lambda)r^{-(d-1)/2}e^{i\sqrt{\lambda}r}(A(\lambda)\phi)(\theta) + o(r^{-(d-1)/2}), \quad r \rightarrow \infty,$$

ただし, $\theta = x/r$, $A(\lambda) = \mathcal{F}_+(\lambda)V\mathcal{F}_0(\lambda)^*$ で与えられる.

4.2. 外部問題による D-N map への帰着

最後に, $A(\lambda)$ と $\partial\Omega$ 上の D-N map が 1 対 1 に対応していることを示そう. 外部 Dirichlet 問題

$$(-\Delta - \lambda)v_{\pm}^e = 0 \quad \text{in } \Omega^e, \quad v_{\pm}^e = f \quad \text{on } \partial\Omega,$$

に付随する D-N map

$$\Lambda_{\pm}^e(\lambda)f = \partial_{\nu}v_{\pm}^e, \quad (\partial_{\nu}v_{\pm}^e)(x) = \lim_{y \rightarrow x, y \in \Omega^e} \nu(x) \cdot \nabla v_{\pm}^e(y), \quad x \in \partial\Omega,$$

を導入する. ここで, $v_{\pm}^e$ は外向き波 (for +) または内向き波 (for -), ν は $\partial\Omega$ の Ω に対する外向き法ベクトルである. さらに, 内部 Dirichlet 問題

$$(-n^{-1}\Delta - \lambda)v^i = 0 \quad \text{in } \Omega^e, \quad v^i = f \quad \text{on } \partial\Omega,$$

を考え、 Ω と Ω^e の特性関数 χ^i, χ^e に対して

$$v_{\pm} = \chi^i v^i + \chi^e v_{\pm}^e,$$

とおく.

$v_{\pm}$ はポテンシャル論を用いて表示することができる. 延長作用素 $\delta, \delta_0 : L^2(\partial\Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\mathbf{R}^d)$ を

$$\int_{\mathbf{R}^d} (\delta f)(x) \overline{g(x)} n(x) dx = \int_{\partial\Omega} f(x') \overline{g(x')} dS,$$

$$\int_{\mathbf{R}^d} (\delta_0 f)(x) \overline{g(x)} dx = \int_{\partial\Omega} f(x') \overline{g(x')} dS,$$

$g \in H^{1/2}(\mathbf{R}^d)$, と定義する. すると, 共役作用素 $\delta^*, \delta_0^* : H^{1/2}(\mathbf{R}^d) \rightarrow L^2(\partial\Omega)$ はトレース作用素である. $g \in \mathcal{B}$ に対し, $R(\lambda \pm i0)g, R_0(\lambda \pm i0)g \in H_{loc}^2(\mathbf{R}^d)$ より, $f \in L^2(\partial\Omega)$ に対して,

$$\mathcal{B} \ni g \mapsto \int_{\partial\Omega} f(x') \overline{(\delta^* R(\lambda \pm i0)g)(x')} dS,$$

$$\mathcal{B} \ni g \mapsto \int_{\partial\Omega} f(x') \overline{(\delta_0^* R_0(\lambda \pm i0)g)(x')} dS,$$

はそれぞれ有界線形汎関数を定める. よって, 作用素 $R(\lambda \pm i0)\delta, R_0(\lambda \pm i0)\delta_0 : L^2(\partial\Omega) \rightarrow \mathcal{B}^*$ が定義される. $R_0(\lambda \pm i0)\delta_0$ はよく知られた一重層ポテンシャルであるから, $R(\lambda \pm i0)\delta$ はその一般化となっている.

§2での議論により, D-N mapはDirichlet固有値の周りでLaurent展開されるのであった. そこで, 内部Dirichlet問題の解 v^i に付随するD-N mapを $\Lambda_n(\lambda)$ とおくと, $\lambda_0 \in \sigma_D(-n^{-1}\Delta)$ の近傍では

$$\Lambda_n(\lambda) = \frac{Q_n}{\lambda_0 - \lambda} + H_n(\lambda),$$

と表される. $n = 1$ のときのD-N mapを $\Lambda_0(\lambda)$ で表せば, 同様に $\lambda_0 \in \sigma_D(-\Delta)$ の近傍で

$$\Lambda_0(\lambda) = \frac{Q_0}{\lambda_0 - \lambda} + H_0(\lambda),$$

とLaurent展開されることが分かる. そこで,

$$D_n(\lambda) = \Lambda_n(\lambda) \quad \text{for } \lambda \notin \sigma_D(-n^{-1}\Delta), \quad D_n(\lambda) = H_n(\lambda) \quad \text{for } \lambda \in \sigma_D(-n^{-1}\Delta),$$

$$D_0(\lambda) = \Lambda_0(\lambda) \quad \text{for } \lambda \notin \sigma_D(-\Delta), \quad D_0(\lambda) = H_0(\lambda) \quad \text{for } \lambda \in \sigma_D(-\Delta),$$

と定義する.

以下, $\lambda \in \sigma_D(-n^{-1}\Delta)$ に対して, $E_n(\lambda)$ を λ に対する固有空間とし, $B_n(\lambda)$ は $E_n(\lambda)$ を生成する正規直交固有関数系 $\phi_1, \dots, \phi_m$ に対して $\partial_\nu \phi_1, \dots, \partial_\nu \phi_m$ が生成する $L^2(\partial\Omega)$ の部分空間とする. $\lambda \in \sigma_D(-\Delta)$ に対して, 同様の部分空間を $E_0(\lambda), B_0(\lambda)$ と表す.

Lemma 4.6 $v_{\pm}$ は

$$v_{\pm} = R(\lambda \pm i0)\delta(D_n(\lambda) - \Lambda_{\pm}^e(\lambda))f,$$

で表せる. ただし, $\lambda \notin \sigma_D(-n^{-1}\Delta)$ のとき $f \in H^{3/2}(\partial\Omega)$, $\lambda \in \sigma_D(-n^{-1}\Delta)$ のとき $f \in H^{3/2}(\partial\Omega) \cap B_n(\lambda)^{\perp}$ である. $n = 1$ の場合は, $R_0(\lambda \pm i0)\delta(D_0(\lambda) - \Lambda_{\pm}^e(\lambda)), H^{3/2}(\partial\Omega) \cap B_0(\lambda)^{\perp}$ に置き換えて同様のことが成り立つ.

次に, $D_n(\lambda) - \Lambda_{\pm}^e(\lambda)$, $D_0(\lambda) - \Lambda_{\pm}^e(\lambda)$ と等価な作用素として,

$$M_{\pm}(\lambda)f = \delta^* R(\lambda \pm i0)\delta f, \quad M_{0,\pm}(\lambda)f = \delta_0^* R_0(\lambda \pm i0)\delta_0 f, \quad f \in H^{1/2}(\partial\Omega),$$

を定義する.

Lemma 4.7 (1) $\lambda \notin \sigma_D(-n^{-1}\Delta)$ のとき, $D_n(\lambda) - \Lambda_{\pm}^e(\lambda)$ は $H^{3/2}(\partial\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\partial\Omega)$ の同型写像である. $\lambda \in \sigma_D(-n^{-1}\Delta)$ のとき, $D_n(\lambda) - \Lambda_{\pm}^e(\lambda)$ は $H^{3/2}(\partial\Omega) \cap B_n(\lambda)^\perp \rightarrow H^{1/2}(\partial\Omega) \cap B_n(\lambda)^\perp$ の同型写像である.

(2) $\lambda \notin \sigma_D(-\Delta)$ のとき, $D_0(\lambda) - \Lambda_{\pm}^e(\lambda)$ は $H^{3/2}(\partial\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\partial\Omega)$ の同型写像である. $\lambda \in \sigma_D(-\Delta)$ のとき, $D_0(\lambda) - \Lambda_{\pm}^e(\lambda)$ は $H^{3/2}(\partial\Omega) \cap B_0(\lambda)^\perp \rightarrow H^{1/2}(\partial\Omega) \cap B_0(\lambda)^\perp$ の同型写像である.

特に, 補題の (1), (2) いずれの場合にも

$$M_{\pm}(\lambda)(D_n(\lambda) - \Lambda_{\pm}^e(\lambda)) = 1, \quad M_{0,\pm}(\lambda)(D_0(\lambda) - \Lambda_{\pm}^e(\lambda)) = 1,$$

が成り立つ.

続いて, 外部問題由来の Fourier 変換を導入し, 外部問題に対する散乱振幅 $A^e(\lambda)$ を定義しておく. 以下の議論で分かるように, $A^e(\lambda)$ は Ω の形状のみに依存し, n には依存しない. L_e を $\partial\Omega$ 上で Dirichlet 条件 $v = 0$ を持つ $-\Delta$ の $L^2(\Omega^e)$ における自己共役拡大とする. L_e と $R_e(z) = (L_e - z)^{-1}$ に対して

$$\mathcal{F}_{\pm}^e(\lambda) = \mathcal{F}_0(\lambda)(\chi - (\chi L_e - L_0 \chi)R_e(\lambda \pm i0)), \quad \lambda > 0,$$

と定める. すると, $\mathcal{F}_0(\lambda)^*$ や $\mathcal{F}_{\pm}(\lambda)^*$ と同様に, $\mathcal{F}_{\pm}^e(\lambda)^*$ は L_e の固有作用素を与える. また, $\mathcal{F}_{\pm}^e(\lambda)^*$ が定める一般化固有関数の漸近挙動に

$$A^e(\lambda) = \mathcal{F}_+^e(\lambda)(L_e \chi - \chi L_0)\mathcal{F}_0(\lambda)^*,$$

が現れる.

Lemma 4.8 任意の $\phi \in L^2(S^{d-1})$ に対し, $\mathcal{F}_-^e(\lambda)^*\phi \in \mathcal{B}^*$ は

$$(-\Delta - \lambda)\mathcal{F}_-^e(\lambda)^*\phi = 0 \quad \text{in } \Omega^e, \quad \mathcal{F}_-^e(\lambda)^*\phi = 0 \quad \text{on } \partial\Omega,$$

を満たす. $\mathcal{F}_-^e(\lambda)^*\phi - \chi\mathcal{F}_0(\lambda)^*\phi$ は外向き放射条件を満たし, その漸近挙動は

$$(\mathcal{F}_-^e(\lambda)^*\phi)(x) - \chi(x)(\mathcal{F}_0(\lambda)^*\phi)(x) = -C_+(\lambda)r^{-(d-1)/2}e^{i\sqrt{\lambda}r}(A^e(\lambda)\phi)(\theta) + o(r^{-(d-1)/2}),$$

$r \rightarrow \infty$, で与えられる.

最後に, 外部問題の解 $v_{\pm}^e$ の漸近挙動を与える作用素 $\Gamma_{\pm}(\lambda) : H^{3/2}(\partial\Omega) \rightarrow L^2(S^{d-1})$ を

$$\Gamma_{\pm}(\lambda)f = \mathcal{F}_0(\lambda)((-\Delta - \lambda)(\chi v_{\pm}^e)), \quad f \in H^{3/2}(\partial\Omega),$$

で定義する. 次の補題のように, $\Gamma_{\pm}(\lambda)$ による漸近挙動の表示に加えて, $\Gamma_{\pm}(\lambda)$ の性質を示すことができる.

Lemma 4.9 (1) $v_{\pm}^e$ は次の漸近挙動を持つ :

$$v_{\pm}^e(x) = C_{\pm}(\lambda)r^{-(d-1)/2}e^{i\sqrt{\lambda}r}(\Gamma_{\pm}(\lambda)f)(\theta) + o(r^{-(d-1)/2}), \quad r \rightarrow \infty.$$

(2) $\Gamma_{\pm}(\lambda)$ は $H^{3/2}(\partial\Omega)$ 上で1対1である.

(3) $\Gamma_{\pm}(\lambda)^*$ の像は $L^2(\partial\Omega)$ で稠密である.

以上により, $A(\lambda)$ と $D_n(\lambda)$ が1対1に対応していることを示せる. 結果は次のようになる.

Theorem 4.10 $A(\lambda)$ と $D_n(\lambda)$ は1対1に対応し,

$$\Gamma_+(\lambda)M_+(\lambda)\Gamma_-(\lambda)^* = A^e(\lambda) - A(\lambda),$$

が成り立つ.

Sketch of the proof. 任意の $\phi \in L^2(S^{d-1})$ に対して

$$u = \mathcal{F}_-(\lambda)^*\phi - \chi^e \mathcal{F}_-(\lambda)\phi,$$

とおくと,

$$(-\Delta - \lambda)u = 0 \quad \text{in } \Omega^e, \quad u = \delta^* \mathcal{F}_-(\lambda)^*\phi \quad \text{on } \partial\Omega,$$

を満たす. Lemma 4.6により,

$$u = R(\lambda + i0)\delta(D_n(\lambda) - \Lambda_+^e(\lambda))\delta^* \mathcal{F}_-(\lambda)^*\phi \quad \text{in } \Omega^e,$$

と表すことができる. u は放射条件を満たす散乱波なので, 一意性がある. よって, 以上の2種類の表示から, 次の u の $r \rightarrow \infty$ における漸近挙動は等価である :

$$u(x) = C_+(\lambda)r^{-(d-1)/2}e^{i\sqrt{\lambda}r}((A^e(\lambda) - A(\lambda))\phi)(\theta) + o(r^{-(d-1)/2}),$$

$$u(x) = C_+(\lambda)r^{-(d-1)/2}e^{i\sqrt{\lambda}r}(\mathcal{F}_+(\lambda)(\delta(D_n(\lambda) - \Lambda_+^e(\lambda))\delta^*\phi)(\theta) + o(r^{-(d-1)/2})).$$

これと Lemma 4.7による

$$\mathcal{F}_+(\lambda)(\delta(D_n(\lambda) - \Lambda_+^e(\lambda))\delta^*) = \Gamma_+(\lambda)M_+(\lambda)\Gamma_-(\lambda)^*$$

から, 結果を得る. ■

Theorem 1.2 は, 次の系と Theorem 3.6 の帰結である.

Corollary 4.11 $\lambda \in (\alpha, \infty)$ が non-singular ITE ならば, λ は NSE である.

Sketch of the proof. Theorem 4.10 により,

$$\Gamma_+(\lambda)(M_+(\lambda) - M_{0,+}(\lambda))\Gamma_-(\lambda)^* = -A(\lambda),$$

である. $\Gamma_+(\lambda)$ は1対1なので,

$$(M_+(\lambda) - M_{0,+}(\lambda))\Gamma_-(\lambda)^*\phi = 0 \iff A(\lambda)\phi = 0, \quad \phi \in L^2(S^{d-1}).$$

λ は ITE であるから, $0 \neq f \in H^{3/2}(\partial\Omega) \cap \text{Ker}(D_n(\lambda) - D_0(\lambda))$ が存在する. $g = (D_0(\lambda) - \Lambda_+^e(\lambda))f \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ とおくと,

$$(M_+(\lambda) - M_{0,+}(\lambda))g = 0.$$

ここで, $\text{Ker}(D_n(\lambda) - D_0(\lambda))$ は正の次元を持つ $L^2(\partial\Omega)$ の部分空間であり, $\Gamma_-(\lambda)^*$ の像は $L^2(\partial\Omega)$ で稠密であるから, $\Gamma_-(\lambda)^*\phi \in (D_0(\lambda) - \Lambda_+^e(\lambda))\text{Ker}(D_n(\lambda) - D_0(\lambda))$ となる $\phi \in L^2(S^{d-1})$ が取れる. この ϕ により, $A(\lambda)\phi = 0$ であるから, λ は NSE である. ■

参考文献

- [1] S. Agmon and L. Hörmander, *Asymptotic properties of solutions of differential equations with simple characteristics*, J. d'Anal. Math. **30** (1976), 1-38.
- [2] E. Blåsten, L. Päivärinta and J. Sylvester, *Corners always scatter*, Commun. Math. Phys., **331** (2014), 725-753.
- [3] P. M. Blekher, *Operators that depend meromorphically on a parameter*, Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mech., **24** (1969), 30-36. (in Russian) ; English transl.: Moscow Univ. Math. Bull., **24** (1969), 21-26.
- [4] D. Colton and P. Monk, *The inverse scattering problem for time-harmonic acoustic waves in an inhomogeneous medium*, Q. Jl. Mech. Appl. Math., **41** (1988), 97-125.
- [5] J. Elschner and G. Hu, *Corners and edges always scatter*, Inverse Problems, **31** (2015), 015003.
- [6] G. Eskin, "Lectures on Linear Partial Differential Equations", Graduate Studies in Mathematics, vol. 123, AMS, 2011.
- [7] J. Gell-Redman and A. Hassell, *Potential scattering and the continuity of phase-shifts*, Math. Res. Lett., **19** (2012), 719-729.
- [8] G. Grubb, "Functional Calculus of Pseudodifferential Boundary Problems", Birkhauser, Boston, 1996.
- [9] V. Isakov and A. Nachman, *Global uniqueness for two-dimensional semi-linear elliptic inverse problem*, Trans. Amer. Soc., **347** (1995), 3375-3390.
- [10] H. Isozaki, *Inverse spectral problems on hyperbolic manifolds and their applications to inverse boundary value problems in Euclidean spaces*, Amer. J. Math., **126** (2004), 1261-1313.
- [11] H. Isozaki and Y. Kurylev, "Introduction to spectral theory and inverse problems on asymptotically hyperbolic manifolds", MSJ Memoire 32, Math. Soc. Japan, World Scientific (2014).
- [12] A. Katchalov, Y. Kurylev and M. Lassas, "Inverse Boundary Spectral Problems", Chapman & Hall / CRC, London, 2001.
- [13] E. Lakshtanov and B. R. Vainberg, *Applications of elliptic operator theory to the isotropic interior transmission eigenvalue problem*, Inverse Problems, **29** (2013), 104003.
- [14] H. Morioka and N. Shoji, *Interior transmission eigenvalue problems on compact manifolds with boundary conductivity parameters*, preprint. arXiv:1703.02704
- [15] L. Päivärinta, M. Salo and E. V. Vesalainen, *Strictly convex corners scatter*, Revista Matemática Iberoamericana, **33** (2017), 1369-1396.
- [16] V. Petkov and G. Vodev, *Asymptotics of the number of the interior transmission eigenvalues*, J. Spectral Theory, **7** (2017), 1-31.
- [17] Yu. Safarov and D. Vassiliev, "The Asymptotic Distribution of Eigenvalues of Partial Differential Operators", AMS, 1997.
- [18] B. R. Vainberg and V. V. Grusin, *Uniformly nonelliptic problems II*, Mat. Sb., **2** (1967), 111-133.
- [19] G. Vodev, *Transmission eigenvalue-free regions*, Commun. Math. Phys., **336** (2015), 1141-1166.
- [20] D. Yafaev, "Mathematical Scattering Theory: General Theory", Translations of Mathematical Monographs, **105**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2009.