局所構造条件を満たすグラフの集合の比較と特徴付け

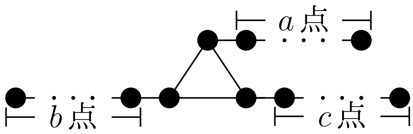
古谷　倫貴　(北里大学)*

1. はじめに

いくつかのグラフからなる集合 $\mathcal{H}$ に対して，グラフ G が $\mathcal{H}$ に属するどのグラフも誘導部分グラフとして含まないとき，G は **$\mathcal{H}$-フリー**であるという．特にグラフ G が $\{H\}$-フリーであるとき，括弧を省略して単に『G は **H-フリー**である』という．$\mathcal{H}$-フリー性を考えるとき，$\mathcal{H}$ に属するグラフのことを**禁止部分グラフ**という．2 頂点以下のグラフ H に対して，H-フリーグラフは簡単に特徴付けできる．そこで，本稿で扱う禁止部分グラフは位数が 3 以上であることを明記なしに仮定する．

グラフ G がグラフ H を誘導部分グラフとして含むとき，$H \prec G$ と書く．グラフの集合 $\mathcal{H}_1$ と $\mathcal{H}_2$ について，各 $H_2 \in \mathcal{H}_2$ に対して，$H_1 \prec H_2$ を満たす $H_1 \in \mathcal{H}_1$ が存在するとき，$\mathcal{H}_1 \leq \mathcal{H}_2$ と書く [1)]．グラフの集合 $\mathcal{H}$ と整数 $k \geq 1$ について，k-連結 $\mathcal{H}$-フリーグラフ全体からなる集合を $\mathcal{G}_k(\mathcal{H})$ によって表す．また，$\mathcal{G}(\mathcal{H}) = \mathcal{G}_1(\mathcal{H})$ とおく．

K_a，P_a，C_a によってそれぞれ a 頂点からなる完全グラフ，道，閉路を表す．また，$K_{a,b}$ によって部集合のサイズが a と b の完全二部グラフを表す．本稿ではこれらに加えて，下のグラフ $N_{a,b,c}$ を禁止部分グラフとして頻繁に用いる．



$N_{a,b,c}$ $(a, b, c \in \mathbb{N} \cup \{0\})$

禁止部分グラフ条件はグラフ理論の様々な場面において用いられてきた．特に，ある遺伝的 [2)] な性質 P を満たすグラフ全体からなる集合は，何らかの禁止部分グラフ条件を用いて特徴付けられることが知られている．例えば Chudnovsky ら [7] によって証明された理想グラフ定理 [3)] は，長い間未解決問題として研究され続けていたグラフ理論の重要な命題の一つである．その他にも，ライングラフ [3] や区間グラフ [28] をはじめとする様々な交差グラフ [4)] の特徴付けは有名であり，グラフの最小固有値問題を考

本研究は科研費 (課題番号:18K13449) の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: 05C75
キーワード：禁止部分グラフ, $K_{1,3}$-フリーグラフ, ハミルトン閉路
* 〒 252-0373 神奈川県相模原市南区北里 1-15-1　北里大学 一般教育部
e-mail: michitaka.furuya@gmail.com

1) $\mathcal{H}_1 \leq \mathcal{H}_2$ ならば，任意の $\mathcal{H}_1$-フリーグラフは $\mathcal{H}_2$-フリーとなることに注意する．

2) グラフに関する性質 P について，命題『グラフ G が P を満たすならば G の任意の誘導部分グラフも P を満たす』が成り立つとき，P は**遺伝的**であるという．

3) グラフ G の任意の誘導部分グラフ H について H の彩色数 $\chi(H)$ とクリーク数 $\omega(H)$ が等しいとき，G は**理想グラフ**であるという．Chudnovsky らは，G が理想グラフであるための必要十分条件として G が $\{C_{2n+1}, \overline{C_{2n+1}} : n \geq 2\}$-フリーであることを示した．ここで，$\overline{C_{2n+1}}$ は C_{2n+1} の補グラフを表す．

4) 集合族 $\mathcal{X}$ に対して，$V(G) = \mathcal{X}$，$E(G) = \{\{X, X'\} \in \binom{\mathcal{X}}{2} : X \cap X' \neq \emptyset\}$ を満たすグラフ G を $\mathcal{X}$ に関する**交差グラフ**という．グラフ H の辺集合に関する交差グラフを（H の）**ライングラフ**といい，実区間の部分区間に関する交差グラフを**区間グラフ**という．

える上で重要なグラフの構成に大きな影響を及ぼす [36] など，多くの応用が知られている．

一方で（遺伝的でない）グラフの一般の性質 P に対しても，P を満たさないグラフが共通に持つ局所構造を見極めたいという動機から，禁止部分グラフを用いた十分条件が研究されてきた．例えばTutteの1-因子定理[5]を用いると，完全マッチングを持たないグラフには $K_{1,3}$ が誘導部分グラフとして現れやすいことが想像できるだろう．実際にSumner [34] は，任意の偶位数連結 $K_{1,3}$-フリーグラフが完全マッチングを持つことを示している[6]．もう少し複雑な例として，次のようにハミルトン閉路を持つための十分条件となり得る禁止部分グラフ対が特徴付けられている[7]．

定理 1.1 (Faudree and Gould [18]) H_1 と H_2 を連結グラフとする．このとき，命題『位数が十分大きい2-連結[8] $\{H_1, H_2\}$-フリーグラフはハミルトン閉路を持つ』が成り立つための必要十分条件は，以下のいずれかが成り立つことである．

(i) $\{H_1, H_2\} \leq \{K_{1,3}, N_{1,1,1}\}$.
(ii) $\{H_1, H_2\} \leq \{K_{1,3}, N_{2,1,0}\}$.
(iii) $\{H_1, H_2\} \leq \{K_{1,3}, N_{3,0,0}\}$.
(iv) $\{H_1, H_2\} \leq \{K_{1,3}, P_6\}$.

定理 1.1 における十分性は，次の4つの独立な結果から得られたものである．

(F1) 2-連結 $\{K_{1,3}, N_{1,1,1}\}$-フリーグラフはハミルトン閉路を持つ [12].
(F2) 2-連結 $\{K_{1,3}, N_{2,1,0}\}$-フリーグラフはハミルトン閉路を持つ [2].
(F3) 位数が10以上の2-連結 $\{K_{1,3}, N_{3,0,0}\}$-フリーグラフはハミルトン閉路を持つ[9] [19].
(F4) 2-連結 $\{K_{1,3}, P_6\}$-フリーグラフはハミルトン閉路を持つ [4].

一般にグラフの様々な性質に対して，上記のような禁止部分グラフを用いた（十分）条件が知られている．そのような結果は各性質を考察する上で興味深いものであるが，禁止部分グラフ条件は数値化しにくく，命題の良し悪しや強弱を判断するための基準が明確ではない．そこで本稿では今一度そのような条件自体に着目し，それらの比較や整理を通じて既存研究を見直すと共に，今後の禁止部分グラフの研究を行う上での注意点を洗い出すことを目標としたい．

---

5) 命題『グラフ G が完全マッチングを持つための必要十分条件は，任意の $S \subseteq V(G)$ に対して $w_o(G-S) \leq |S|$ を満たすことである』をTutteの1-因子定理という．ただし $w_o(G-X)$ によって $G-X$ の成分数を表す．

6) より一般にOtaとSueiro [32] は，位数が十分大きい偶位数連結グラフが完全マッチングを持つための十分条件になり得る禁止部分グラフ条件を特徴付けている．

7) より発展した問題としてハミルトン閉路の存在性を保証する禁止部分グラフの三つ組も数本の論文に渡り研究されているが，その特徴付けは与えられていない．

8) 2-連結性をなくし，命題『位数が十分大きい連結 $\{H_1, H_2\}$-フリーグラフはハミルトン閉路を持つ』を考えると，それが成り立つための必要十分条件は $\{H_1, H_2\} \leq \{P_3\}$ となる．しかしそもそも連結 P_3-フリーグラフは完全グラフに限られてしまい，面白みに欠ける結果となる．2-連結性はハミルトン閉路が存在するための自明な（かつ比較的簡単に確認できる）必要条件であるが，一般に連結グラフに禁止部分グラフ条件を課しただけで2-連結性を保証しようとすると非常に強い仮定が必要となる．そこで定理 1.1 のようにあらかじめ2-連結性を仮定しておくことが自然である．

9) (F3) より，$\{K_{1,3}, N_{3,0,0}\}$-フリー性はハミルトン閉路の存在を保証していると見なすのが妥当であろう．しかし位数9の2-連結 $\{K_{1,3}, N_{3,0,0}\}$-フリーグラフでハミルトン閉路を持たないものが2種類存在するため，定理 1.1 中の命題における "位数が十分大きい" という仮定をなくすと必要十分条件から $\{K_{1,3}, N_{3,0,0}\}$ が除外されてしまう．一般に離散数学において小さい例外が現れることは避けられないため，本稿では（位数が定数で抑えられるような）小さな例外の存在を許容して問題を考えることにする．

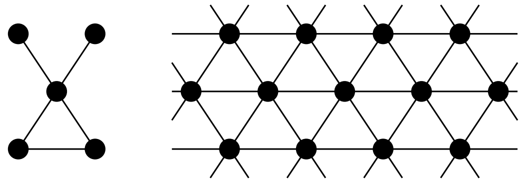
2. 有限性から見る禁止部分グラフ条件の比較

2.1. 強弱関係

まず，$\mathcal{H}_1$-フリー性が $\mathcal{H}_2$-フリー性よりも本質的に強い，すなわち $\mathcal{G}(\mathcal{H}_1)$ が "ほとんど"$\mathcal{G}(\mathcal{H}_2)$ の部分集合になる場合を考える．ただし "ほとんど" とは，脚注 9) で述べたように小さな例外は許すことを意味する．これを形式化すると

$$|\mathcal{G}(\mathcal{H}_1) \setminus \mathcal{G}(\mathcal{H}_2)| < \infty \tag{2.1}$$

となる．(2.1) が成り立つための自明な十分条件として，$\mathcal{H}_1 \leq \mathcal{H}_2$ が挙げられる（脚注 1) 参照）．一方でその逆は，$\mathcal{H}_1$ と $\mathcal{H}_2$ がそれぞれ 1 個のグラフからなる集合であっても成り立たない．例えば下のグラフ A_1 と A_2（ただし A_2 は representativity が十分大きいトーラス上の 6-正則グラフ）について，$A_1 \not\prec A_2$（すなわち $\{A_1\} \not\leq \{A_2\}$）かつ $\mathcal{G}(\{A_1\}) \setminus \mathcal{G}(\{A_2\}) = \{A_2\}$ である．



A_1　　　　A_2

もちろんこれは特殊な例であり，適当な条件を付与することで $|\mathcal{G}(\{H_1\}) \setminus \mathcal{G}(\{H_2\})| < \infty$ と $H_1 \prec H_2$ が同値となることが十分に期待できる．ここで次の定理を考察する．

定理 2.1 (Fujita et al. [22]) H_1 と H_2 を連結グラフとするとき，$|\mathcal{G}(\{H_1\}) \setminus \mathcal{G}(\{H_2\})| < \infty$ かつ $H_1 \not\prec H_2$ を満たすならば，以下が成り立つ[10]．

(i) $\delta(H_1) = 1$ かつ $\Delta(H_1) = |V(H_1)| - 1$.

(ii) 異なるある 2 頂点 $x_1, x_2 \in V(H_1)$ に対して $N_{H_1}(x_1) \cup \{x_1\} = N_{H_1}(x_2) \cup \{x_2\}$.

(iii) 異なるある 2 頂点 $y_1, y_2 \in V(H_1)$ に対して $N_{H_1}(y_1) = N_{H_1}(y_2)$.

(iv) $|V(H_2)| \geq 2|V(H_1)| - 3$ かつ $\delta(H_2) \geq |V(H_1)| - 2$.

定理 2.1 の (i)–(iii) のすべてを満たすグラフは必ず $N_{1,0,0}$ を誘導部分グラフに含む．よって連結 $N_{1,0,0}$-フリーグラフ[11] H_1 について，連結グラフ H_2 が $|\mathcal{G}(\{H_1\}) \setminus \mathcal{G}(\{H_2\})| < \infty$ を満たすための必要十分条件は $H_1 \prec H_2$ となることである．

2.2. 同値性（H-フリー性 vs. $\mathcal{H}$-フリー性）

定理 2.1 は，禁止部分グラフ条件の非自明な強弱関係は，多くの場合に生じないことを主張している．しかし A_1 と A_2 の例など，一定数の非自明な強弱関係が存在することも事実である．そこで自明な十分条件が関係性をより表しやすくなるように，更に限定的な状況を考えてみる．ここでは禁止部分グラフ条件が "ほとんど" 同値になる，すなわち

$$|\mathcal{G}(\mathcal{H}_1) \triangle \mathcal{G}(\mathcal{H}_2)| < \infty \tag{2.2}$$

---

[10] 上で例として挙げたグラフ A_1 は，(i)–(iii) のすべてを満たす最小位数の唯一のグラフである．

[11] 木をはじめとする内周が 4 以上のグラフや，完全多部グラフは $N_{1,0,0}$-フリーである．

という条件に注目する．ただし $\triangle$ によって2つの集合の対称差を表す．定理 2.1 より，連結グラフ H_1 と H_2 について，$|\mathcal{G}(\{H_1\})\triangle\mathcal{G}(\{H_2\})| < \infty$ であるための必要十分条件が $H_1 = H_2$ であることが分かる．つまり，$|\mathcal{H}_1| = |\mathcal{H}_2| = 1$ の場合には (2.2) の自明な十分条件が必要条件になる訳である．この一般化として，以下の定理が成り立つ．

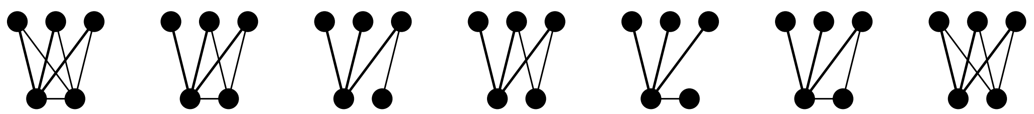
定理 2.2 (Fujita et al. [22]) H_1 と H_2 を連結グラフとし，$k \geq 1$ を整数とする．このとき，$|\mathcal{G}_k(\{H_1\})\triangle\mathcal{G}_k(\{H_2\})| < \infty$ であるための必要十分条件は $H_1 = H_2$ となることである．

定理 2.3 (Fujita et al. [22]) H を連結グラフとし，$\mathcal{H}$ を高々*3*個の連結グラフからなる集合とする．このとき，$|\mathcal{G}(\{H\})\triangle\mathcal{G}(\mathcal{H})| < \infty$ が成り立つための必要十分条件は，以下のいずれかが成り立つことである．

(i) $H \in \mathcal{H}$ かつ $|\mathcal{G}(\mathcal{H} \setminus \{H\}) \setminus \mathcal{G}(\{H\})| < \infty$.

(ii) $H = K_3$ かつ，ある $n_1 \geq 4$, $n_2 \geq 2$ に対して $\mathcal{H} = \{K_{n_1}, K_{n_2+2} - E(K_{n_2}), N_{1,0,0}\}$.

次に $K_{1,3}$ というグラフに注目しよう．定理 1.1 に代表されるように，多くの命題において $K_{1,3}$ は禁止部分グラフとしての重要な役割を担う．$K_{1,3}$-フリーグラフは，その構造定理が知られている [9] にも関わらず，Matthews-Sumner 予想 [12] をはじめとする多くの重要な未解決問題が残されている．そのような問題に対して $K_{1,3}$-フリー性に近い他の禁止部分グラフ条件からアプローチすることがあるが，その対象の条件が $K_{1,3}$-フリー性と同値でないかは必ず確認しておくべきであろう．ここでは簡単のために，$K_{1,3}$ に1頂点を加えて得られる連結グラフ，すなわち下の7個のグラフ $B_1, \ldots, B_7$ を考える．また，$\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_7\}$ とおく．



B_1 B_2 B_3 B_4 $B_5\ (= K_{1,4})$ B_6 $B_7\ (= K_{2,3})$

すると明らかに $\mathcal{G}(\{K_{1,3}\}) \setminus \mathcal{G}(\mathcal{B}) = \emptyset$ かつ $\mathcal{G}(\mathcal{B}) \setminus \mathcal{G}(\{K_{1,3}\}) = \{K_{1,3}\}$ であるため，$\mathcal{H}_1 = \{K_{1,3}\}$，$\mathcal{H}_2 = \mathcal{B}$ としたときに (2.2) が成立する．つまり $\mathcal{B}$-フリー性は $K_{1,3}$-フリー性と本質的に同値となる．しかし次の定理から，同様の問題を考える上では B_7 は本質的に不要であることが分かる [13].

定理 2.4 (Fujisawa et al. [20]) $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{B}$ が $|\mathcal{G}(\{K_{1,3}\})\triangle\mathcal{G}(\mathcal{H})| < \infty$ を満たすための必要十分条件は，$\mathcal{B} \setminus \{B_7\} \subseteq \mathcal{H}$ となることである．

ここで定理 1.1 や Matthews-Sumner 予想を再度確認してみると，それらはいずれも連結度の仮定を含んでいる．高い連結度などを仮定すると禁止部分グラフ条件を満たす対象のグラフが減少し，その結果として禁止部分グラフ条件が同等なものになりやすい．そこで高連結度のグラフに限定して $K_{1,3}$-フリー性と同等な禁止部分グラフ条件を考えてみると，次のように状況が変化する．

---

[12] Matthews と Sumner [30] は『すべての 4-連結 $K_{1,3}$-フリーグラフはハミルトン閉路を持つ』という予想を提唱した．これに対して，Kaiser ら [27] は，4-連結性を "5-連結かつ最小次数 6 以上" に置き換えれば正しいことを証明したが，Matthews-Sumner 予想の解決には至っていない．

[13] [20] ではより一般に，$\mathcal{H}_1 = \{K_{1,n}\}$ のときに (2.2) を満たす集合 $\mathcal{H}_2$ の特徴付けが与えられている．

定理 2.5 (Furuya and Yokota [26]) $k \geq 2$ を整数とする．このとき，$\mathcal{H} \subseteq \mathcal{B}$ が $|\mathcal{G}_k(\{K_{1,3}\}) \triangle \mathcal{G}_k(\mathcal{H})| < \infty$ を満たすための必要十分条件は，以下のいずれかが成り立つことである．

(i) $\mathcal{B} \setminus \{B_7\} \subseteq \mathcal{H}$ または $\mathcal{B} \setminus \{B_5, B_6\} \subseteq \mathcal{H}$.

(ii) $k \geq 3$ かつ $\mathcal{B} \setminus \{B_6, B_7\} \subseteq \mathcal{H}$.

(iii) $k \geq 4$ かつ，$\mathcal{B} \setminus \{B_3, B_4, B_7\} \subseteq \mathcal{H}$ または $\mathcal{B} \setminus \{B_4, B_5\} \subseteq \mathcal{H}$.

よって例えば『すべての 4-連結 $(\mathcal{B} \setminus \{B_3, B_4, B_7\})$-フリーグラフはハミルトン閉路を持つ』という予想は Matthews-Sumner 予想と本質的に同等のものとなる [14)]．本稿では禁止部分グラフを $\mathcal{B}$ に制限して考えたが，一般にはこのような同値性のバリエーションは数多く存在するため，より深く注意を払う必要がある．

2.3. 同値性（$\{H_0, H_1\}$-フリー性 vs. $\{H_0, H_2\}$-フリー性）

禁止部分グラフを用いた十分条件は，対象の性質に対して “相性が悪い” 部分構造を与える．すると定理 1.1 における $K_{1,3}$ のように，ある性質のための禁止部分グラフ条件は “相性が悪い” グラフを共通に持ちやすいことになる．そこで次に，共通のグラフを含むような禁止部分グラフ対の比較，すなわち $\mathcal{H}_1 = \{H_0, H_1\}$ と $\mathcal{H}_2 = \{H_0, H_2\}$ について (2.2) を考える．その場合の自明な十分条件として簡単に思いつくのは，

(a) $H_1 = H_2$

(b) $H_0 \prec H_1$ かつ $H_0 \prec H_2$

の 2 つであろう [15)]．三つ組 $(H_0; H_1, H_2)$ が (a) または (b) を満たすとき，**自明**な三つ組であるという．2.2 節のときと同様に，多くの場合にこの自明な状況が (2.2) のための必要条件となる．例えば次の定理が成り立つ．

定理 2.6 (Chiba et al. [6]) H_0, H_1, H_2 を連結グラフとし，$\delta(H_0) \geq 2$ であると仮定する．このとき，$|\mathcal{G}(\{H_0, H_1\}) \triangle \mathcal{G}(\{H_0, H_2\})| < \infty$ が成り立つための必要十分条件は $(H_0; H_1, H_2)$ が自明な三つ組であることである．

既に述べた通り，$K_{1,3}$-フリー性は禁止部分グラフとして特に重要である．しかし $H_0 = K_{1,3}$ として三つ組の問題を考えたとき，状況は定理 2.6 ほど単純ではなくなる．例えば H_1 を正二十面体グラフとし，H_2 を H_1 の 1 頂点を 2 頂点からなるクリークに置き換えて得られるグラフとすると，$(K_{1,3}; H_1, H_2)$ は自明な三つ組ではないが $|\mathcal{G}(\{K_{1,3}, H_1\}) \triangle \mathcal{G}(\{K_{1,3}, H_2\})| < \infty$ を満たす [16)]．

現状では $|\mathcal{G}(\{K_{1,3}, H_1\}) \triangle \mathcal{G}(\{K_{1,3}, H_2\})| < \infty$ を満たすための良い必要十分条件は分かっていないが，代わりにある強い必要条件が知られている．その命題を述べるために，いくつかの準備を行う．グラフ G において，$V(G)$ 上の同値関係 $\sim_G$ を

$$x_1 \sim_G x_2 \iff N_G(x_1) \cup \{x_1\} = N_G(x_2) \cup \{x_2\}$$

によって定める．このとき $\sim_G$ に関する各同値類を 1 点に縮約することで G から得られるグラフを $B(G)$ によって表す．また，グラフ G の任意の 2 頂点 x_1, x_2 について，$\phi(x_1) = x_2$ を満たす G の自己同型写像 ϕ が存在するとき，G は**点推移的**であるという．このとき，次が成り立つ．

---

14) 関連結果として，最近の研究 [29] において Matthews-Sumner 予想と『すべての 4-連結 4-正則 $K_{1,4}$-フリーグラフはハミルトン連結である』という予想が同値であることが示されている．

15) いずれの場合も $\mathcal{G}(\{H_0, H_1\}) = \mathcal{G}(\{H_0, H_2\})$ が成り立つ．

16) $\mathcal{G}(\{K_{1,3}, H_1\}) \setminus \mathcal{G}(\{K_{1,3}, H_2\}) = \emptyset$ かつ $\mathcal{G}(\{K_{1,3}, H_2\}) \setminus \mathcal{G}(\{K_{1,3}, H_1\}) = \{H_1\}$ となる．

定理 2.7 (Chiba et al. [6]) H_0, H_1, H_2 を連結グラフとし，H_0 が *twin-less*[17] であると仮定する．このとき，$|\mathcal{G}(\{H_0, H_1\}) \triangle \mathcal{G}(\{H_0, H_2\})| < \infty$ かつ $(H_0; H_1, H_2)$ が自明な三つ組でないならば，以下が成り立つ．

(i) $\delta(H_0) = 1$ または $\Delta(H_0) = |V(H_0)| - 1$，かつ

(ii) ある $i \in \{1, 2\}$ に対して，$B(H_i)$ が点推移的であり，かつ H_{3-i} は H_i のある頂点をクリークに置き換えてできるグラフである．

特に $H_0 = K_{1,3}$ のときは次が成り立つことを予想しており，実際に $\delta(B(H_1)) \leq 5$ のときは正しいことが確認されている [24].

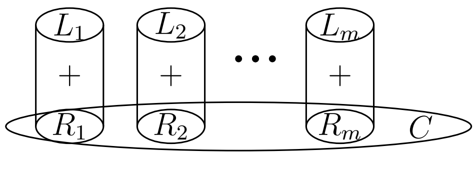
予想 1 H_1 と H_2 を連結グラフとする．このとき，$|\mathcal{G}(\{K_{1,3}, H_1\}) \triangle \mathcal{G}(\{K_{1,3}, H_2\})| < \infty$ かつ $(K_{1,3}; H_1, H_2)$ が自明な三つ組でないならば，$B(H_1)$ は正二十面体グラフとなる．

3. 禁止部分グラフ条件の差の特徴付け

Olariu [31] によって $\mathcal{G}(\{N_{1,0,0}\}) \setminus \mathcal{G}(\{K_3\}) = \{G :$ ある $m \geq 3$ に対して G は完全 m 部グラフ$\}$ が示された．これを用いると,『K_3-フリーグラフが性質 P を満たす』という類の定理は，完全多部グラフという構造が極めて単純なものを確認するだけで『$N_{1,0,0}$-フリーグラフが性質 P を満たす（または例外を特定できる）』という命題に拡張される．

このアイデアを定理 1.1 の基となる命題に用いてみよう．例えば (F1) と (F2) の仮定を比較すると，$\mathcal{G}_2(\{K_{1,3}, N_{1,1,1}\}) \setminus \mathcal{G}_2(\{K_{1,3}, N_{2,1,0}\})$ と $\mathcal{G}_2(\{K_{1,3}, N_{2,1,0}\}) \setminus \mathcal{G}_2(\{K_{1,3}, N_{1,1,1}\})$ のいずれも無限集合であることが分かる [18]．よって一見したところ (F1) と (F2) の仮定には関係が見られず，それらが独立に証明されたことにも納得ができる．しかし無限個のグラフを用いれば，ある種の強弱関係が見えてくる．

$m \geq 3$ を整数とし，L_i $(1 \leq i \leq m)$ と C を点素な完全グラフとする．ただし $|V(C)| \geq m$ であるとする．また，R_i $(1 \leq i \leq m)$ を点素な $V(C)$ の部分集合とする．このとき $(\bigcup_{1 \leq i \leq m} V(L_i)) \cup V(C)$ 上のグラフで，各 i $(1 \leq i \leq m)$ について $V(L_i)$ のすべての頂点と R_i のすべての頂点をを結んで得られる下図のようなグラフを **generalized comb** と呼ぶと，次の命題が成り立つ．



定理 3.1 (Furuya and Tsuchiya [25]) $\mathcal{G}(\{K_{1,3}, N_{2,1,0}\}) \setminus \mathcal{G}(\{K_{1,3}, N_{1,1,1}\})$ は *generalized comb* 全体からなる集合と一致する．

したがって，(F1) と定理 3.1 を認めると，すべての 2-連結 generalized comb がハミルトン閉路を持つことを確認するだけで (F2) が得られる．更に，連結 $\{K_{1,3}, N_{1,1,1}\}$-フリーグラフはハミルトン道を持つことが知られている [12] が，定理 3.1 と合わせることで『3 個以上の切断点を持つ generalized comb を除き，連結 $\{K_{1,3}, N_{2,1,0}\}$-フリーグラフはハミルトン道を持つ』という系も導かれる．

(F2) と (F4) の仮定の強弱関係も，次の定理の $m = 2$ の場合から同様に得られる．

---

17) グラフ G が **twin-less** であるとは，G の任意の異なる 2 頂点 x_1, x_2 が $N_G(x_1) \cup \{x_1\} \neq N_G(x_2) \cup \{x_2\}$ を満たすことをいう．明らかに $K_{1,3}$ は twin-less である．

18) 前者については $N_{2,1,0}$ の各頂点をサイズ 2 以上のクリークに置き換えて得られるグラフ全体からなる集合を考えれば良い．

定理 3.2 (Chen et al. [5]) 整数 $m \geq 1$ に対して $n_m = \max\{3m, m+4\}$ とおくとき，$\mathcal{G}(\{K_{1,3}, N_{m,1,0}\}) \setminus \mathcal{G}(\{K_{1,3}, P_{n_m}\})$ は，“n_m 頂点以上の道の各頂点をクリークに置き換えたグラフ”と“n_m 頂点以上の閉路の各頂点をクリークに置き換えたグラフ”全体からなる集合と一致する．

このように差が無限集合となるが，簡単に明示できるグラフに限られるような禁止部分グラフ条件には強弱関係があると見なして良いだろう．その他にも $\mathcal{G}(\{K_{1,3}, N_{2,0,0}\}) \setminus \mathcal{G}(\{K_{1,3}, N_{1,1,0}\})$ の特徴付け [5] などが得られており，その強弱関係から既存研究を有効に使った命題が導かれている．今後はそのような特徴付けの難易を表す指標を与え，どのような禁止部分グラフ条件の差が（無限個のグラフを用いて）特徴付けられ得るのかを判定することが大きな課題となる．

4. 有限集合を生成する禁止部分グラフ条件

脚注 9) で確認したように，本質的な状況を把握するためには位数の小さい例外グラフを除いた形の命題を考える必要がある．しかし強すぎる仮定を課した場合，それを満たすグラフ自体が有限種類しか存在しないという状況が想定される．もし $\mathcal{H}$-フリーグラフが有限通りであれば，任意の性質 P に対して命題『位数が十分大きい $\mathcal{H}$-フリーグラフは性質 P を満たす』が必ず真となるため，$\mathcal{H}$-フリー性が性質 P 特有の情報を与えていないことになる．そこで強すぎる禁止部分グラフ条件をあらかじめ特定しておくことが重要である．この問題は既に次のような形で解決されている．

命題 4.1 (Diestel [11, Proposition 9.4.1]) 連結グラフの集合 $\mathcal{H}$ が $|\mathcal{G}(\mathcal{H})| < \infty$ を満たすための必要十分条件は，ある整数 $n \geq 3$ に対して $\mathcal{H} \leq \{K_n, K_{1,n}, P_n\}$ となることである．

しかし定理 2.5 と同様に，連結度の条件を加えると状況は一変する．例えば $\mathcal{G}_2(\{C_n : n \geq 3\}) = \emptyset$ であり，任意の整数 $m \geq 3$ に対して $|\mathcal{G}_2(\{C_n : n \geq 3\} \setminus \{C_m\})| = \infty$ となることから，$|\mathcal{G}_2(\mathcal{H})| < \infty$ を満たす $\mathcal{H}$ は，少なくとも命題 4.1 のように有限濃度の集合のみを用いた簡単な形では特徴付けられない．そこで $\mathcal{H}$ の濃度を制限したときに集合 $\mathcal{G}_k(\mathcal{H})$ が有限かどうかを判断する問題を考える．このような問題は，k が小さく $|\mathcal{H}| = 2$ である場合は次のように解決されている．

定理 4.2 (Fujisawa et al. [21]) $\mathcal{H}$ を 2 個の連結グラフからなる集合とし，$1 \leq k \leq 6$ を整数とする．このとき，$|\mathcal{G}_k(\mathcal{H})| < \infty$ となるための必要十分条件は，以下のいずれかが成り立つことである．

(i) ある整数 $n \geq 3$ に対して $\mathcal{H} \leq \{K_n, P_3\}$.
(ii) $\mathcal{H} \leq \{K_3, K_{1,k}\}$.
(iii) $5 \leq k \leq 6$ かつ，$\mathcal{H} \leq \{K_4, K_{1,3}\}$[19)].

もちろん禁止するグラフの個数を増加させると問題はより複雑になる．例えば $k = 2$ かつ $|\mathcal{H}| = 3$ の場合であれば次のような特徴付けが与えられる[20)]．

---

19) 特に $\mathcal{G}_5(\{K_4, K_{1,3}\}) = \{$ 正二十面体グラフ $\}$ が成り立つ．
20) 定理 4.3 の拡張として $|\mathcal{H}| \leq 4$ の場合の特徴付けも知られている [23] が，現れる禁止部分グラフ条件が本質的に 8 種類に分かれており，その繁雑さから詳細は割愛する．

定理 4.3 (Fujisawa et al. [21]) $\mathcal{H}$を3個の連結グラフからなる集合とする．このとき，$|\mathcal{G}_2(\mathcal{H})| < \infty$となるための必要十分条件は，以下のいずれかが成り立つことである．

(i) ある整数$n \geq 3$に対して$\mathcal{H} \leq \{K_n, K_{1,n}, P_n\}$.
(ii) ある整数$n \geq 2$に対して$\mathcal{H} \leq \{K_3, K_{2,n}, P_5\}$.
(iii) $\mathcal{H} \leq \{K_3, K_{2,2}, P_6\}$.

$k = 3$かつ$|\mathcal{H}| = 3$の場合についても [13, 14, 15] などで研究が進められており，$\mathcal{G}_3(\{K_4, K_{2,n}, H\})$，$\mathcal{G}_3(\{K_3, K_{3,n}, H\})$，$\mathcal{G}_3(\{K_3, K_{2,n}, H\})$が有限となるための連結グラフ$H$などが特定されている．しかしすべての場合の完全な特徴付けには至っておらず，そのためには少なくとも莫大な種類の禁止部分グラフ条件が必要であることが分かっている．

これらの研究は定理 1.1 のような多くの命題において禁止部分グラフ条件が連結度と同時に考えられていることに由来する．一方で，最近の研究では彩色問題に起因して，最小次数条件に注目した次の結果が示された．

定理 4.4 (Chudnovsky and Stacho [8]) Gを最小次数3以上の連結グラフであるとする．このときGが$\{C_3, C_4, P_8\}$-フリーであるための必要十分条件はGが$Petersen$グラフ，$Heawood$グラフ，または$Heawood$グラフの1辺を縮約して得られるグラフのいずれかであることである．

定理 4.4 を用いると,『内周が5以上の連結P_8-フリーグラフGは3-彩色可能である[21]』という命題が，位数に関する帰納法によって以下のように示される．内周が5以上であることと$\{C_3, C_4\}$-フリー性が同値であることに注意する．Gが最小次数3以上であれば．Gの各連結成分は定理 4.4 における3種類のグラフのいずれかであるため，それらが3-彩色可能であることを確認すれば良い．また，Gが次数2以下の頂点xを持てば，帰納法の仮定から$G - x$が3-彩色可能であり，その彩色とxへの適当な色付けを併せることでGの3-彩色が得られる．

このように彩色の問題に応用させるという方針からは，禁止部分グラフ条件と最小次数の関係性も深く調査する必要がある．関連する結果として2-因子の存在性に関する研究を行う過程で次の命題が示されているが，次数条件の注目度合いは連結度に比べてまだ低いと言えるだろう．

定理 4.5 (Aldred et al. [1]) 整数$n \geq 2$に対して，最小次数3以上の連結$\{K_3, K_{2,n}, P_5\}$-フリーグラフの位数は$8n^3 - 28n^2 + 34n - 13$以下である．

5. まとめ

本稿では，比較や有限性という観点から禁止部分グラフ条件を満たすグラフの集合自体に注目した．比較については，定理 2.1 や定理 2.6 などを見る限り，多くの場合に自明な十分条件が必要条件にもなることが確認できる．特に，非自明な例は2.1節におけるA_2や2.3節における正二十面体グラフなど人工的なものが多く，それらが実際に禁止部分グラフ条件として用いられる機会は少ない．しかし禁止部分グラフに関連して近年最も注目されている次の予想を見ると，どのようなグラフであっても禁止条件として考えるべきものであることが分かる．

---

[21] 一般にはP_8-フリーグラフが5-彩色可能かどうかの判定問題ですらNP-完全である [35].

予想 2 (Erdős and Hajnal [17]) 任意のグラフ H に対して，ある定数 $c = c(H)$ (> 0) が存在して，すべての H-フリーグラフはサイズ $|V(G)|^c$ 以上のクリークか独立点集合を持つ [22]．

予想 2 について，良い性質を持ったグラフ H に対して個別にアプローチするという方針が現在の主流であるが，今後一般論を展開する場面が訪れるであろう．そのような意味では，どのような特殊な例であっても無下にすることはできない．

また，グラフクラスの χ-bounded 性 [23] についても，最近の研究において禁止部分グラフの観点から立て続けに大きな進展があった [24]．既に確認したように，定理 4.4 の形の命題は彩色数の上界に情報を与えるため，χ-bounded に関連する類似問題としての発展も見込まれる．

禁止部分グラフ条件の問題は多様であり，本稿で扱ったような基礎研究の進展も更に需要が高まると考えている．

参考文献

[1] R.E.L. Aldred, J. Fujisawa and A. Saito, Forbidden subgraphs and the existence of a 2-factor, J. Graph Theory **64** (2010) 250–266.

[2] P. Bedrossian, Forbidden subgraph and minimum degree conditions for Hamiltonicity, Ph.D. Thesis, Memphis State University (1991).

[3] L.W. Beineke, Characterizations of derived graphs, J. Combin. Theory **9** (1970) 129–135.

[4] H. Broersma and H.J. Veldman, Restrictions on induced subgraphs ensuring Hamiltonicity or pancyclicity of $K_{1,3}$-free graphs, Contemporary Methods in Graph Theory, pp. 181–194, BI-Wiss.-Verlag, Mannheim (1990).

[5] G. Chen, M. Furuya, S. Shan, S. Tsuchiya and P. Yang, Difference of forbidden pairs containing a claw, preprint.

[6] S. Chiba, J. Fujisawa, M. Furuya and N. Ikarashi, Forbidden pairs with a common graph generating almost the same sets, Electron. J. Combin. **24** (2017) #P2.13.

[7] M. Chudnovsky, N. Robertson, P. Seymour and R.Thomas, The strong perfect graph theorem, Ann. Math. **164** (2006) 51–229.

[8] M. Chudnovsky and J. Stacho, 3-colorable subclasses of P_8-free graphs, SIAM J. Discrete Math. **32** (2018) 1111–1138.

[9] M. Chudnovsky and P. Seymour, The structure of claw-free graphs, Surveys in combinatorics 2005, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **327**, pp. 153–171, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2005).

[10] M. Chudnovsky and P. Seymour, Claw-free graphs VI. Colouring, J. Combin. Theory Ser. B **100** (2010) 560–572.

[11] R. Diestel, Graph Theory (5th edition), Graduate Texts in Mathematics **173**, Springer, Heidelberg (2016).

[12] D. Duffus, R.J. Gould and M.S. Jacobson, Forbidden subgraphs and the hamiltonian theme, The Theory and Applications of Graphs, pp. 297–316, Wiley, New York (1981).

[22] 禁止部分グラフ条件を考えない場合，最大クリークも最大独立点集合もサイズが $O(\log |V(G)|)$ となるグラフ G の無限列が存在する [16].

[23] グラフの集合 $\mathcal{G}$ について，ある関数 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ が存在して，任意の $G \in \mathcal{G}$ に対して $\chi(G) \le f(\omega(G))$ を満たすとき，$\mathcal{G}$ は **χ-bounded** であるという．例えば理想グラフ全体からなる集合は明らかに（$f(x) = x$ を用いて）χ-bounded であり，$\mathcal{G}(\{K_{1,3}\})$ は（$f(x) = 2x$ を用いて）χ-bounded である [10].

[24] 例えば 30 年以上未解決であった『$\mathcal{G}(\{C_{2n+1} : n \ge 2\})$ が χ-bounded である』という予想が Scott と Seymour [33] によって解決されたことは記憶に新しい.

[13] Y. Egawa, J. Fujisawa, M. Furuya, M.D. Plummer and A. Saito, Forbidden triples generating a finite set of 3-connected graphs, Electron. J. Combin. **22** (2015) #P3.13.

[14] Y. Egawa and M. Furuya, Forbidden triples containing a complete graph and a complete bipartite graph of small order, Graphs Combin. **30** (2014) 1149–1162.

[15] Y. Egawa and Z. Zhao, Forbidden triples involving the complete bipartite graph with partite sets having cardinalities two and three, preprint.

[16] P. Erdős, Some remarks on the theory of graphs, Bull. Amer. Math. Soc. **53** (1947) 292–294.

[17] P. Erdős and A. Hajnal, Ramsey-type theorems, Discrete Applied Mathematics **25** (1989) 37–52.

[18] R.J. Faudree and R.J. Gould, Characterizing forbidden pairs for Hamiltonian properties, Discrete Math. **173** (1997) 45–60.

[19] R.J. Faudree, R.J. Gould, Z. Ryjáček and I. Schiermeyer, Forbidden subgraphs and pancyclicity, Congress Numer. **109** (1995) 13–32.

[20] J. Fujisawa, K. Ota, K. Ozeki and G. Sueiro, Forbidden induced subgraphs for star-free graphs, Discrete Math. **311** (2011) 2475–2484.

[21] J. Fujisawa, M.D. Plummer and A. Saito, Forbidden subgraphs generating a finite set, Discrete Math. **313** (2013) 1835–1842.

[22] S. Fujita, M. Furuya and K. Ozeki, Forbidden subgraphs generating almost the same sets, Combin. Probab. Comput. **22** (2013) 733–748.

[23] M. Furuya and Y. Okubo, Forbidden quadruplets generating a finite set of 2-connected graphs, Discrete Math. **338** (2015) 1277–1283.

[24] M. Furuya and R. Tsuchiya, Difference between forbidden subgraph conditions involving $K_{1,3}$, preprint.

[25] M. Furuya and S. Tsuchiya, Claw-free and $N(2,1,0)$-free graphs are almost net-free, Graphs Combin. **31** (2015) 2201–2205.

[26] M. Furuya and M. Yokota, Forbidden subgraph generating almost all claw-free graphs with high connectivity, preprint.

[27] T. Kaiser, Z. Ryjáček and P. Vrána, On 1-Hamilton-connected claw-free graphs, Discrete Math. **321** (2014) 1–11.

[28] C.G. Lekkerkerker and J.C. Boland, Representation of a finite graph by a set of intervals on the real line, Fund. Math. **51** (1962/1963) 45–64.

[29] B. Li, K. Ozeki, Z. Ryjáček and P. Vrána, Thomassen's conjecture for line graphs of 3-hypergraphs, preprint.

[30] M.M. Matthews and D.P. Sumner, Hamiltonian results in $K_{1,3}$-free graphs, J. Graph Theory **8** (1984) 139–146.

[31] S. Olariu, Paw-free graph, Inform. Process. Lett. **28** (1988) 53–54.

[32] K. Ota and G. Sueiro, Forbidden induced subgraphs for perfect matchings, Graphs Combin. **29** (2013) 289–299.

[33] A. Scott and P. Seymour, Induced subgraphs of graphs with large chromatic number. I. Odd holes, J. Combin. Theory Ser. B **121** (2016), 68–84.

[34] D.P. Sumner, 1-factors and antifactor sets, J. London Math. Soc. **13** (1976) 351–359.

[35] G.J. Woeginger and J. Sgall, The complexity of coloring graphs without long induced paths, Acta Cybernet. **15** (2001) 107–117.

[36] R. Woo and A. Neumaier, On graphs whose smallest eigenvalue is at least $-1-\sqrt{2}$, Linear Algebra Appl. **226–228** (1995) 577–591.