

Actions of tensor categories

荒野 悠輝 (京都大学大学院理学研究科)*

概 要

作用素環とは、Hilbert 空間上の作用素がなす環である。本稿では、テンソル圏がどのように作用素環の“量子化された対称性”，あるいは“量子化された Galois 群”として現れるかを概観する。また，そのような作用の分類において，重要な役割を果たすテンソル圏の従順性に焦点を置き，従順性，およびその強い否定である性質 (T) について議論する。

1. 作用素環

本稿において，環は，非可換・結合的・単位的環のことを指すこととする。作用素環とは，Hilbert 空間上の作用素がなす環のうち，適切な位相で閉じたものである。本稿では C^* -環と von Neumann 環について扱う。

H を Hilbert 空間とする。 $B(H)$ を有界線形作用素全体のなす環とする。このとき， $B(H)$ は2つの異なる位相を持つ：

- ノルム位相，すなわち，作用素ノルム

$$\|x\| = \sup_{\xi \in H} \frac{\|x\xi\|}{\|\xi\|}$$

が誘導する位相。

- 強位相，すなわち各 $\xi \in H$ に対し，

$$x \mapsto \|x\xi\|$$

を連続にする最弱の位相。

また， $B(H)$ には，

$$(T^*\xi, \eta) = (\xi, T\eta) \text{ for all } \xi, \eta \in H$$

で特徴づけられる対合 $*$ があることに注意する。

定義 1.1. C^* -環 (resp. von Neumann 環) とは，Hilbert 空間 H 上の有界線形作用素がなす環 $B(H)$ のノルム位相で閉 (resp. 強位相で閉) かつ対合閉な部分環である。

また，非自明な閉イデアルを持たない C^* -環を単純 C^* -環と呼ぶ。また von Neumann 環 M であって中心

$$Z(M) = \{a \in M \mid ax = xa \text{ for all } x \in M\}$$

がスカラーしかないものを因子環と呼ぶ。(実際には，これは非自明な強位相で閉じたイデアルがないことと同値である。)

本研究は科研費 (研究課題: 18K13424) の助成を受けたものである。

* 京都市左京区北白川追分町

e-mail: y.arano@math.kyoto-u.ac.jp

単純 C^* -環や、因子環の分類は、作用素環において中心的な研究課題であり続けた。特に因子環の分類においては、Connes や Haagerup をはじめとした研究者たちにより、従順性と呼ばれるある種の近似性の仮定のもと、完全分類がなされた。その際に重要な役割を果たしたのは型と呼ばれる概念である。本稿ではその詳細に立ち入らないが、因子環は、その射影の性質によって、I 型 (このようなものはある Hilbert 空間上の $B(H)$ と同型なものに限る)、 II_1 型、 II_∞ 型、III 型と分けることができる。

次の目標として、従順因子環 (あるいは従順単純 C^* -環) の包含について考えてみよう。これが部分因子環論である。本稿では、特にその分類を考えることにする。

2. テンソル圏と作用

C^* -環の圏論化として、 C^* -圏が考えられる。 C^* -圏であって、よいテンソル積を持つものを C^* -テンソル圏と呼ぶ。このような C^* -テンソル圏は、作用素環の“量子化された対称性”，あるいは“量子化された Galois 群”として現れることを概説する。

定義 2.1. C^* -圏とは、圏 $\mathcal{C}$ であって、以下の条件を満たすものである。

- (1) すべての対象 X, Y に対し、射の集合 $\text{Hom}(X, Y)$ は Banach 空間であり、合成

$$\text{Hom}(X, Y) \times \text{Hom}(Y, Z) \rightarrow \text{Hom}(X, Z)$$

が双線形縮小写像である。

- (2) 反線形反変関手 $*$: $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ があって、対象は不変であり、全ての $T \in \text{Hom}(X, Y)$ に対し、

$$(i) \quad T^{**} = T,$$

$$(ii) \quad \|T^*T\| = \|T\|^2,$$

$$(iii) \quad (b) \text{ より, } \text{End}(X) \text{ を } C^*\text{-環と思ったときに, } T^*T \geq 0.$$

を満たすものがある。本稿では、特に有限直和と直和因子について閉じたものについてのみ考える。

C^* -マルチテンソル圏とは、6 組 $(\mathcal{C}, \otimes, a, 1, \lambda, \rho)$ であって、

- $\mathcal{C}$ は C^* -圏で、 $\otimes$ は $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ なる双線形双関手、
- a は $a_{X,Y,Z} : (X \otimes Y) \otimes Z \rightarrow X \otimes (Y \otimes Z)$ なる自然なユニタリ、
- 1 は $\mathcal{C}$ の対象であって、 λ, ρ は $\lambda_X : 1 \otimes X \rightarrow X$, $\rho_X : X \otimes 1 \rightarrow X$ なる自然なユニタリ、
- 全ての対象 X, Y, Z, W に対し、以下の図式が可換。

$$\begin{array}{ccc}
 & ((X \otimes Y) \otimes Z) \otimes W & \\
 \swarrow a_{X,Y,Z} \otimes 1 & & \searrow a_{X \otimes Y, Z, W} \\
 (X \otimes (Y \otimes Z)) \otimes W & & (X \otimes Y) \otimes (Z \otimes W) \\
 \downarrow a_{X, Y \otimes Z, W} & & \downarrow a_{X, Y, Z \otimes W} \\
 X \otimes ((Y \otimes Z) \otimes W) & \xrightarrow{1_X \otimes a_{Y, Z, W}} & X \otimes (Y \otimes (Z \otimes W))
 \end{array}$$

- 全ての対象 X, Y に対し, 以下の図式が可換.

$$\begin{array}{ccc} (X \otimes 1) \otimes Y & \xrightarrow{a_{X,1,Y}} & X \otimes (1 \otimes Y) \\ & \searrow \rho_X \otimes 1_Y & \swarrow 1_X \otimes \lambda_Y \\ & X \otimes Y & \end{array}$$

C*-マルチテンソル圏のうち, 1が既約なものを **C*-テンソル圏**と呼ぶ.

また, C*-テンソル圏がリジッドであるとは, 任意の対象 X に対し, ある対象 $\bar{X}$ と射 $R: 1 \rightarrow \bar{X} \otimes X, \bar{R}: 1 \rightarrow X \otimes \bar{X}$ があって,

$$(\bar{R}^* \otimes 1_X)(1_X \otimes R) = 1_X, (R^* \otimes 1_{\bar{X}})(1_{\bar{X}} \otimes \bar{R}) = 1_{\bar{X}}$$

を満たすことである. このとき, $\bar{X}$ を X の共役対象と呼ぶ.

既約な対象の同型類が有限個しかないようなリジッド C*-テンソル圏を **C*-フュージョン圏**という.

例 2.1. 有限次元 Hilbert 空間のなす圏を Hilb^f とすると, これは自然なテンソル積によってリジッド C*-テンソル圏になる.

無限次元 Hilbert 空間全体を考えても C*-テンソル圏にはなるが, Hilbert 空間が共役対象を持つのはそれが有限次元の場合に限る.

例 2.2. K をコンパクト群とする. このとき, K の有限次元ユニタリ表現のなす圏 $\text{Rep}(K)$ はリジッド C*-テンソル圏である.

例 2.3. G を離散群とする. このとき, 有限次元 G -次数付き Hilbert 空間の圏 Hilb_G^f を以下のように定めると, これはリジッド C*-テンソル圏である.

- 対象は有限次元 Hilbert 空間 X であって, 直交分解 $X = \bigoplus_{g \in G} X_g$ が与えられたものである. 射はこのような直交分解を保つ有界線形写像である.
- 対象 X, Y に対し, $X \otimes Y$ は Hilbert 空間としてのテンソルに G -次数を

$$(X \otimes Y)_g = \bigoplus_h X_{gh^{-1}} \otimes Y_h$$

と与えたものである.

このとき, Hilb_G^f の既約な対象は, $g \in G$ のみに成分を持つ 1 次元空間 $\mathbb{C}_g$ で尽くされることに注意する.

より一般に, $\omega: G^3 \rightarrow \mathbb{T}$ をトーラス値 3-コサイクル, すなわち

$$\omega(h, k, l)\omega(g, hk, l)\omega(g, h, k) = \omega(gh, k, l)\omega(g, h, kl)$$

を満たすものとする. このとき, Hilb_G^f の associative morphism a を

$$a_{\mathbb{C}_g, \mathbb{C}_h, \mathbb{C}_k} = \omega(g, h, k)$$

を自然に拡張したものとすると, これは新たなテンソル圏となる. これを $\text{Hilb}_{G, \omega}^f$ とかく.

コンパクト群の表現圏, および G -次数付き Hilbert 空間の圏はともに, コンパクト量子群の表現圏として一般化されるが, 本稿では立ち入らないことにする.

例 2.4. M を因子環とする．このとき， M -Hilbert 双加群とは，Hilbert 空間 H であって， M の左右作用：

$$M \odot M^{\text{op}} \rightarrow B(H)$$

を持つものとする．ここで， $\odot$ とは代数的な (すなわち完備化を行わない) テンソル積のことである．このとき， M -Hilbert 双加群 H, K に対し， H と K の M 上の Connes–Sauvageot テンソル積と呼ばれるテンソル積 $H \otimes_M K$ を M -Hilbert 双加群として定めることができる．このテンソル積によって， M -Hilbert 双加群は C^* -テンソル圏になる．

さらに， H の M 上での“次元”に対応する量指数を定めることができる． M -Hilbert 双加群がこの意味で指数有限となるのは，テンソル圏の意味で共役対象を持つことと同値である．したがって，指数有限な M -Hilbert 双加群全体のなす圏 $\text{Bimod}(M)$ はリジッド C^* -テンソル圏となる．

このテンソル圏は巨大なテンソル圏であり，実際，山上 [10] によって，どんな C^* -テンソル圏も II_1 -因子環の (extremal な) 双加群の圏の忠実充満な部分圏として実現できることが知られている．

例 2.5. A を単位的 C^* -環とする． A 上の双加群として， A 値の内積をもつもの (Hilbert A -対応と呼ぶ) を考えることができ，von Neumann 環の場合と同様に指数を考えることができる．指数有限の Hilbert A -対応と呼ばれるの圏はリジッド C^* -マルチテンソル圏となる．これを $\text{Bimod}(A)$ とかく．特に A の中心が自明なとき，これはリジッド C^* -テンソル圏となる．

定義 2.2. $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ を C^* -テンソル圏とする．テンソル関手とは，関手 $\alpha : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ とユニタリ $\alpha_0 : 1 \rightarrow \alpha(1)$ ，自然なユニタリ

$$(\alpha_2)_{X,Y} : \alpha(X) \otimes \alpha(Y) \rightarrow \alpha(X \otimes Y)$$

の組であって，以下の図式が可換となるものである．

$$\begin{array}{ccc} (\alpha(X) \otimes \alpha(Y)) \otimes \alpha(Z) & \xrightarrow{(\alpha_2)_{X,Y} \otimes 1_Z} & \alpha(X \otimes Y) \otimes \alpha(Z) \xrightarrow{(\alpha_2)_{X \otimes Y, Z}} \alpha((X \otimes Y) \otimes Z), \\ \downarrow a_{\alpha(X), \alpha(Y), \alpha(Z)} & & \downarrow \alpha(a_{X,Y,Z}) \\ \alpha(X) \otimes (\alpha(Y) \otimes \alpha(Z)) & \xrightarrow{1_{\alpha(X)} \otimes (\alpha_2)_{Y,Z}} \alpha(X) \otimes \alpha(Y \otimes Z) \xrightarrow{(\alpha_2)_{X,Y \otimes Z}} \alpha(X \otimes (Y \otimes Z)) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 \otimes \alpha(X) & \xrightarrow{\lambda_{\alpha(X)}} & \alpha(X) \\ \downarrow \alpha_0 \otimes 1_{\alpha(X)} & & \downarrow \alpha(\lambda_X) \\ \alpha(1) \otimes \alpha(X) & \xrightarrow{(\alpha_2)_{1,X}} & \alpha(1 \otimes X) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \alpha(X) \otimes 1 & \xrightarrow{\rho_{\alpha(X)}} & \alpha(X) \\ \downarrow 1_{\alpha(X)} \otimes \alpha_0 & & \downarrow \alpha(\rho_X) \\ \alpha(X) \otimes \alpha(1) & \xrightarrow{(\alpha_2)_{X,1}} & \alpha(X \otimes 1) \end{array}$$

関手 $\alpha, \beta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ が自然にモノイダル同値であるとは，以下の図式を可換にする自然なユニタリ $U_X : \alpha(X) \rightarrow \beta(X)$ があることである．

$$\begin{array}{ccc} \alpha(X) \otimes \alpha(Y) & \xrightarrow{(\alpha_2)_{X,Y}} & \alpha(X \otimes Y) \\ \downarrow U_X \otimes U_Y & & \downarrow U_{X \otimes Y} \\ \beta(X) \otimes \beta(Y) & \xrightarrow{(\beta_2)_{X,Y}} & \beta(X \otimes Y) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & 1 & \\ \alpha_0 \swarrow & & \searrow \beta_0 \\ \alpha(1) & \xrightarrow{U_1} & \beta(1) \end{array}$$

特に， $\mathcal{D} = \text{Bimod}(M)$ や $\mathcal{D} = \text{Bimod}(A)$ のとき，テンソル関手 $\alpha : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ を $\mathcal{C}$ の M や A への作用と呼ぶことにする．

例 2.6. G を離散群とし, α を G の M への作用とする. このとき,

$$\text{Hilb}_G^f \rightarrow \text{Bimod}(M) : \mathbb{C}_g \mapsto {}_{\alpha_g}L^2(M)$$

は Hilb_G^f の作用となる. ここで, ${}_{\alpha_g}L^2(M)$ とは, Hilbert 空間 $L^2(M)$ に新たな双加群の構造を

$$x \cdot \xi \cdot y := \alpha_g(x)\xi y$$

として入れたものである.

同様にして, $\mathcal{C} = \text{Hilb}_G^f$ の因子環 M (resp. 単純 C^* -環 A) への作用とは, G の $M \otimes \mathbb{B}(\ell^2)$ (resp. $A \otimes \mathbb{K}(\ell^2)$) へのコサイクル作用に他ならない. そのような作用同士が自然にモノイダル同値となるのは, 作用同士が互いにコサイクル共役であるとき, かつそのときに限る. これを踏まえて, テンソル圏の作用を離散群作用の一般化と思うことにする.

また, ω をトーラス値 3-コサイクルとすると, Hilb_G^f の作用とはこの 3-コサイクルを障害類にもつ G -kernel のことである.

上記の言葉遣いを使って部分因子環論を整理し直すと以下ようになる. $N \subset M$ を指数有限の部分因子環とする. このとき, $L^2(M)$ は $\text{Bimod}(N)$ の対象であるが, もとの M の積は, $\text{Bimod}(N)$ の代数対象としての積

$$L^2(M) \otimes_N L^2(M) \rightarrow L^2(M)$$

に織り込まれる. このとき, $\text{Bimod}(N)$ の対象 $L^2(M)$ とその上の代数対象としての構造は N の拡大としての M を復元する.

このような M を $\text{Bimod}(N)$ の代数対象と思ったものを公理化したものが Longo の Q -system である. Q -system, standard invariant, paragroup などと呼ばれているものは全て本質的に等価なデータを与える. したがって, N の拡大 M の分類は $\text{Bimod}(N)$ の Q -system の同型類の分類に帰着するが, これは問題の言い換えに過ぎない. 実際, $\text{Bimod}(N)$ は巨大な圏であり, その Q -system の分類はとても難しい. 代わりに Q -system が生成する部分テンソル圏 $\mathcal{C}$ を考えると, これはしばしば小さい圏になる. これを用いると, N の拡大の分類は, より細かく, 以下の 3 つの問題に分解する:

- (1) どのような C^* -テンソル圏 $\mathcal{C}$ がこの方法で現れるか.
- (2) C^* -テンソル圏 $\mathcal{C}$ が与えられたとき, Q -system をどのように分類するか.
- (3) C^* -テンソル圏 $\mathcal{C}$ の N への作用をどのように分類するか.

問題 (1) についてだが, 前述の通り, すべてのリジッド C^* -テンソル圏は $\text{Bimod}(N)$ の部分圏として現れることが知られている. 特に, 例 ?? にあるように, 問題 (1) は群の分類を含む問題であり, 現実的でない.

問題 (2) は例 ?? の場合, その部分群とその上の 2-コサイクルの分類に対応し, これらは組み合わせ論的な問題となり, 一般に与えられた群に対して分類を与えるような統一的方法は存在しない.

問題 (3) は例 ?? の場合, 群作用のコサイクル共役類の分類に対応する. このような群作用の分類はやはり多くの研究者によって研究されてきた問題である. ここでも, 群

の従順性が重要な役割を果たし、特に、従順 II_1 -因子環上の従順群の作用は唯一であることが知られている。したがって、そのアナロジーとして、従順 II_1 -因子環上の従順テンソル圏の (extremal な) 作用は唯一であるというのは期待すべきことであろう。これが (ほぼ) Popa の従順部分因子環の分類の主張するところである。

定理 2.1. (cf. Popa [7]) M を従順 II_1 -因子環、 $\mathcal{C}$ を従順テンソル圏とする。 α, β を $\mathcal{C}$ の M 上の忠実充満な作用とすると、これらは M の自己同型を除いて自然にモノイダル同値である。

また、近年、戸松氏によってより一般の結果が得られている。

定理 2.2. (戸松 [9]) M を真無限因子環、 $\mathcal{C}$ を従順テンソル圏とする。 α, β を $\mathcal{C}$ の M 上の中心的自由で忠実充満な作用とすると、これらは M の自己同型を除いて自然にモノイダル同値である。

これらの C^* -環における類似として以下を示した。ここには Rokhlin 性や、近似的ユニタリ同値性などの仮定が必要であるが、細かい定義は割愛する。

定理 2.3. (荒野) A を単位的 C^* -環、 $\mathcal{C}$ を C^* -フュージョン圏、 α, β を $\mathcal{C}$ の A への Rokhlin 作用とする。このとき、もし全ての対象 X に対し $\alpha(X)$ と $\beta(X)$ が近似的にユニタリ同値であるならば、 α と β は A の自己同型を除いて自然にモノイダル同値である。

これは以下の帰結を含む。

例 2.7. A を単純 C^* -環、 G を有限群とする。このとき、 G の Rokhlin (コサイクル) 作用 α, β であって、各 $g \in G$ に対し、 $\alpha_g \beta_g^{-1}$ が近似的に内的ならば、 α と β はコサイクル共役である。これは泉による有限群作用の分類 [4]、および小高-照屋による有限量子群作用の分類 [5] のバリエーションと思える。

同様に、Rokhlin G -kernel α, β が同じ障害類 $\omega \in H^3(G, T)$ を持ち、各 $g \in G$ に対し、 $\alpha_g \beta_g^{-1}$ が近似的に内的ならば、 α と β はコサイクル共役である。

例 2.8. $A \subset B, B'$ を単純 C^* -環の包含とし、 E, E' を B, B' から A への指数有限の条件付き期待値とし、以下を仮定する。 B, B' が生成する $\text{Bimod}(A)$ の部分圏をそれぞれ $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ と書くことにする。

- B と B' は Hilbert A -双加群として近似的にユニタリ同値、
- $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ がフュージョン圏であり、その A への作用が Rokhlin 性を持つ、
- $\mathcal{C}$ と $\mathcal{C}'$ は Q -system B と B' を保って自然にモノイダル同値。

このとき、ある同型 $\theta: B \rightarrow B'$ であって $\theta(A) = A$ なるものがある。

同様に、 $\mathcal{C} \rtimes G$ を考えることにより、包含上の有限群作用についても考えることができる。

3. 従順性

前節で群の従順性が分類において果たす役割について議論した。本章では、群およびテンソル圏の従順性に焦点を当ててみたい。

まずは群の従順性、およびその強い否定である性質 (T) について説明しよう。

定義 3.1. G を局所コンパクト群とし, $\pi: G \rightarrow B(H)$ をユニタリ既約表現, $\rho: G \rightarrow B(K)$ をユニタリ表現とする. π が ρ に弱い意味で含まれるとは, 任意の $\xi \in H$ に対し, あるネット $(\eta_i)_{i \in I} \in K$ があって, 行列係数 $\varphi_i(g) = (\rho(g)\eta_i, \eta_i)$ が $\varphi(g) = (\pi(g)\xi, \xi)$ にコンパクト一様収束することを言う.

G が従順であるとは, 自明表現 1 が正則表現 $\lambda: G \rightarrow B(L^2(G))$ に弱い意味で含まれることを言う.

G が性質 (T) を持つとは, 任意の表現 π に対し, 自明表現 1 が π に弱い意味で含まれるならば, 1 が π に (部分表現として) 含まれることをいう.

注意 3.1. G が従順であり, かつ性質 (T) を持つとする. このとき, 自明表現が正則表現に含まなくてはならない, 即ち, 非自明な平行移動不変な L^2 -関数が存在することになる. これは G がコンパクトであるということに他ならない. このような近似性/剛性は, コンパクト (あるいは有限) 部分集合による近似を議論するものであるという立場から, コンパクト群のずれは無視するということにすれば, 従順性と性質 (T) は互いに相反する概念である.

性質 (T) は Kazhdan によって導入された性質で, もともとは高階 Lie 群の格子が常に有限生成であることを示すために用いられたが, それ以降, 様々な分野で多くの応用が発見されてきた. このような性質をテンソル圏についても考えてみたい. そのためには, テンソル圏のユニタリ表現論に対応するものが必要である. これには, Popa–Vaes[8] による正定値関数を用いたアプローチ, Ghosh–Jones[3] による tube algebra を用いたアプローチ, Neshveyev–山下 [6] によるユニタリ圏論的中心を用いたアプローチがあるが, 本稿では, 圏論的中心を用いたアプローチに沿って説明する.

定義 3.2. $\mathcal{C}$ をリジッド C^* -テンソル圏とする. $\text{ind } \mathcal{C}$ を対象の (形式的) 無限直和を許した圏とすると, これは自然に C^* -テンソル圏と思える.

Z を $\text{ind } \mathcal{C}$ の対象とする. Z の **half-braiding** とは $X \in \mathcal{C}$ に対して自然なユニタリ $U_X: Z \otimes X \rightarrow X \otimes Z$ の族であって,

$$U_{X \otimes Y} = (1_X \otimes U_Y)(U_X \otimes 1_Y)$$

を満たすものである.

対象と half-braiding の組全体は, 自然にテンソル圏をなす. これをユニタリ圏論的中心とよび, $Z(\text{ind } \mathcal{C})$ とかくことにする.

任意のリジッド C^* -テンソル圏の上の自然な half-braiding として, 以下のものが考えられる.

- 自明な half-braiding: $Z = 1$ とし, $U_X = 1_X: 1 \otimes X \simeq X \simeq X \otimes 1$.
- 正則 half-braiding: $Z = \bigoplus_{Y \in \text{Irr}(\mathcal{C})} Y \otimes \bar{Y}$ とすると, その上の自然な half-braiding が定まる.

また, 弱い意味での包含を同様に考えることができ, これを用いて, テンソル圏の従順性・性質 (T) を定義することができる.

定義 3.3. $\mathcal{C}$ をリジッド C^* -テンソル圏とする.

$\mathcal{C}$ が従順であるとは, 自明な half-braiding が正則 half-braiding に弱い意味で含まれることを言う.

$\mathcal{C}$ が性質 (T) を持つとは、任意の half-braiding (Z, U) に対し、自明表現が (Z, U) に弱い意味で含まれるならば、それが (Z, U) に (部分対象として) 含まれることをいう。

例 3.1. $\mathcal{C} = \text{Hilb}_G^f$ とする。このとき、 $\text{ind } \mathcal{C}$ の元 Z は (無限次元かもしれない) G -次数付き Hilbert 空間と思える。このとき、この上の half-braiding とは、 G の Z 上のユニタリ表現 $\pi: G \rightarrow B(Z)$ であって、任意の $g, h \in G$ に対し、 $\pi(g)Z_h = Z_{ghg^{-1}}$ を満たすものである。

特に、 Z が自明な次数付けをもつ (i.e. $Z = Z_1$) 場合として、 G の表現圏を含んでいる。これにより、 G が従順である/性質 (T) をもつのは、 Hilb_G^f が従順である/性質 (T) をもつことと同値であることがわかる。

例 3.2. K をコンパクト群とする。このとき、 $\text{Rep}(K)$ は従順である。このような圏は K の Pontrjagin 双対の対応物と思うことができ、そのような意味でアーベル群が従順であることの一般化と思える。

このような性質 (T) が実はフュージョン則 (すなわち、既約表現のテンソル積を既約表現に分解したときの重複度) からわかるのではないか、というのが Popa の予想である。これは以下のように否定的に解決された。

定理 3.1. (荒野 [1], [2]) $0 < q < 1$ とし、 K を連結単純コンパクト Lie 群であって、 $SU(2)$ でないとする。その q -変形の表現圏 $\text{Rep}(K_q)$ (あるいは同じことであるが、量子包絡環 $U_q(\mathfrak{k})$ の有限次元認容表現の圏) は性質 (T) を持つ。

実際には、より強く、 $Z(\text{ind } \text{Rep}(K_q))$ は K の複素化 G のユニタリ表現の圏と非常に似た性質を持つことが示せる。上記の定理は、高階の複素 Lie 群が性質 (T) を持つことから従う。また、 $q = 1$ の場合が古典的な $\text{Rep}(K)$ の場合であるが、前述の通り、 $\text{Rep}(K)$ は従順であるから、 q が自明か非自明かによって、対照的な性質を持つということが分かる。

参考文献

- [1] Arano, Y.; Unitary spherical representations of Drinfeld doubles, *J. Reine Angew. Math.*, **742** (2018), 157–186,
- [2] Arano, Y.; Comparison of Unitary Duals of Drinfeld Doubles and Complex Semisimple Lie Groups, *Comm. Math. Phys.* **351** (2017), no. 3, 1137–1147,
- [3] Ghosh, S.K.; Jones, C.; Annular representation theory for rigid C^* -tensor categories. *J. Funct. Anal.* **270** (2016), no. 4, 1537–1584,
- [4] Izumi, M.; Finite group actions on C^* -algebras with the Rohlin property. I. *Duke Math. J.* **122** (2004), no. 2, 233–280,
- [5] Kodaka, K.; Teruya, T.; The Rohlin property for coactions of finite dimensional C^* -Hopf algebras on unital C^* -algebras. *J. Operator Theory* **74** (2015) no. 2, 329–369,
- [6] Neshveyev, S.; Yamashita, M. Drinfeld center and representation theory for monoidal categories, *Comm. Math. Phys.* **345** (2016), no. 1, 385–434,
- [7] Popa, S.; Classification of amenable subfactors of type II. *Acta Math.* **172** (1994), no.2, 163–255,
- [8] Popa, S.; Vaes, S.; Representation theory for subfactors, λ -lattices and C^* -tensor categories. *Comm. Math. Phys.* **340** (2015), no. 3, 1239–1280,
- [9] Tomatsu, R.; Centrally free actions of amenable C^* -tensor categories on von Neumann algebras, preprint,

- [10] Yamagami, M.; C^* -tensor categories and free product bimodules, *J. Funct. Anal.* **197** (2003), no. 2, 323–346.