

無限粒子系から量子ウォークへ

今野 紀雄 (横浜国立大学)*

1. はじめに

本講演では、公式にはほとんど話したことが無かった「無限粒子系から量子ウォークへの個人的な研究の転換期の話題」にも触れつつ、私自身の量子ウォーク (quantum walk) の研究について主に話したい。

私の著書や解説などで既にかいたことであるが、量子ウォークをはじめて知ったのは、2002年1月の正月休みに、検索サイトに偶然打ち込んだ「quantum random walk」(当時はそう呼ばれていた) により、ネット上に数編しかなかった論文がヒットしたことによる。最初は、無限粒子系¹の量子版、例えば「quantum oriented percolation」や「quantum directed percolation」はあるのかと思って入力してみたが、当時全くヒットしなかったもので、それでは「quantum random walk」はどうかと、遊び心で打ち込んだのが、そもそものきっかけである。

それ以前の2001年までは、まるでその偶然の機会を予期していたかの如く、私は無限粒子系の量子力学的アプローチの研究周辺を彷徨っていた。具体的には、Sudbury and Lloyd による90年代の一連の論文 [60, 61] を読んだり、著者の一人の Sudbury 氏 (当時 Monash 大学) を訪問し議論をすることで理解を深めていた。そのようないわばアイドリングの時期が背景にあり、量子ウォークをネットで偶然知るという触媒により、その方面での研究がやっと沈黙を破り活動期に入ることが可能となった。今思い返しても、この不思議な符合に驚くしかない。

そして最初の私の量子ウォーク論文 Konno, Namiki and Soshi [40] を、2002年5月に arXiv に投稿した。その後、6月の弱収束極限定理論論文 Konno [24] を経て、8月に上記の Sudbury 氏も加わった Konno, Namiki, Soshi and Sudbury [40] の量子ウォーク論文を arXiv に投稿した。このように2002年は、私自身の研究史の中で、まさに、無限粒子系の量子力学的アプローチと量子ウォークとが交差した歴史的瞬間であった。一方、それと並行してほぼ同じ時期の2002年頃、無限粒子系の量子力学的手法が私の頭の中で重低音のように鳴り響く状況もあり、無限粒子系の双対性に関しても結果を2編の論文 Konno [21, 22] にまとめることができた²。また、同じ頃に、量子ウォークと無限粒子系とのテンソル表現の類似性を示唆する論文として、Katori, Konno, Sudbury and Tanemura [16] がある。

2010 Mathematics Subject Classification: 60F05, 60G50

キーワード: 量子ウォーク, 極限定理, 局在化, 無限粒子系, 双対性

* 〒241-8501 神奈川県横浜市保土ヶ谷区常盤台 79-5 横浜国立大学 大学院工学研究院
e-mail: konno-norio-bt@ynu.ac.jp

¹ 無限粒子系に関する本として、例えば、Liggett [44], Durrett [7] がある。

² 2002年の日本語の解説として、今野 [23] もある。特に、2状態の場合しか得られていなかった双対性を多状態の場合まで拡張することが可能となった [22]。これは、2状態の量子ウォークと3状態以上の多状態量子ウォークとの違いの関係も示唆しているのかもしれない

その流れの一端として、量子ウォークのエンタングルメントを彷彿とさせるような符号付測度を用いて、non-attractive 性を持つ無限粒子系の極限定理を求めた論文、Katori, Konno and Tanemura [17] もある。

2008年には、それまでの無限粒子系と量子ウォークに関する研究を本にまとめ、それぞれ、今野『無限粒子系の科学』[28]と今野『量子ウォークの数理』[27]として出版することができた。さらに同年、複雑ネットワークに関する数学的側面から、今野・井手『複雑ネットワーク入門』[29]も出版した³。現在では、複雑ネットワーク上の量子ウォークの解析は研究テーマの一つである。「無限粒子系」、「量子ウォーク」そして「複雑ネットワーク」という3つの研究テーマの中の、そしてそれら相互の幾つかの欠けていたピースが、やっと埋まりはじめ、すべてが結びついてきた感がある。まさに、3冊の本を執筆し、出版した2008年頃は、個人的には50歳を迎えた年でもあり、3つの研究テーマが融合した本格的な出発点ともいえる。

さて、量子ウォークへのアイデアを提案した文献として頻繁に引用されるのは、1993年の Aharonov et al. の論文である [1]⁴。しかし、2001年の Ambainis et al. の論文 [3] によって、量子ウォークの研究が開花したといって過言ではない。実は、それらの文献の前後に、例えば、1988年の Gudder による著書『Quantum Probability』[10]では、量子ウォークのモデルが定義され、簡単な性質を紹介している。同様に、1996年頃に量子ゲームの提案者としても有名である Meyer も同じモデルを量子セルオートマトンとして提案し [52]、2年ほど関連の論文が出たが進展はなかった。このように現れては消えていった量子ウォークは、最終的には量子コンピュータの研究が追い風となり、上記2001年の Ambainis et al. の本格的な研究論文などで、多数の目に留まるようになった。

私に関しては、初めにも触れたように、2002年1月に、数編程しか arXiv で入手できなかった量子ウォーク関連の論文を偶然見つけたのが、量子ウォークとの出会いである。単純そうではあるが、一見するとわかりづらい定義の‘量子ウォーク’なるものに興味を持った。何故なら、ランダムウォークの量子版と言われて導入されたこのモデルが、ランダムウォークと異なる性質を持っていたからだ。1番目は、ランダムウォークの確率測度が2項分布で表され、出発点の確率が高い単峰型であるのに対し、量子ウォークの確率測度は、粗く言うとその逆の、出発点の確率が最も低く、2つの端点に近い場所の確率が高い逆釣鐘型であること。そして、2番目は、ランダムウォークの分散が時刻に比例するのに対して、量子

³ 複雑ネットワークについては、すでに2005年に日本語での最初の本、増田・今野 [48] を、そして、2010年にさらにその発展系である増田・今野 [49] を上梓した。実は、2008年にはシミュレーションがベースの図解本、今野・町田 [30] も出版している。

⁴ Y. Aharonov は、アハロノフ・ボーム効果、弱測定の研究でも有名である。量子ウォークは、量子モデルとしては簡単に定義できるモデルなので、Feynman をはじめとし、おそらく多くの人達によって同様のモデルが提案されてきたと思われる。例えば、Feynman and Hibbs [9] で量子ウォークの原型となるモデルに触れられている。尚、名称は、量子ウォークに落ち着いてきたが、以前は、量子ランダムウォーク (quantum random walk) も使用された。実は、量子ウォークには、離散時間と連続時間の2種類あるが、本講演では、離散的にユニタリ作用素によって逐次状態を遷移させる離散時間のモデルに絞る。

ウォークの場合は時刻の 2 乗に比例することだ。

2002 年当時、まだ本格的な研究が始まった時期だけに、確率測度の明示的な表現やランダムウォークの中心極限定理に対応する弱収束極限は知られていなかった。今や 1 次元系の基本的な結果となったが、組合せ論的な手法で弱収束極限を得ることに成功し、2002 年の 6 月には第一報を投稿することができ [24]、その後まとまった論文を完成した [25]⁵。現在では理論的な側面だけでなく、量子ウォークの実現方法の様々な提案 [47] や応用、例えば、強相関電子系 [55]、トポロジカル絶縁体 [19, 54]、放射性廃棄物低減 [12, 50, 51]、光学 [13] など盛んに研究されている。

量子ウォークに関するレビュー、あるいは、本はすでに幾つかあり、例えば、Venegas-Andraca [64]、Konno [26]、Cantero et al. [6]、Manouchehri and Wang [47]、Portugal [56]⁶。特に日本語の本としては、連続時間まで扱った量子ウォーク最初の成書（今野 [27]）と、最近までの離散時間量子ウォーク研究の解説書（今野 [32]）がある。ごく最近、フーリエ解析にもとづいた専門書が出版された（町田 [46]）。さらに、初心者向けの入門書として町田 [45] が出版されている。

また、近年の主に巨大 IT 企業⁷による量子コンピュータの急速なハード開発により、量子ウォークに基づくアルゴリズムが量子コンピュータ上で動くことが現実のものとなりつつあり、新しい局面に入ってきた。特に、小さなサイズの量子ウォークであれば、無料のクラウド上の量子コンピュータにアクセスして動かすことが可能である⁸。本講演では、このようなごく最近の動向にも触れたい。

以下、私見であるが、なぜ量子ウォークが注目され続けているのかについて、理論的側面に主に絞り、いくつかの転機をリストアップしてみた⁹。

- (1) 2000 年頃 Ambainis 達の論文 [3]
- (2) 2002 年 弱収束極限定理 (K [24])
- (3) 2004 年 局在化の証明 (Inui, Konishi, K [14])
- (4) 2005 年 局在化と弱収束極限定理 (Inui, K, Segawa [15])
- (5) 2010 年 CGMV 法の誕生 (Cantero, Grunbaum, Moral, Velazquez [4])
- (6) 2010 年 新たな局在化の発見（一欠陥モデル）(K [31])
- (7) 2012 年 グラフゼータ関数との関連 (K, Sato [42])

⁵ 今では、フーリエ解析、停留位相法、母関数法など様々な手法で求められている。

⁶ 第 2 版が 2018 年に出版された。特に、staggered model [57] や element distinctness の問題 [2] などに関しても加筆されている。

⁷ 具体的には、IBM、グーグル、インテル、マイクロソフト、アリババなど。

⁸ 例えば、IBM の量子コンピュータ実機「IBM Q」。

⁹ 2002 年から約 16 年刊行されている量子情報科学系の雑誌「Quantum Information Processing」の twitter で、第 1 巻（2002 年）に掲載された私が単著で書いた最初の量子ウォークの論文（弱収束極限定理）[24] が「Fine Fifteen」の 3 番目に選出。さらに、選出された全 15 編の論文のうち、4 編、すなわち、1, 3, 11, 15 番目が量子ウォーク関連論文であり、これは量子ウォークが量子情報科学の分野で非常に重要であることを示すものである。一方、量子ウォークを主とした国際会議が 2011 年より、毎年度開催されている。また、RIMS や IMI でも関連する研究会が継続的に行われている。

- (8) 2014 年 定常測度の本格的な解析 (K [33])
- (9) 2014 年 スペクトル写像定理とグラフの幾何構造の関係 (Higuchi, K, Sato, Segawa [11])
- (10) 2016 年 スペクトル散乱理論による解析 (Suzuki [63])
- (11) 2016 年 量子ウォークのグラフ理論的構成法の提案 (Portugal [57])

さて、紙面が限られているので、本稿では量子ウォークの特徴的な性質である、線形的拡がりと局在化について簡単な 1 次元モデルで解説する。まず、次節では線形的拡がりについて、 $\mathbf{Z}$ 上の最近接点に移動する 2 状態量子ウォークにより説明する。但し、 $\mathbf{Z}$ は整数全体の集合である。引き続き、3 節では、局在化について述べる。扱えなかった話題の一部は、講演中に適宜補足したい。

2. $\mathbf{Z}$ 上の 2 状態量子ウォーク

まず一般の場合の定義を与える。量子コイン (quantum coin) とも呼ばれる U を $M \times M$ のユニタリ行列とし、 P_k ($k = 1, 2, \dots, M$) を (k, k) 成分だけ 1 で他の成分は全て 0 の M 次正方行列とする。このとき、 P_k は射影 ($P_k^2 = P_k$, $P_k^* = P_k$) で、 $\sum_{k=1}^M P_k = I_M$ となる。但し、 I_M は M 次の単位行列である。ここで、 $A_k = P_k U$ ($k = 1, 2, \dots, M$) を考え、この M 個の行列が各点から M 個の異なる場所への移動に対応するものと考え、一般の場合の量子ウォークが定義できる。

さて、 $\mathbf{Z}$ 上の 2 状態量子ウォークの場合には、以下の量子コインを考える。

$$U = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

但し、 $a, b, c, d \in \mathbf{C}$ 。ここで、 $\mathbf{C}$ は複素数全体の集合である¹⁰。この量子ウォーカーは、‘左向き’ $|L\rangle$ と ‘右向き’ $|R\rangle$ の 2 つの内部状態をもち、それぞれ、量子ウォーカーの動く向きに対応していると解釈できる。ここでは、 $|L\rangle = {}^T[1, 0]$, $|R\rangle = {}^T[0, 1]$ とおく。但し、 T は転置を表す。ランダムウォークの確率 p (左に移動), q (右に移動) に対して、次の行列 $A_1 = P_1 U$, $A_2 = P_2 U$ を与える。

$$A_1 = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix}.$$

ここで、 $U = A_1 + A_2$ の関係に注意。時刻 n での量子ウォークの状態を $\Psi_n = [\dots, \Psi_n(-1), \Psi_n(0), \Psi_n(1), \dots]$ とする。但し、時刻 n で場所 x での状態 $\Psi_n(x)$ は $\Psi_n(x) = {}^T[\Psi_n^L(x), \Psi_n^R(x)]$ とおく。右肩の L, R がそれぞれ $|L\rangle$ と $|R\rangle$ の状態を表す。このとき、量子ウォークの時間発展を $\Psi_{n+1}(x) = A_1 \Psi_n(x+1) + A_2 \Psi_n(x-1)$ で定める。従って、系全体のダイナミクスを与える $\infty \times \infty$ サイズのユニタリ行列を $U^{(s)}$ とおくと、 n ステップ後の状態 Ψ_n は、 $\Psi_n = (U^{(s)})^n \Psi_0$ である。

¹⁰ 特に、量子ウォークの中で研究が最も多くされているモデルは、アダマールウォーク (Hadamard walk) で、その量子コイン U はアダマールゲート ($a = b = c = -d = 1/\sqrt{2}$) で決まる。

このような準備の下で、時刻 n 、場所 x に対する “ $X_n = x$ ” の確率を、 $P(X_n = x) = \|\Psi_n(x)\|^2 = |\Psi_n^L(x)|^2 + |\Psi_n^R(x)|^2$ で定義する。但し、量子ウォークは、時刻 n ごとの確率測度の列 $\{P(X_n = \cdot) : n = 0, 1, 2, \dots\}$ が与えられているだけで、確率過程として定義されてはいないことに注意。さらに、次の写像 $\phi : (\mathbf{C}^2)^{\mathbf{Z}} \rightarrow \mathbf{R}_+^{\mathbf{Z}}$ を導入する。ここで、 $\mathbf{R}_+ = [0, \infty)$ 。具体的には、

$$\Psi = {}^T \left[\dots, \begin{bmatrix} \Psi_n^L(-1) \\ \Psi_n^R(-1) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Psi_n^L(0) \\ \Psi_n^R(0) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Psi_n^L(1) \\ \Psi_n^R(1) \end{bmatrix}, \dots \right] \in (\mathbf{C}^2)^{\mathbf{Z}}$$

に対して、 $\phi(\Psi)(x) = |\Psi^L(x)|^2 + |\Psi^R(x)|^2$ ($x \in \mathbf{Z}$) とおく¹¹。そして、場所 x での測度を $\mu(x) = \phi(\Psi(x))$ で定める。ここで、量子ウォークの定常測度全体の集合 $\mathcal{M}_s = \{\mu \in \mathbf{R}_+^{\mathbf{Z}} \setminus \{\mathbf{0}\} : \text{任意の } n \geq 0 \text{ に対して、} \phi((U^{(s)})^n \Psi_0) = \mu \text{ が成り立つような初期状態 } \Psi_0 \in (\mathbf{C}^2)^{\mathbf{Z}} \text{ が存在する}\}$ を導入する。但し、 $\mathbf{0}$ はゼロベクトルである。即ち、時刻 n の測度 $\mu_n = \phi((U^{(s)})^n \Psi_0)$ が時刻 $n (\geq 0)$ に依存しない測度のことを定常測度いう¹²。次に、時刻 n 、場所 x での測度を $\mu_n(x) = \phi(\Psi_n(x))$ とおき、極限測度 $\mu_\infty(x)$ を $\mu_\infty(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(x)$ で（右辺が存在するとき）定める。さらに、時間平均極限測度を $\bar{\mu}_\infty(x)$ とおく。

さて、 $\Psi_0^{\{0\}} = \Psi_0^{\{0\}}(\alpha, \beta)$ を、原点での量子ビット状態が $\varphi = {}^T[\alpha, \beta] (|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1)$ 、その他の場所では ${}^T[0, 0]$ の初期状態とする。このとき、原点での φ を初期量子ビットと呼ぶこともある。さらに、極限測度全体の集合、時間平均極限測度全体の集合、弱収束極限測度全体の集合を、それぞれ $\mathcal{M}_\infty^{\{0\}}, \bar{\mathcal{M}}_\infty^{\{0\}}, \mathcal{M}^{(w, \{0\})}$ とおく。様々な量子ウォークに対して、上記の $\mathcal{M}_s, \mathcal{M}_\infty^{\{0\}}, \bar{\mathcal{M}}_\infty^{\{0\}}, \mathcal{M}^{(w, \{0\})}$ を求め、それらの間の関係を明らかにすることが、最近の我々グループの研究テーマの一つとなっている。組合せ論的手法により、原点から出発した場合の量子ウォーク X_n の確率測度が得られるが、形が煩雑なので割愛する（例えば、今野 [32] の補題 2.2 を参照）。そして、確率測度の具体的な組合せ論的表現とヤコビ多項式に関する漸近挙動の結果を用いると、 X_n に対する弱収束の極限定理が得られる (Konno [24, 25])。この $\mathbf{Z}$ 上の 2 状態量子ウォークの弱収束極限定理は、対応するランダムウォークの中心極限定理に比する重要な結果である¹³。

定理 1 $abcd \neq 0$ のとき¹⁴、 $w\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} X_n/n = W$ で、 W の密度関数 $f(x)$ は

$$f(x) = \left\{ 1 - \left(|\alpha|^2 - |\beta|^2 + \frac{a\alpha\bar{b}\beta + \bar{a}\alpha b\beta}{|a|^2} \right) x \right\} f_K(x; |a|).$$

ここで、 $w\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} X_n/n$ は、 X_n/n に対する弱収束極限測度を表す。また、 $0 < r < 1$ に対して、

$$f_K(x; r) = \frac{\sqrt{1-r^2}}{\pi(1-x^2)\sqrt{r^2-x^2}} I_{(-r,r)}(x).$$

¹¹ しばしば、 $\phi(\Psi(x))$ と $\phi(\Psi)(x)$ を同一視する。

¹² 通常のマルコフ過程と違い、 $\mu_1 = \mu_0$ から $\mu_n = \mu_0$ ($n \geq 0$) が導けず、実際 $\mu_1 = \mu_0$ で、 $\mu_2 \neq \mu_1$ の例もある [43]。

¹³ 量子ウォークの大偏差原理に関しては、Sunada and Tate [62] がある。

¹⁴ $abcd = 0$ のときは自明な場合になる。

但し, $I_A(x) = 1 (x \in A), = 0 (x \notin A)$.

この極限定理より, W は初期量子ビット $\varphi = {}^T[\alpha, \beta]$ に依存することが分かる. また, 極限の密度関数 $f_K(x; r)$ は, 様々なグラフ上の多状態モデルの極限の密度関数にも現れ, 中心極限定理のガウス分布に対応したものである. 上記の結果からも, 古典の場合には, 対応する分散が n のオーダーで大きくなるのに対し, 量子ウォークの場合は n^2 のオーダーで大きくなることが導かれる¹⁵.

ここで紹介した方法は組合せ論的手法であったが, その他, フーリエ解析, 停留位相法, 母関数法 [8], 転送行列法 [18], グラフゼータ法, スペクトル写像定理, スペクトル散乱理論を用いた方法などがある¹⁶.

3. $\mathbf{Z}$ 上の 3 状態量子ウォーク

本節では, 量子ウォークの特徴的な性質の一つである局在化について, $\mathbf{Z}$ 上の 3 状態グローヴァーウォーク (Grover walk) を例に解説する. この量子ウォーカーは, $|L\rangle, |0\rangle, |R\rangle$ の 3 状態を持ち, $|L\rangle$ と $|R\rangle$ とはそれぞれ左へのジャンプ, 右へのジャンプに対応し, $|0\rangle$ は同じ場所に留まることを表す. 次に, $\Psi_n(x) = {}^T[\Psi_n^L(x), \Psi_n^0(x), \Psi_n^R(x)]$ を場所 $x \in \mathbf{Z}$ で時刻 n のそれぞれ $|L\rangle, |0\rangle, |R\rangle$ に対応する状態とする. さらに, 3×3 のグローヴァー行列¹⁷ U_G を量子コインとして, 2 状態の A_1, A_2 のように, $A_1 = P_1 U_G, A_2 = P_2 U_G, A_3 = P_3 U_G$ を定める. 但し, $U_G(k, k) = -1/3, U_G(j, k) = 2/3 (j \neq k)$ である. このとき, A_1 が左に, A_3 が右にジャンプすることに対応し, A_2 が同じ場所に留まることに対応する. また, このモデルの時間発展は, $\Psi_{n+1}(x) = A_1 \Psi_n(x+1) + A_2 \Psi_n(x) + A_3 \Psi_n(x-1)$ で与えられる.

初期状態として, 原点での量子ビット状態が $\varphi = {}^T[\alpha, \beta, \gamma] (|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 = 1)$, その他の場所では ${}^T[0, 0, 0]$ としたときの, 時刻 n での量子ウォーク X_n を考えると, その極限測度 $\mu_\infty(x)$ が求まり, 場所 x からの距離に対して指数的に減少していることがわかる (例えば, Konno [26]). “場所 x で局在化が起こる” とは, “ $\limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n(x) > 0$ ” と定義すると, 実は, $\mu_\infty(x)$ の表現から, 局在化の有無が α, β, γ に依存することが導かれる. また, 特に場所を断らないときは, 出発点で局在化が起きるときを, 簡単に “局在化が起こる” というようにする. 一般には, $0 \leq \sum_{x \in \mathbf{Z}} \mu_\infty(x) \leq 1$ である. 一方, 対応する古典系 (lazy random walk) では, $\mu_\infty(x) = 0 (x \in \mathbf{Z})$ となり, 局在化は起きない. さらに, フーリエ解析の手法により, 以下のような, 任意の初期状態に対する 3 状態のグローヴァーウォークの弱収束極限定理を得る (Konno [26]).

定理 2 $w\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} X_n/n = Y$ が成り立つ. 但し, Y は $\mu(dx) = \Delta \delta_0(dx) + (c_0 +$

¹⁵ この違いなどを上手く利用し, 空間構造を持った探索問題 [58] や element distinctness の問題 [2] への応用が試みられている.

¹⁶ CMV 行列に基づいた解析手法 (CGMV 法と呼ぶ) は, 系全体を記述する無限次元のユニタリ行列のスペクトルと固有ベクトルを求めることが可能なので, 半直線上などの 1 次元系の局在化を議論するには強力である [6].

¹⁷ グローヴァーのアルゴリズムと関係があるので, グローヴァー行列とも呼ばれる.

$c_1x + c_2x^2) f_K(x; 1/\sqrt{3})dx$ の測度で定まる．ここで、 $\delta_0(dx)$ は原点でのデルタ測度で、 Δ, c_0, c_1, c_2 は α, β, γ によって決まる定数である．

重要なこととして、 $\Delta = \sum_{x \in \mathbf{Z}} \mu_\infty(x; \alpha, \beta, \gamma)$ が成立している．従って、極限測度の全空間 $\mathbf{Z}$ での和（右辺）が、弱収束極限定理の δ_0 のマス（左辺）に等しいことが確かめられた．つまり、 $\mu_\infty(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = x)$ と $w\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} X_n/n$ の 2 段階の極限定理を得ることにより、局在化して、しかも、線形に広がる量子ウォーク特有の性質が、定量的にとらえられる．

さて本節で扱った 3 状態の定理 2 や他のモデルの結果などを考慮すると、一般に、 $w\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} X_n/n$ の極限測度は、有理関数 $w(x)$ 、定数 $C \in [0, 1]$ と $r \in (0, 1)$ が存在し、 $C\delta_0(dx) + (1 - C)w(x)f_K(x; r)dx$ のように表されると期待できる．つまり、その極限測度は、出発点である原点でのデルタ測度 $\delta_0(dx)$ と $f_K(x; r)$ で特徴づけられる絶対連続な部分の $w(x)f_K(x; r)dx$ の凸結合になっている．そして、このクラスに属する量子ウォークのモデル全体を $\mathcal{U}$ とし、量子ウォークのユニヴァーサルティ・クラスの一つとして $\mathcal{U}$ を Konno et al. [38] で提案した．現時点で知られている量子ウォークのモデルで $\mathcal{U}$ に属しているものは、多数知られ、その場合の有理関数は比較的次数の低い多項式で表現される．

また、一般の多状態の量子ウォークに関する結果は現時点では限られている．例えば、[53] では、1 次元の多状態量子ウォークのあるクラスについて、弱収束の極限定理を得ている．また、2 次元の量子ウォークの局在化に対する証明は [14] で与えられ、さらに弱収束極限定理が [65] で得られた． $\mathbf{Z}^d$ 上のモデルの定常測度に関しては、[20] がある．一般のグラフ上の離散時間量子ウォークの挙動については、例えば周期性など、スペクトル写像定理等を用いて、その数学的な解析は進展している¹⁸．

4. おわりに

量子ウォークの解析には、組合せ論的手法、フーリエ解析、停留位相法、母関数法、CGMV 法、転送行列法、グラフゼータ法、スペクトル写像定理、スペクトル散乱理論を用いた手法などがあり、それら相互の関係を明らかにすることにより、多状態や一般のグラフの上の挙動に関する詳しい研究がさらに可能である．そのことは、無限粒子系も含めた古典系のマルコフ過程理論に対応する量子系の理論を構築する足掛かりになる．その他、四元数量子ウォークの諸性質 [34, 35, 41]、場の量子論における超対称性との関係、定常性を仮定しない時系列解析への応用 [37] など、本稿で扱えなかった話題は非常に多い．詳細は、最近の解説（今野 [36]）の文献等を参考にして頂きたい．このように、量子ウォークは、数学の問題だけ

¹⁸ 量子コインが場所に依存するモデルを数学的に解析することは一般に非常に難しい．しかし、1 次元格子上でアダマールウォークの量子コインを一カ所だけ変えた“一欠陥モデル (one defect model)”でも局在化が起こりえることが、はじめて 2010 年に Konno [31] によって示された．このことは粗く言うと、ランダムな環境下で局在化が起こりうるアンダーソン局在とは対極をなすので興味深い．一般的な一欠陥のある設定での局在化の判定条件について、[5] で精緻に調べている．さらに、空間依存、時間依存、時空間依存の量子ウォークの数学的研究も着実に進んでいる．

でなく、量子コンピュータなどによる応用も含め、今後も様々な分野で魅力あるテーマであり続けるであろう。

参考文献

- [1] Y. Aharonov, L. Davidovich and N. Zagury, Quantum random walks, *Phys. Rev. A*, **48** (1993), 1687–1690.
- [2] A. Ambainis, Quantum walk algorithm for element distinctness, *SIAM Journal on Computing*, **37** (2007), 210–239.
- [3] A. Ambainis, E. Bach, A. Nayak, A. Vishwanath and J. Watrous, One-dimensional quantum walks. In: *Proceedings of the 33rd Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, pp.37–49, 2001.
- [4] M. J. Cantero, F. A. Grünbaum, L. Moral and L. Velázquez, Matrix valued Szegő polynomials and quantum random walks. *Comm. Pure Appl. Math.*, **63** (2010), 464–507.
- [5] M. J. Cantero, F. A. Grünbaum, L. Moral and L. Velázquez, One-dimensional quantum walks with one defect, *Reviews in Math. Phys.*, **24** (2012), No.02.
- [6] M. J. Cantero, F. A. Grünbaum, L. Moral and L. Velázquez, The CGMV method for quantum walks, *Quantum Inf. Process.* **11** (2012), 1149–1192.
- [7] R. Durrett, *Lecture Notes on Particle Systems and Percolation*, Wadsworth, Inc., 1988.
- [8] S. Endo, T. Endo, N. Konno, E. Segawa and M. Takei, Limit theorems of a two-phase quantum walk with one defect, *Quantum Inf. Comput.*, **15** (2015), 1373–1396.
- [9] R. P. Feynman and A. R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, McGraw-Hill Inc., NY. 1965.
- [10] S. P. Gudder, *Quantum Probability*, Academic Press Inc., CA. 1988.
- [11] Yu. Higuchi, N. Konno, I. Sato and E. Segawa, Spectral and asymptotic properties of Grover walks on crystal lattice, *J. Funct. Anal.*, **267** (2014), 4197–4235.
- [12] A. Ichihara, L. Matsuoka, Y. Kurosaki and K. Yokoyama, An analytic formula for describing the transient rotational dynamics of diatomic molecules in an optical frequency comb, *Chin. J. Phys.*, **51** (2013), 1230–1240.
- [13] Y. Ide, N. Konno, S. Matsutani and H. Mitsuhashi, New theory of diffusive and coherent nature of optical wave via a quantum walk, *Ann. Phys.*, **383** (2017), 164–180.
- [14] N. Inui, Y. Konishi and N. Konno, Localization of two-dimensional quantum walks, *Phys. Rev. A*, **69** (2004), 052323.
- [15] N. Inui, N. Konno and E. Segawa, One-dimensional three-state quantum walk, *Phys. Rev. E*, **72** (2005), 056112.
- [16] M. Katori, N. Konno, A. Sudbury and H. Tanemura, Dualities for the Domany-Kinzel model, *J. Theoret. Probab.*, **17** (2004), 131–144.
- [17] M. Katori, N. Konno and H. Tanemura, Limit theorems for the non-attractive Domany-Kinzel model, *Ann. Probab.*, **30** (2002), 933–947.
- [18] H. Kawai, T. Komatsu and N. Konno, Stationary measure for two-state space-inhomogeneous quantum walk in one dimension, *Yokohama Mathematical Journal*, in press.

- [19] T. Kitagawa, Topological phenomena in quantum walks: elementary introduction to the physics of topological phases, *Quantum Inf. Process.*, **11** (2012), 1107–1148.
- [20] T. Komatsu and N. Konno, Stationary amplitudes of quantum walks on the higher-dimensional integer lattice, *Quantum Inf. Process.*, **16** (2017), 291.
- [21] N. Konno, Dualities for a class of finite range probabilistic cellular automata in one dimension, *J. Statist. Phys.*, **106** (2002), 915–922.
- [22] N. Konno, Self-duality for multi-state probabilistic cellular automata with finite range interactions, *J. Statist. Phys.*, **106** (2002), 923–930.
- [23] 今野 紀雄, 格子確率モデルの双対性, *電子情報通信学会誌* **85** (2002), 510–514.
- [24] N. Konno, Quantum random walks in one dimension, *Quantum Inf. Process.*, **1** (2002), 345–354.
- [25] N. Konno, A new type of limit theorems for the one-dimensional quantum random walk, *J. Math. Soc. Japan*, **57** (2005), 1179–1195.
- [26] N. Konno, Quantum Walks. In: *Quantum Potential Theory*, Franz, U., and Schürmann, M., Eds., *Lecture Notes in Mathematics: Vol. 1954*, pp. 309–452, Springer-Verlag, Heidelberg, 2008.
- [27] 今野紀雄, 量子ウォークの数理, 産業図書, 2008.
- [28] 今野紀雄, 無限粒子系の科学, 講談社, 2008.
- [29] 今野紀雄, 井手勇介, 複雑ネットワーク入門, 講談社, 2008.
- [30] 今野紀雄, 町田拓也, 図解入門 よくわかる複雑ネットワーク, 秀和システム, 2008.
- [31] N. Konno, Localization of an inhomogeneous discrete-time quantum walk on the line, *Quantum Inf. Process.*, **9** (2010), 405–418.
- [32] 今野紀雄, 量子ウォーク, 森北出版, 2014.
- [33] N. Konno, The uniform measure for discrete-time quantum walks in one dimension, *Quantum Inf. Process.*, **13** (2014), 1103–1125.
- [34] N. Konno, Quaternionic quantum walks, *Quantum Stud.: Math. Found.*, **12** (2015), 63–76.
- [35] 今野紀雄, 四元数, 森北出版, 2016.
- [36] 今野紀雄, 量子ウォークの数理, *数学* **69** (2017), 70–90.
- [37] N. Konno, A new time-series model based on quantum walk, *Quantum Stud.: Math. Found.*, in press.
- [38] N. Konno, T. Łuczak and E. Segawa, Limit measures of inhomogeneous discrete-time quantum walks in one dimension, *Quantum Inf. Process.*, **12** (2013), 33–53.
- [39] N. Konno, T. Namiki and T. Soshi, Symmetry of distribution for the one-dimensional Hadamard walk, *Interdisciplinary Information Sciences*, **10** (2004), 11–22, quant-ph/0205065.
- [40] N. Konno, T. Namiki, T. Soshi and A. Sudbury, Absorption problems for quantum walks in one dimension, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **36** (2003), 241–253, quant-ph/0208122.
- [41] N. Konno, H. Mitsuhashi and I. Sato, The discrete-time quaternionic quantum walk on a graph, *Quantum Inf. Process.*, **15** (2016), 651–673.
- [42] N. Konno and I. Sato, On the relation between quantum walks and zeta functions, *Quantum Inf. Process.*, **11** (2012), 341–349.
- [43] N. Konno and M. Takei, The non-uniform stationary measure for discrete-time

- quantum walks in one dimension, *Quantum Inf. Comput.*, **15** (2015), 1060–1075.
- [44] T. M. Liggett, *Stochastic Interacting Systems: Contact, Voter and Exclusion Processes*, Springer, 1999.
 - [45] 町田拓也, 図で解る量子ウォーク入門, 森北出版, 2015.
 - [46] 町田拓也, 量子ウォーク - 基礎と数理 -, 裳華房, 2018.
 - [47] K. Manouchehri and J. Wang, *Physical Implementation of Quantum Walks*, Springer, 2013.
 - [48] 増田直紀, 今野紀雄, 複雑ネットワークの科学, 産業図書, 2005.
 - [49] 増田直紀, 今野紀雄, 複雑ネットワーク - 基礎から応用まで -, 近代科学社, 2010.
 - [50] L. Matsuoka, T. Kasajima, M. Hashimoto and K. Yokoyama, Numerical study on quantum walks implemented on cascade rotational transitions in a diatomic molecule, *J. Korean Phys. Soc.*, **59** (2011), 2897–2900.
 - [51] L. Matsuoka and K. Yokoyama, Physical implementation of quantum cellular automaton in a diatomic molecule, *J. Compu. Theo. Nanosci.*, **10** (2013), 1617–1620.
 - [52] D. A. Meyer, From quantum cellular automata to quantum lattice gases, *J. Statist. Phys.*, **85** (1996), 551–574.
 - [53] T. Miyazaki, M. Katori and N. Konno, Wigner formula of rotation matrices and quantum walks, *Phys. Rev. A*, **76** (2007), 012332.
 - [54] H. Obuse and N. Kawakami, Topological phases and delocalization of quantum walks in random environments, *Phys. Rev. B*, **84** (2011), 195139.
 - [55] T. Oka, N. Konno, R. Arita and H. Aoki, Breakdown of an electric-field driven system: a mapping to a quantum walk, *Phys. Rev. Lett.*, **94** (2005), 100602.
 - [56] R. Portugal, *Quantum Walks and Search Algorithms*, Springer, 2013.
 - [57] R. Portugal, Staggered quantum walks on graphs, *Phys. Rev. A*, **93** (2016) 062335.
 - [58] N. Shenvi, J. Kempe and K. B. Whaley, Quantum random-walk search algorithm, *Phys. Rev. A*, **67** (2003), 052307.
 - [59] A. W. Sudbury, Dual families of interacting particle systems on graphs, *J. Theoret. Probab.*, **13** (2000), 695–716.
 - [60] A. W. Sudbury and P. Lloyd, Quantum operators in classical quantum theory. II, The concept of duality in interacting particle systems, *Ann. Probab.*, **23** (1995), 1816–1830.
 - [61] A. W. Sudbury and P. Lloyd, Quantum operators in classical quantum theory. IV. Quasi-duality and thinnings of interacting particle systems, *Ann. Probab.*, **25** (1997), 96–114.
 - [62] T. Sunada and T. Tate, Asymptotic behavior of quantum walks on the line, *J. Funct. Anal.*, **262** (2012), 2608–2645.
 - [63] A. Suzuki, Asymptotic velocity of a position-dependent quantum walk, *Quantum Inf. Process.*, **15** (2016), 103–119.
 - [64] S. E. Venegas-Andraca, Quantum walks: a comprehensive review, *Quantum Inf. Process.*, **11** (2012), 1015–1106.
 - [65] K. Watabe, N. Kobayashi, M. Katori and N. Konno, Limit distributions of two-dimensional quantum walks, *Phys. Rev. A*, **77** (2008), 062331.