

Invariant differential operators and uniformly bounded multiplicities

北川 宜稔 (奈良女子大学)*

1. 導入

G -多様体 X 上の G -不変微分作用素環と、 X 上の関数空間の既約分解の間には密接な関係があることが知られている。例えば、 $L^2(S^{n-1})$ は $SO(n)$ の表現として既約分解すると各既約成分が重複度1で現れる(無重複と言われる)。この場合 S^{n-1} 上の $SO(n)$ -不変微分作用素環は Laplace–Beltrami 作用素で生成される可換環となっており、そのスペクトル分解がちょうど $SO(n)$ に関する既約分解となっている。

より一般に、 $G \supset H$ をコンパクトリー群とすると、 $L^2(G/H)$ が無重複であることと G/H 上の G -不変微分作用素環が可換であることが同値になることが知られている。本稿では、実簡約リー群の場合に類似の結果が成り立つことを紹介する。すなわち、表現の既約分解に現れる重複度が G -不変微分作用素環やそれに類する環によって、「おおまかに」統制されているということを見る。

以下では、複素代数群を $G, G', \dots$ など単なるアルファベットで表し、実リー群を $G_{\mathbb{R}}, G'_{\mathbb{R}}, \dots$ など $\mathbb{R}$ を付けて表す。また、対応するリー環を $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}, \dots$ と表す。対応する群が定義されていない場合でも、実リー環 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ に対してその複素化を $\mathfrak{g}$ と表す。

本稿では代数多様体は準射影多様体と仮定する。 G を ($\mathbb{C}$ 上の) 簡約代数群とし T を複素トーラスとする。 X を滑らかな $G \times T$ -代数多様体、 Y を滑らかな G -代数多様体とする。 $f: X \rightarrow Y$ を G -同変な射とし、この射によって (Zariski 位相で) 主 T -束になっているとする。

$\mathcal{D}_X$ を X 上の微分作用素環の層とし、 $\lambda \in \mathfrak{t}^*$ に対して

$$\mathcal{D}_{Y,\lambda} := (\mathbb{C}_{\lambda} \otimes_{U(\mathfrak{t})} f_*(\mathcal{D}_X))^T$$

と置く。ここで、 f_* は層の順像関手である。このとき、 $\mathcal{D}_{Y,\lambda}$ は Y 上の G -同変振れ微分作用素環の層となる。準連接 $\mathcal{D}_X$ -加群 $\mathcal{M}$ と $\lambda \in \mathfrak{t}^*$ に対して、

$$f_{+,\lambda}(\mathcal{M}) := \mathbb{C}_{\lambda} \otimes_{U(\mathfrak{t})} f_*(\mathcal{M})$$

とすると、 $f_{+,\lambda}$ は準連接 $\mathcal{D}_{Y,\lambda}$ -加群となる。少し計算すると $f_{+,\lambda}$ の左導来関手 $Lf_{+,\lambda}$ は $\mathcal{D}$ -加群の順像関手 $Df_{+,\lambda}$ と同型であることがわかる。

大域切断をとる関手を Γ と書き、 $\mathbb{D}_{Y,\lambda} = \Gamma(\mathcal{D}_{Y,\lambda})$ と置く。 $\mathcal{M}$ を $\mathcal{D}_{Y,\lambda}$ -加群とすると、 $\mathcal{D}_{Y,\lambda}$ は G -同変なので $\Gamma(\mathcal{M})$ には $\mathfrak{g}$ の作用が入る。この作用に関するリー環のホモロジーには $\mathbb{D}_{Y,\lambda}^G$ の作用が入るので、 $\mathbb{D}_{Y,\lambda}^G$ -加群

$$H_i(\mathfrak{g}, \Gamma(\mathcal{M}))$$

が得られる。

$P \subset \mathfrak{t}^*$ を、 Γ が準連接 $\mathcal{D}_{Y,\lambda}$ -加群の圏上で完全関手になるような $\lambda \in \mathfrak{t}^*$ の集合とする。このとき、次の定理が成り立つ。

* 〒630-8506 奈良市北魚屋東町
e-mail: kitamasa@cc.nara-wu.ac.jp

定理 1.1. $\mathcal{M}$ を holonomic $\mathcal{D}_X$ -加群とする。このとき、ある定数 C が存在して

$$\text{Len}_{\mathbb{D}_{Y,\lambda}^G}(H_i(\mathfrak{g}, N)) \leq C$$

が任意の $\lambda \in P, i, j \in \mathbb{N}$ と $\Gamma(L_j f_{+,\lambda}(\mathcal{M}))$ の部分商 N に対して成り立つ。ここで、 Len は加群の長さを表す。

この定理は $\mathcal{M}$ から作られる $\mathbb{D}_{Y,\lambda}$ -加群の族 $\Gamma(f_{+,\lambda}(\mathcal{M}))$ の $\mathfrak{g}$ -加群としてのホモロジーは G -不変微分作用素環 $\mathbb{D}_{Y,\lambda}^G$ によって「おおまかに」統制されていると主張している。例えば、 $\mathbb{D}_{Y,\lambda}^G$ が可換になるような場合だと既約 $\mathbb{D}_{Y,\lambda}^G$ -加群はすべて1次元となるため、

$$\dim_{\mathbb{C}}(H_i(\mathfrak{g}, N)) \leq C$$

という評価が得られる。

定理 1.1 の証明については、主 G -束に関する順像関手が $\mathfrak{g}$ の作用によるホモロジーをとる関手と同型であることを用いることで、holonomic $\mathcal{D}$ -加群の順像の長さを評価する問題に帰着される。据れ λ があるため少し異なるが、[8, Theorem 3.2.3] の証明と同様にしてアファイン空間 $\mathbb{C}^n$ 上の問題に帰着させることで、Bernstein 次数を用いて holonomic $\mathcal{D}$ -加群の順像の長さを上から抑えることができる。

定理 1.1 を旗多様体 Y に適用することで、表現の既約分解に関する結果を得ることができる。 G を簡約代数群とし、 G の Borel 部分群を B とする。 K を G の閉部分群とし、 K が G/B に有限軌道を持っていると仮定する。このような K としては、 G の対称部分群や B の冪単根基などが知られている。

B の冪単根基を U とし、 $T = B/U$ とする。このとき、自然な射影 $f : G/U \rightarrow G/B$ は主 T -束を定めている。Beilinson–Bernstein による $\mathcal{D}$ -加群を使った $(\mathfrak{g}, K)$ -加群の分類 [1] を用いると以下の補題が示される。

補題 1.2. ある holonomic $\mathcal{D}_{G/U}$ -加群 $\mathcal{M}$ が存在して次の条件を満たす。任意の既約 $(\mathfrak{g}, K)$ -加群 V に対して、ある $\lambda \in P$ と $i \in \mathbb{N}$ が存在して V は $\Gamma(L_i f_{+,\lambda}(\mathcal{M}))$ の部分商と同型になる。

G' を G の簡約部分群として、 K', B', U', T' を G のものと同様にして定義する。定理 1.1 を主 $T \times T'$ -束 $G/U \times G'/U' \rightarrow G/B \times G'/B'$ に適用すると以下の結果が得られる。

定理 1.3. ある定数 $C > 0$ が存在して、

$$\text{Len}_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{G'}}(\text{Tor}_i^{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}(V, V')) \leq C$$

が任意の既約 $(\mathfrak{g}, K)$ -加群 V 、既約 $(\mathfrak{g}', K')$ -加群 V' 、 $i \in \mathbb{N}$ に対して成り立つ。

2. PI degree

定理 1.1 や定理 1.3 を用いると重複度などの量を不変微分作用素環の既約加群の次元で評価できるようになるが、一般に不変微分作用素環の既約加群を直接調べることは容易ではない。しかし、例えば可換な代数の既約加群がすべて1次元であるように、既約加群の次元の上限と代数の性質を結びつけることができる。詳しくは例えば [16, Chapter 13]などを参照されたい。

定義 2.1. n 変数の非可換多項式 s_n を

$$s_n(X_1, X_2, \dots, X_n) := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn}(\sigma) X_{\sigma(1)} X_{\sigma(2)} \cdots X_{\sigma(n)}$$

と定める。ここで、 $\mathfrak{S}_n$ は n 次対称群であり sgn は置換の符号である。また、環 $\mathcal{R}$ に対して

$$\text{PI.deg}(\mathcal{R}) := \min \{n \in \mathbb{N} : s_{2n} \equiv 0 \text{ on } \mathcal{R}\}$$

と定める。

例えば、 $s_2(X, Y) = XY - YX$ なので $\text{PI.deg}(\mathcal{R}) = 1$ であることと $\mathcal{R}$ が可換であることは同値である。また、Amitsur–Levitzki の定理 ([16, Theorem 3.3]) から $\text{PI.deg}(M_n(\mathbb{C})) = n$ となることが知られている。ここで、 $M_n(\mathbb{C})$ は $\mathbb{C}$ 成分の $n \times n$ の行列環である。この結果を使うと、よい状況では $\text{PI.deg}(\mathcal{R})$ は既約加群の次元の上限と一致することがわかる。具体的には以下の命題が成り立つ。 $\mathcal{A}$ を高々加算次元の $\mathbb{C}$ -代数とする。

命題 2.2. 任意の既約 $\mathcal{A}$ -加群の次元は $\text{PI.deg}(\mathcal{A})$ 以下となる。

命題 2.3. $\{(V_\lambda, \pi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ を $\mathcal{A}$ -加群の族とし、 $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \text{Ker}(\pi_\lambda) = 0$ とする。このとき、 $\text{PI.deg}(\mathcal{A}) \leq \sup_{\lambda \in \Lambda} \{\dim_{\mathbb{C}}(V_\lambda)\}$ となる。

3. 応用

定理 1.3 やその変形を具体的な設定に適用することで、 $(\mathfrak{g}, K)$ -加群の長さの様な評価や分岐則と Plancherel formula における重複度の様な評価を得ることができる。ここでは、重複度の様な評価について述べる。以下では次の設定で話を進めていく。

以下で述べる結果はすべて重複度の有界性についての結果なので連結性を仮定する必要はないが、議論を簡単にするため仮定しておく。また、被覆を取ってもよいが、同様の理由で代数群 (の単位元成分) のみを扱う。 $G \supset G'$ を連結簡約代数群、 $G_{\mathbb{R}} \supset G'_{\mathbb{R}}$ をその連結な実形とする。また、 $K_{\mathbb{R}} \supset K'_{\mathbb{R}}$ をそれぞれ $G_{\mathbb{R}}, G'_{\mathbb{R}}$ の極大コンパクト部分群とし、 $G \supset K, G' \supset K'$ をその複素化とする。

$(\mathfrak{g}, K)$ -加群 V に対して

$$\mathcal{M}_{\mathfrak{g}', K'}^{\text{alg}}(V) := \sup \{\dim_{\mathbb{C}}(\text{Hom}_{\mathfrak{g}', K'}(V, V')) : \text{既約 } (\mathfrak{g}', K')\text{-加群 } V'\}$$

と定め、また $(\mathfrak{g}', K')$ -加群 V' に対して

$$\mathcal{M}_{\mathfrak{g}, K}^{\text{ind}}(V') := \sup \{\dim_{\mathbb{C}}(\text{Hom}_{\mathfrak{g}, K}(V, V')) : \text{既約 } (\mathfrak{g}, K)\text{-加群 } V\}$$

と定める。 $\mathcal{M}_{\mathfrak{g}', K'}^{\text{alg}}(V) < \infty$ のとき、 $V|_{\mathfrak{g}', K'}$ は一様に有界な重複度を持つという。

ユニタリ表現や Casselman–Wallach 表現に対してもこの節の結果と同様の結果が成り立つが、本稿では省略する。

3.1. 分岐則

定理 1.3 を用いると、分岐則が一様有界な重複度を持つための必要十分条件を PI.deg を使って表すことができる。

定理 3.1. V を 0 でない有限長の $(\mathfrak{g}, K)$ -加群とし、その零化イデアルを $I \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ とする。このとき、ある V, I によらない定数 C が存在して

$$\frac{1}{C \cdot \text{Len}_{\mathfrak{g}, K}(V)} \text{PI.deg}((\mathcal{U}(\mathfrak{g})/I)^{G'}) \leq \mathcal{M}_{\mathfrak{g}', K'}^{\text{alg}}(V) \leq C \cdot \text{Len}_{\mathfrak{g}, K}(V) \text{PI.deg}((\mathcal{U}(\mathfrak{g})/I)^{G'})$$

となる。

この定理から、 $\mathcal{M}_{\mathfrak{g}', K'}^{\text{alg}}(V) < \infty$ と $\text{PI.deg}((\mathcal{U}(\mathfrak{g})/I)^{G'}) < \infty$ が同値であることがわかる。 $\text{PI.deg}((\mathcal{U}(\mathfrak{g})/I)^{G'})$ を直接計算することは一般には容易ではないと考えられる。しかし、 $\text{PI.deg}((\mathcal{U}(\mathfrak{g})/I)^{G'})$ が V より荒い情報である I にしかよらないということを使うことで、 $\mathcal{M}_{\mathfrak{g}', K'}^{\text{alg}}(V)$ の有限性を別の加群や別の実形の場合に帰着させることができる。たとえば、 G' を G の内部自己同型で動かすことで、 $G'_{\mathbb{R}}$ を別の実形に変えることができる。あるいは、 V を零化イデアルが I となるような別の加群で置き換えることもできる。

後の節で紹介するが、放物型誘導表現の場合には I はある一般化 Verma 加群の零化イデアルと等しくなる。したがって、 $\mathcal{M}_{\mathfrak{g}', K'}^{\text{alg}}(V)$ の有限性を一般化 Verma 加群の分岐則の問題に帰着することができる。

定理 3.1 の上からの評価の証明について説明する。 V' を既約 $(\mathfrak{g}', K')$ -加群とし、 $V'^{\vee}$ を $(V')_{K'}^*$ とする。ここで、 $(\cdot)_{K'}$ で K' -有限なベクトル全体の空間を表した。このとき、

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathfrak{g}', K'}(V, V') &\simeq \text{Hom}_{\mathfrak{g}', K'}(V, (V'^{\vee})^{\vee}) \\ &= \text{Hom}_{\mathfrak{g}'}(V, (V'^{\vee})^*) \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}')} V'^{\vee}, \mathbb{C}) \end{aligned}$$

となる。したがって、 $V \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}')} V'^{\vee}$ の次元を上から評価すればよい。定理 3.1 から、 V と V' によらない定数 C が存在して

$$\text{Len}_{(\mathcal{U}(\mathfrak{g})/I)^{G'}}(V \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}')} V'^{\vee}) \leq C \cdot \text{Len}_{\mathfrak{g}, K}(V)$$

となる。さらに、命題 2.2 から既約 $(\mathcal{U}(\mathfrak{g})/I)^{G'}$ -加群の次元は $\text{PI.deg}((\mathcal{U}(\mathfrak{g})/I)^{G'})$ 以下となる。以上より、

$$\dim_{\mathbb{C}}(V \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}')} V'^{\vee}) \leq C \cdot \text{Len}_{\mathfrak{g}, K}(V) \text{PI.deg}((\mathcal{U}(\mathfrak{g})/I)^{G'})$$

がわかる。

3.2. 調和解析

次に $\mathcal{M}_{\mathfrak{g}, K}^{\text{ind}}(V')$ の評価について述べる。Frobenius 相互律から、 $G_{\mathbb{R}}$ と $G'_{\mathbb{R}}$ のスムーズ表現 V, V' に対して

$$\text{Hom}_{G'_{\mathbb{R}}}(V, V') \simeq \text{Hom}_{G_{\mathbb{R}}}(V, \text{Ind}_{G'_{\mathbb{R}}}^{G_{\mathbb{R}}}(V'))$$

が成り立つ。ここで、 $\text{Ind}_{G'_{\mathbb{R}}}^{G_{\mathbb{R}}}(V')$ はスムーズな誘導表現を表す。したがって、 $\mathcal{M}_{\mathfrak{g}, K}^{\text{ind}}(V')$ は誘導表現の中の重複度の上限 (の $(\mathfrak{g}, K)$ -加群の類似) を表している。

分岐則の場合と同様に以下の定理を示すことができる。

定理 3.2. V' を 0 でない有限長の $(\mathfrak{g}', K')$ -加群とし、その零化イデアルを $I \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g}')$ とする。このとき、 V', I によらないある定数 C が存在して

$$\frac{\text{PI.deg}((\mathcal{U}(\mathfrak{g})/I\mathcal{U}(\mathfrak{g}))^{G'})}{C \cdot \text{Len}_{\mathfrak{g}', K'}(V')} \leq \mathcal{M}_{\mathfrak{g}, K}^{\text{ind}}(V') \leq C \cdot \text{Len}_{\mathfrak{g}', K'}(V') \cdot \text{PI.deg}((\mathcal{U}(\mathfrak{g})/I\mathcal{U}(\mathfrak{g}))^{G'})$$

となる。

$\text{PI.deg}((\mathcal{U}(\mathfrak{g})/I\mathcal{U}(\mathfrak{g}))^{G'})$ の有限性に帰着されたが、これもやはり直接計算することは容易ではないと考えられる。これをファイバー V' の分岐則の条件に帰着する。まずは $\text{PI.deg}((\mathcal{U}(\mathfrak{g})/I\mathcal{U}(\mathfrak{g}))^{G'}) < \infty$ となるための必要条件を述べる。

命題 3.3. ある原始イデアル $I \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g}')$ に対して $\text{PI.deg}((\mathcal{U}(\mathfrak{g})/I\mathcal{U}(\mathfrak{g}))^{G'}) < \infty$ となるならば、 G/G' は G -球多様体となる (つまり、 G の Borel 部分群が G/G' に開軌道を持つ)。

この結果は I が (代数的な) G' -加群の零化イデアルの場合には Vinberg–Kimelfeld の結果 [18] から従う。実際、この場合は $(\mathcal{U}(\mathfrak{g})/I\mathcal{U}(\mathfrak{g}))^{G'}$ は G/G' 上のベクトル束の G -不変微分作用素環と同型になっている。

以下では G/G' が G -球多様体であると仮定する。したがって、 G の Borel 部分群 B が存在して $BG' \subset G$ が開集合となるようにできる。

$$L := \{g \in G' : gBG' = BG'\}$$

とおくと、Brion–Luna–Vust の結果 [4] から L は G' の簡約部分群となる。さらに、 $L_{\mathbb{R}} := L \cap G'_{\mathbb{R}}$ が L の実形となり、 $K_{L, \mathbb{R}} := L_{\mathbb{R}} \cap K'_{\mathbb{R}}$ がその極大コンパクト部分群になるように B を取り直すことができる。 $K_{L, \mathbb{R}}$ の複素化を $K_L \subset K'$ とする。

定理 3.4. V' を既約 $(\mathfrak{g}', K')$ -加群とする。このとき、 V' によらないある定数 C が存在して

$$C^{-1} \mathcal{M}_{L, K_L}^{\text{alg}}(V') \leq \mathcal{M}_{\mathfrak{g}, K}^{\text{ind}}(V') \leq C \cdot \mathcal{M}_{L, K_L}^{\text{alg}}(V')$$

となる。

この定理によって誘導表現が一様に有界な重複度を持つかどうかを、ファイバー V' の分岐則を使って判定することができる。特に V' が有限次元である場合は G/G' が G -球多様体であればいつでも $\mathcal{M}_{\mathfrak{g}, K}^{\text{ind}}(V') < \infty$ となる。

類似の結果について紹介しよう。 $(\mathfrak{g}, K)$ -加群ではなく代数群の表現の場合には佐藤文広氏による以下の結果が知られている。これは $G_{\mathbb{R}}, G'_{\mathbb{R}}$ がコンパクトな場合とも思える。

事実 3.5 ([17]). V' を G' の (代数的な) 既約表現とする。このとき、

$$\mathcal{M}_G^{\text{ind}}(V') = \mathcal{M}_L^{\text{alg}}(V')$$

となる。ここで、 $\mathcal{M}_{\mathfrak{g}, G}^{\text{ind}}(V')$ などを単に $\mathcal{M}_G^{\text{ind}}(V')$ と書いた。

この設定では G/G' が準アファインであれば G' が簡約である必要はない ([9])。事実 3.5 は G/G' 上のベクトル束 $G \times_{G'} V'$ の大域切断の空間の既約分解に関する重複度の評価とすることができるが、大域切断ではなくコホモロジーにした Brion による結果も知られている。

事実 3.6 ([3]). X を G -球多様体とし、 $\mathcal{V}$ を X 上の G -同変ベクトル束とする。このとき、 $\mathcal{V}$ によらない定数 C が存在して

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Hom}_G(F, H^i(X, \mathcal{V}))) \leq C \cdot \mathrm{rank}(\mathcal{V})$$

が任意の G の既約表現 F に対して成り立つ。

次の小林–大島の結果では、 V' が有限次元に限る代わりに $G'_{\mathbb{R}}$ が簡約型かつ代数的であるという仮定が必要なくなる。

事実 3.7 ([15, Theorem B (1)]). $G'_{\mathbb{R}}$ を $G_{\mathbb{R}}$ の閉部分群とし、 G/B に G' が開軌道を持つとする。(ここで、 G' は $\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{g}$ に対応する G の解析的部分群である。) V' を $G'_{\mathbb{R}}$ の有限次元既約表現とし、 V を $G_{\mathbb{R}}$ の既約許容表現とする。このとき、 V, V' によらないある定数 C が存在して

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Hom}_{G'_{\mathbb{R}}}(V, V')) \leq C \cdot \dim_{\mathbb{C}}(V')$$

となる。

3.3. 放物型誘導表現 1

定理 3.1 の具体的な応用例として放物型誘導表現の分岐則について考える。

$(G_{\mathbb{R}}, K_{\mathbb{R}})$ に対応する Cartan 対合を θ とする。 $P_{\mathbb{R}}$ を $G_{\mathbb{R}}$ の放物型部分群とし、 $M_{\mathbb{R}} := \theta(P_{\mathbb{R}}) \cap P_{\mathbb{R}}$ とする。 $M_{\mathbb{R}}$ は $P_{\mathbb{R}}$ の Levi 部分群である。 $K_M \subset G$ を $K_{\mathbb{R}} \cap M_{\mathbb{R}}$ の複素化、 $P \subset G$ を $P_{\mathbb{R}}$ の複素化とする。

以下、 G/P は G' -球多様体とする。必要なら $P_{\mathbb{R}}$ をその共役で置き換えて、さらに G' の Borel 部分群 B' をうまくとることで、以下の条件を満たすようにできる。

- $B'P \subset G$ は開集合である。
- $P' := \{g \in G' : gB'P = B'P\}$ は G' の放物型部分群であり、 $\mathfrak{p}' + \mathfrak{p} = \mathfrak{g}$ となる。
- $L' := P' \cap P$ は簡約部分群であり、 P' のある Levi 部分群 M' に対して $M' \supset L' \supset [M', M']$ となる。
- $L'_{\mathbb{R}} := L' \cap G'_{\mathbb{R}}$ は L' の実形であり、 $K_{L', \mathbb{R}} := L'_{\mathbb{R}} \cap K'_{\mathbb{R}}$ は $L'_{\mathbb{R}}$ の極大コンパクト部分群である。

$K_{L', \mathbb{R}}$ の複素化を $K'_L \subset L'$ とする。

既約 $(\mathfrak{m}, K_M)$ -加群 V に対して、その放物型誘導表現を

$$I_{\mathfrak{p}, K_M}^{\mathfrak{g}, K}(V) := \mathrm{Hom}_{\mathfrak{p}}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}), V)_K$$

で定義する。ここで、 $\mathfrak{p}$ の冪零根基を自明に作用させて V を $(\mathfrak{p}, K_M)$ -加群とみなしている。以後も断りなく同様の同一視を行う。 $I_{\mathfrak{p}, K_M}^{\mathfrak{g}, K}(V)$ はスムーズな表現における放物型誘導表現の K -有限な部分と同型となっている。詳しくは [10, Proposition 11.47] など参照されたい。

定理 3.8. V を既約 $(\mathfrak{m}, K_M)$ -加群とする。このとき、 V によらないある定数 C が存在して

$$C^{-1} \mathcal{M}_{\mathfrak{p}', K_{L'}}^{\mathrm{alg}}(V) \leq \mathcal{M}_{\mathfrak{g}', K'}^{\mathrm{alg}}(I_{\mathfrak{p}, K_M}^{\mathfrak{g}, K}(V)) \leq C \cdot \mathcal{M}_{\mathfrak{p}', K_{L'}}^{\mathrm{alg}}(V)$$

となる。

ファイバーの分岐則に帰着する方法について述べよう。 $J = \text{Ann}_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}(I_{\mathfrak{p}, K_M}^{\mathfrak{g}, K}(V))$ と置く。定理 3.1 を用いることで、 $\text{PI.deg}((\mathcal{U}(\mathfrak{g})/J)^{G'})$ を上下から評価することに帰着される。 $I_{\mathfrak{p}, K_M}^{\mathfrak{g}, K}(V)$ と $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{p})} V^\vee$ の間に非退化なペアリングが存在するので、

$$J = {}^t\text{Ann}_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{p})} V^\vee)$$

となる。また、簡約リー環の任意の原始イデアルは既約最高ウェイト加群の零化イデアルになるという Duflo の結果 [5] を用いると

$$J = {}^t\text{Ann}_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{p})} W), \text{Ann}_{\mathcal{U}(\mathfrak{m})}(V^\vee) = \text{Ann}_{\mathcal{U}(\mathfrak{m})}(W)$$

となるような $\mathfrak{m}$ の既約最高ウェイト加群 W が取れる。したがって、定理 3.1 の Category $\mathcal{O}$ の版を用いることで、 $\text{PI.deg}((\mathcal{U}(\mathfrak{g})/J)^{G'})$ が有限であることと、一般化 Verma 加群 $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{p})} W$ の $\mathfrak{g}'$ への分岐則が一樣有界な重複度を持つことが同値になることがわかる。ここで、 $\mathfrak{p}' + \mathfrak{p} = \mathfrak{g}$ と $\mathfrak{p}' \cap \mathfrak{p} = \mathfrak{l}$ であることを用いると、

$$\begin{aligned} (\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{p})} W) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}')} \mathcal{U}(\mathfrak{g}') \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{p}')} V' &\simeq (\mathcal{U}(\mathfrak{p}') \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{l})} W) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{p}')} V' \\ &\simeq W \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{l})} V' \end{aligned}$$

が任意の $\mathfrak{m}'$ の既約最高ウェイト加群 V' に対して成り立つ。 $\mathfrak{m}' \supset \mathfrak{l}' \supset [\mathfrak{m}', \mathfrak{m}']$ なので、 $V'|_{\mathfrak{l}'}$ も既約となる。このようにして $\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{g}'$ への分岐則を $\mathfrak{m}$ から $\mathfrak{l}'$ への分岐則に帰着することが出来る。

3.4. 放物型誘導表現 2

前節では実の放物型部分群からの誘導について述べたが、コホモロジカル放物型誘導に対しても同様の主張を示すことができる。大きな違いとして、その場合には下からの評価が一般には成り立たない。

$\mathfrak{p}$ を $\mathfrak{g}$ の θ -安定な放物型部分代数とし、 $\mathfrak{l} := \bar{\mathfrak{p}} \cap \mathfrak{p}$ とする。ここで、 $\bar{\cdot}$ は $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ に関する複素共役である。このとき、 $\mathfrak{l}$ は $\mathfrak{p}$ の Levi 部分代数となる。さらに、 $K_L := N_K(\mathfrak{p})$ と置くと連結簡約部分群となり $(\mathfrak{l}, \mathfrak{k}_L)$ は対称対となる。

Bernstein 関手 $\Pi_{K_L}^K$ を、 $(\mathfrak{g}, K_L)$ -加群 V に対して

$$\Pi_{K_L}^K(V) := (\mathcal{O}(K) \otimes_{\mathfrak{k}} V)^{K_L}$$

で定める。ここで、 $\mathcal{O}(K)$ の右移動と V への作用のテンソル積で $\mathcal{O}(K) \otimes V$ を K_L -加群とみなしている。 $\Pi_{K_L}^K(V)$ には $(\mathfrak{g}, K)$ -加群の構造が定まる。 $\Pi_{K_L}^K$ の左導来関手を $L_i \Pi_{K_L}^K$ で表す。既約 $(\mathfrak{l}, K_M)$ -加群 V に対して

$$\mathcal{L}_i(V) := L_i \Pi_{K_L}^K(\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{p})} V)$$

と定める。 $\mathcal{L}_i(V)$ は有限長の $(\mathfrak{g}, K)$ -加群となる。詳しくは [10, Chapter IV]などを参照されたい。

$\mathcal{L}_i(V)$ の零化イデアルについて、次の結果が知られている。例えば [19, Lemma 6.3.3] や [10, Proposition 3.77] を参照されたい。

補題 3.9. V を既約 $(\mathfrak{l}, K_M)$ -加群とすると、

$$\text{Ann}_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}(\mathcal{L}_i(V)) \supset \text{Ann}_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{p})} V)$$

となる。

この補題から $\text{PI.deg}((\mathcal{U}(\mathfrak{g})/\text{Ann}_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}(\mathcal{L}_i(V)))^{G'})$ の上からの評価を一般化 Verma 加群を用いて行うことができる。

以下 G/P を G' -球多様体であると仮定する。したがって、 G' の Borel 部分群 B' と $x \in G$ が存在して $G'xP \subset G$ が開集合となる。

$$L' := x^{-1} \{g \in G' : gB'xP \subset B'xP\} x \cap P$$

と置くと、 P の簡約部分群となる。必要なら x を取り換えて $L' \subset L$ としてよい。

前小節と異なり $L' \cap G_{\mathbb{R}}$ が L' の実形になるように x や B' を取ることができるかは明らかではない。例えば [12, 13] や [9] など、具体的な G/P の場合に $L' \cap G_{\mathbb{R}}$ が実形になるようにうまく x がとれることが示されている。

定理 3.10. V を既約 $(\mathfrak{l}, K_M)$ -加群とし、その零化イデアルを $I \subset \mathcal{U}(\mathfrak{l})$ とする。このとき、 V, I によらないある定数 C が存在して

$$\mathcal{M}_{\mathfrak{g}', K'}^{\text{alg}}(\mathcal{L}_i(V)) \leq C \cdot \text{PI.deg}((\mathcal{U}(\mathfrak{l})/I)^{L'})$$

が任意の $i \in \mathbb{N}$ に対して成り立つ。

特に V が有限次元であれば $\mathcal{L}_i(V)|_{\mathfrak{g}', K'}$ が一様に有界な重複度を持つことがわかる。

一般には $\text{Ann}_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}(\mathcal{L}_i(V)) \supset \text{Ann}_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{p})} V)$ の包含関係は、 $\mathcal{L}_i(V)$ が 0 にならない場合であっても、等号にはならない。例えば、 $G_{\mathbb{R}}$ がコンパクト群で $\mathcal{L}_i(V)$ が有限次元表現になるような場合を考えれば、二つの零化イデアルが一致しないことがわかる。

一方、特別な場合に上の二つの零化イデアルが等しくなることがある。正則離散系列表現の場合 ($i = 0, L = K$) と四元数離散系列表現の場合 ($i = 1, \dim_{\mathbb{C}}(K/K \cap P) = 1$) である。正則離散系列表現の場合には $\mathcal{L}_0(V) = \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{p})} V$ なので二つの零化イデアルが等しいのは明らかである。四元数離散系列表現の場合は $\mathcal{L}_1(V)$ と $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{p})} V$ の Gelfand–Kirillov 次元が等しいという [6, Proposition 5.7] の結果と、[2, Korollar 3.7] から従う。

次の系は小林俊行氏による予想 [14, Conjecture 4.3] に対して肯定的な解答を与えている。

系 3.11. V を有限次元既約 $(\mathfrak{l}, K_L)$ -加群とする。 $(G_{\mathbb{R}}, G'_{\mathbb{R}})$ は対称対であり、 $\mathfrak{p}$ の冪零根基は可換であると仮定する。このとき、 V によらないある定数 C が存在して

$$\mathcal{M}_{\mathfrak{g}', K'}^{\text{alg}}(\mathcal{L}_i(V)) \leq C \cdot \mathcal{M}_{\mathfrak{l}}^{\text{alg}}(V)$$

が任意の $i \in \mathbb{N}$ に対して成り立つ。特に、 $\mathcal{L}_i(V)|_{\mathfrak{g}', K'}$ は一様に有界な重複度を持つ。

G/P が G' -球多様体であることは [11, Corollary 15] で示されている。より一般に、 G が単純で (G, G') が対称対になっている場合に、 G/P が G' -球多様体になるような P は [7] で分類されている。

参考文献

- [1] A. Beilinson and J. Bernstein. Localisation de g -modules. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 292(1):15–18, 1981.
- [2] W. Borho and H. Kraft. über die gelfand-kirillov-dimension. *Mathematische Annalen*, 220(1):1, 1976.

- [3] M. Brion. Représentations des groupes réductifs dans des espaces de cohomologie. *Math. Ann.*, 300(4):589–604, 1994.
- [4] M. Brion, D. Luna, and T. Vust. Espaces homogènes sphériques. *Invent. Math.*, 84(3):617–632, 1986.
- [5] M. Duflo. Sur la classification des idéaux primitifs dans l’algèbre enveloppante d’une algèbre de Lie semi-simple. *Ann. of Math. (2)*, 105(1):107–120, 1977.
- [6] B. H. Gross and N. R. Wallach. On quaternionic discrete series representations, and their continuations. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik. [Crelle’s Journal]*, 481:73, 1996.
- [7] X. He, H. Ochiai, K. Nishiyama, and Y. Oshima. On orbits in double flag varieties for symmetric pairs. *Transform. Groups*, 18(4):1091–1136, 2013.
- [8] R. Hotta, K. Takeuchi, and T. Tanisaki. *D-modules, perverse sheaves, and representation theory*, volume 236 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2008. Translated from the 1995 Japanese edition by Takeuchi.
- [9] M. Kitagawa. Stability of branching laws for highest weight modules. *Transform. Groups*, 19(4):1027–1050, 2014.
- [10] A. W. Knap and D. A. Vogan, Jr. *Cohomological induction and unitary representations*, volume 45 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1995.
- [11] T. Kobayashi. Multiplicity-free representations and visible actions on complex manifolds. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 41(3):497–549, 2005.
- [12] T. Kobayashi. A generalized Cartan decomposition for the double coset space $(U(n_1) \times U(n_2) \times U(n_3)) \backslash U(n) / (U(p) \times U(q))$. *J. Math. Soc. Japan*, 59(3):669–691, 2007.
- [13] T. Kobayashi. Visible actions on symmetric spaces. *Transform. Groups*, 12(4):671–694, 2007.
- [14] T. Kobayashi. Branching problems of Zuckerman derived functor modules. In *Representation theory and mathematical physics*, volume 557 of *Contemp. Math.*, pages 23–40. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011.
- [15] T. Kobayashi and T. Oshima. Finite multiplicity theorems for induction and restriction. *Adv. Math.*, 248:921–944, 2013.
- [16] J. C. McConnell and J. C. Robson. *Noncommutative Noetherian rings*, volume 30 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, revised edition, 2001. With the cooperation of L. W. Small.
- [17] F. Sato. On the stability of branching coefficients of rational representations of reductive groups. *Comment. Math. Univ. St. Paul.*, 42(2):189–207, 1993.
- [18] É. B. Vinberg and B. N. Kimel’fel’d. Homogeneous domains on flag manifolds and spherical subgroups of semisimple lie groups. *Funct. Anal. Appl.*, 12(3):168–174, 1978.
- [19] N. R. Wallach. *Real reductive groups. I*, volume 132 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1988.