

ファイバー構造と 接触・シンプレクティック多様体のトポロジー

大場 貴裕 (京都大学数理解析研究所)*

概 要

接触多様体, シンプレクティック多様体はオープンブック, Lefschetz ファイバー空間といったファイバー構造を用いて研究することができる. 本稿では, 接触多様体と境界付きシンプレクティック多様体に焦点を当て, まずは低次元の場合についての研究の発展を振り返る. その後, 筆者が近年取り組んでいる高次元の場合についての概説をする.

1. はじめに

ファイバー構造は多様体のトポロジーを調べる上で重要な道具の1つである. 例えば, Lefschetz は射影多様体のトポロジーを今日 Lefschetz ペンシルと呼ばれるファイバー構造を用いて研究した. 本稿のテーマである接触・シンプレクティック多様体に焦点を当てると, まず, 1990年代後半に Donaldson と Gompf により, 閉シンプレクティック多様体と Lefschetz ペンシルの対応関係が示された. 2001年には, Akbulut と Ozbagci, Loi と Piergallini により複素2次元の Stein 領域に関し Lefschetz ファイバー空間との対応が示され, 近年 Giroux と Pardon により一般次元でもこの対応関係が示された. また, 2000年代初頭に Giroux と Mohsen により接触多様体に対するオープンブック分解の存在も示されている. このようなファイバー構造が接触・シンプレクティック多様体の研究に導入されることにより, 構成的研究が活発化した. とくに, 低次元の場合はファイバーが2次元の曲面であるため, 写像類群の組合せ群論により, 様々な興味深い例が構成されている. 一方で, 高次元の場合にはそもそもファイバーとなる多様体の写像類群がよくわかっていないこともあり, 課題が多く残っている.

本稿では, 第2節でオープンブックと接触多様体, Lefschetz ファイバー空間と Stein 領域の関係について概説したのち, 続く第3節では低次元の場合にファイバー構造がどのような結果をもたらしたかを概説する. そして, 第3節では筆者が近年取り組んでいる高次元の研究についての近況を報告をする. なお, 本稿で低次元は4次元以下を指すことにし, それ以上を高次元ということにする.

2. ファイバー構造

2.1. オープンブックと接触多様体

M を有向閉 $2n+1$ 次元多様体とする. M 上の超平面場 ξ が**接触構造**であるとは, M 上の1次形式 α が存在し, $\xi = \ker(\alpha)$ かつ $\alpha \wedge (d\alpha)^n > 0$ を満たすものをいう. このとき α を**接触形式**, 組 (M, ξ) を**接触多様体**という. 以下では, 接触多様体とオープンブックの関係を述べる. そのためにまず, 多様体のオープンブック分解の復習をする.

本研究は科研費(課題番号: 18J01373)の助成を受けたものである.

キーワード: オープンブック分解, 接触多様体, Lefschetz(-Bott) ファイバー空間, シンプレクティック多様体, Stein 領域, 接触多様体のシンプレクティック充填

* 〒606-8317 京都府京都市左京区北白川追分町

e-mail: oba@kurims.kyoto-u.ac.jp

定義 2.1. 多様体 M の **オープンブック分解** とは次を満たす対 (B, π) のことである：

- (i) B は M の余次元 2 の部分多様体で、その法バンドルは自明である；
- (ii) 写像 $\pi : M \setminus B \rightarrow S^1$ が $M \setminus B$ にファイバー束の構造を定め、 π は B の近傍 $B \times D^2$ において以下の射影である： $B \times D^2 \setminus B \times \{0\} \rightarrow D^2 \setminus \{0\} \rightarrow S^1$.

上の定義における B をオープンブック分解の **バインディング** といい、 π のファイバーの閉包のことを **ページ** という。

例 2.2. 球面 $S^{2n+1} := \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \|z\| = 1\}$ を考える。 $B = \{z_{n+1} = 0\} \cap S^{2n+1}$, $\pi : S^{2n+1} \setminus B \rightarrow S^1$, $\pi(z) = z_{n+1}/|z_{n+1}|$ とすれば、 (B, π) は B をバインディングとする S^{2n+1} のオープンブック分解である。このページは、 $2n$ 次元の球体に微分同相である。

定義から、 M のオープンブック分解 (B, π) は B の近傍 $B \times D^2$ と π から定まる S^1 上のファイバー束に M を分解する。この観点から次の概念を導入する。

定義 2.3. **アブストラクトオープンブック** とは、 $2n - 2$ 次元の境界付きコンパクト多様体とコンパクトな台¹を持つ V の自己微分同相写像 ϕ の組 (V, ϕ) のことをいう。

アブストラクトオープンブック (V, ϕ) に対し、多様体 $M(V, \phi)$ を以下のように定める。まず、 $V(\phi) = (V \times \mathbb{R})/(\phi(x), t+1) \sim (x, t)$ とおく。写像 ϕ がコンパクトな台を持つことから、 $V(\phi)$ の境界は $\partial V \times S^1$ である。従って、 $V(\phi)$ と $\partial V \times D^2$ の互いの境界を貼り合わせる写像 Φ_{glue} が定まる。多様体 $M(V, \phi)$ を

$$M(V, \phi) = V(\phi) \cup_{\Phi_{glue}} (B \times D^2)$$

と定義する。多様体 $M(V, \phi)$ は、ページが V 、バインディングが ∂V と微分同相であるオープンブック分解を持つ。写像 ϕ のことを、オープンブックの **モノドロミー** と呼ぶ。

オープンブックと接触多様体の関係について述べるために、いくつか復習をする。まず、多様体 V 上の **シンプレクティック形式** とは非退化な閉 2 次形式 ω のことであり、組 (V, ω) を **シンプレクティック多様体** という。 V をコンパクトな境界付き多様体とする。 V 上のベクトル場 X で、 $\mathcal{L}_X \omega = \omega$ を満たすものを **Liouville ベクトル場** という。 X が ∂V 上外向きであるとき、 (V, ω, X) を **Liouville 領域** という。定義から、 ω は完全形式で、内部積 $\lambda = i_X \omega$ が ∂V 上の接触形式を与える。以下では、Liouville ベクトル場を省略して、単に $(V, d\lambda)$ で Liouville 領域を表すことにする。

Liouville 領域 $(V, d\lambda)$ のコンパクトな台を持つシンプレクティック自己同型写像 ϕ を考える。アブストラクトオープンブックに λ も含め、組 (V, λ, ϕ) を考える。このとき、多様体 $M(V, \phi)$ 上に接触形式、接触構造を (V, λ, ϕ) から構成することができる（詳しくは [9, Section 7.3] を参照）。このようにして得られた接触多様体を $OB(V, \lambda; \phi)$ と書く。得られた接触構造は $M(V, \phi)$ 上に自然に定まるオープンブック分解に適合している。ここで、 M 上の接触構造 $\xi = \ker(\alpha)$ がオープンブック分解 (B, π) と **適合** しているとは、 $d\alpha$ がページ上のシンプレクティック形式であり、与えられたものと $d\alpha$ が定めるページ上の向きが同じであり、さらに α が B 上の接触形式を与えるときをいう。

ここではオープンブックから接触構造を構成したが、その逆の結果も知られている。

定理 2.4 (Giroux-Mohsen [10]). 任意の接触多様体 (M, ξ) に対し、 ξ と適合する M のオープンブック分解が存在する。

¹ 即ち、境界近くでは自明な写像である。

2.2. Lefschetz ファイバー空間と Stein 領域

E を余次元 2 の角を持つ境界付きのコンパクトな $2n$ 次元多様体とし、 Ω をその上のシンプレクティック形式とする。 E は $\Omega^n > 0$ となるよう向きづけられているとする。 また、 D^2 を向きのついた 2 次元円盤とする。

定義 2.5. Lefschetz ファイバー空間 とは、以下を満たす組 (E, Ω, π) である：

- (i) 写像 $\pi : E \rightarrow D^2$ の臨界点集合 $\text{Crit}(\pi)$ は有限である；
- (ii) 各臨界点 $p \in \text{Crit}(\pi)$ と、それに対応する臨界値 $q \in \pi(\text{Crit}(\pi))$ の周りで向きに適合する複素座標 (z_1, \dots, z_n) , w がそれぞれ取れ、 π は以下のように書ける、

$$w = \pi(z_1, \dots, z_n) = z_1^2 + \dots + z_n^2.$$

ここで、 Ω はこの近傍において \mathbb{C}^n の標準的 Kähler 形式に一致しているとする；

- (iii) Ω は $\ker(D\pi)$ で非退化である；
- (iv) ∂E は $\partial_v E = \pi^{-1}(\partial D^2)$ (垂直方向), $\partial_h E = \cup_{q \in D^2} \partial \pi^{-1}(q)$ (水平方向) からなり、 E の角は $\partial_v E \cap \partial_h E$ に一致している。 垂直方向に関しては制限 $\pi|_{\partial_v E} : \partial_v E \rightarrow \partial D^2$ はファイバー束であり、水平方向に関しては $\partial_h E$ の近傍で π が D^2 上の自明なファイバー束である。

Lefschetz ファイバー空間 (E, Ω, π) に対し、 E を**全空間**、臨界点を含むファイバーのことを**特異ファイバー**といい、その他のファイバーを**正則ファイバー**という。

Lefschetz ファイバー空間に関連する諸概念の復習をする。 (E, Ω, π) を Lefschetz ファイバー空間とする。簡単のため、 $\pi|_{\text{Crit}(\pi)} : \text{Crit}(\pi) \rightarrow \pi(\text{Crit}(\pi))$ が全単射であると仮定する。 q_0 を境界 ∂D^2 上の点とする。また、 p を π の臨界点とし $q = \pi(p)$ とおく。パス $\gamma : [0, 1] \rightarrow D^2$ で $\gamma(0) = q_0$, $\gamma(1) = q$, $\gamma^{-1}(\pi(\text{Crit}(\pi))) = \{0, 1\}$ を満たすものを取る。このパス γ を q の**消滅パス**という。定義から、 π は $\gamma([0, 1])$ 上でシンプレクティックファイバー束であるから、 Ω から接続が定まる。 $a < b$ である $a, b \in [0, 1]$ に対し、 $h_{\gamma; a, b} : (\pi^{-1}(\gamma(a)), \Omega|) \rightarrow (\pi^{-1}(\gamma(b)), \Omega|)$ をパス $\gamma|_{[a, b]} : [a, b] \rightarrow D^2$ に沿う平行移動とする。この平行移動を利用し次のような (E, Ω) の Lagrange 部分多様体 $\Delta(\gamma)$ が定まる：

$$\Delta(\gamma) = \{p\} \cup (\cup_{a \in [0, 1]} \{x \in \pi^{-1}(\gamma(a)) \mid \lim_{b \rightarrow 1} h_{\gamma; a, b}(x) = p\}).$$

これは n 次元の円盤に微分同相であり、パス γ に関する **Lefschetz シンプル**という。各正則ファイバーとの交わり $\pi^{-1}(\gamma(t)) \cap \Delta(\gamma)$ は $(\pi^{-1}(\gamma(t)), \Omega|)$ 中の Lagrange 球面²である。特に、 $L(\gamma) := \partial \Delta(\gamma) = \pi^{-1}(q_0) \cap \Delta(\gamma)$ のことを γ に関する**消滅サイクル**という。臨界値 q を中心とする充分小さな円盤を取り、 D^2 から誘導される向きを入れる。この円盤の境界と、先ほどのパス γ から得られるループを ℓ とする。このループに沿う π のモノドロミーは消滅サイクル $L(\gamma)$ についての**右手 Dehn ツイスト** $\tau_{L(\gamma)} \in \text{Symp}_c(\pi^{-1}(q_0), \Omega|)$ で与えられる。ここで、 $\text{Symp}_c(\pi^{-1}(q_0), \Omega|)$ は $(\pi^{-1}(q_0), \Omega|)$ のコンパクト台を持つシンプレクティック自己同型写像のなす群である。 $\pi(\text{Crit}(\pi)) = \{q_1, \dots, q_k\}$ とおき、各 q_j の消滅パス γ_j を取る。 q_1, \dots, q_k は基点 q_0 以外では交わらず、誘導するループ ℓ_1, \dots, ℓ_k たちの積 $\ell_1 \cdots \ell_k$ が ∂D^2 にホモトピックであるとする。このような $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ に対し、消滅サイクルの組 $(L(\gamma_1), \dots, L(\gamma_k))$ が得られる。

² 厳密には枠付き Lagrange 球面である。枠とは \mathbb{R}^{n+1} 中の単位球面 S^n と Lagrange 球面との間の微分同相写像のことである。本稿では、枠についてはこれ以降とくに言及しない。詳しくは [27, Section 16] を参照してほしい。

例 2.6. 十分小さい $\varepsilon > 0$ に対し、 \mathbb{C}^{n+1} の超曲面 V_m を次のように定義する：

$$V_m := \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \sum_{j=1}^n z_j^2 + z_{n+1}^{m+1} = \varepsilon\} \cap \{\sum_{j=1}^{n+1} |z_j|^2 \leq 1\}$$

$\pi_m : V_m \rightarrow D^2$ を射影 $z \mapsto z_{n+1}$ とすると、 $(V_m, \pi_m, \omega_{st})$ は Lefschetz ファイバー空間である³。ここで ω_{st} は \mathbb{C}^{n+1} の標準的シンプレクティック形式の V_m への制限である。正則ファイバーは球面 S^{n-1} 上のある半径を持つ円盤余接束 DT^*S^{n-1} とシンプレクティック同型である。

以下の概念は、Lefschetz ファイバー空間を構成する際に用いられる。

定義 2.7. アブストラクト Lefschetz ファイバー空間とは、シンプレクティック多様体 (V, ω) とその中の Lagrange 球面 L_1, \dots, L_k たちの組 $(V, \omega; L_1, \dots, L_k)$ である。

この組からどのように多様体を定めるかを説明する前に、以下を定義しておく。複素多様体 (V, J) が **Stein 領域** であるとは、 (V, J) が固有かつ下に有界な狭義多重劣調和関数 $f : (V, J) \rightarrow \mathbb{R}$ を持ち、正則値 c が存在し $V = f^{-1}(-\infty, c]$ と書けるものをいう。ここで、 J は V 上の積分可能な概複素構造である。 $d^c = d \circ J$ としたとき、 $-dd^c f$ は V 上のシンプレクティック形式である。また、境界 ∂V において、 $T\partial V \cap J(T\partial V)$ は接触構造を定める。接触多様体 (M, ξ) が $(\partial V, T\partial V \cap J(T\partial V))$ と接触同型であるとき、 V を (M, ξ) の **Stein 充填** といい、 ξ は **Stein 充填可能** であるという。

アブストラクト Lefschetz ファイバー空間 $(V, \omega; L_1, \dots, L_k)$ に対し、まず、直積 $V \times \mathbb{D}$ を考える。ここで、 $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ は単位円盤を表す。各 L_j は射影 $V \times \partial\mathbb{D} \rightarrow \partial\mathbb{D}$ のファイバー $V \times \{e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}j}{k}}\}$ の中にあると仮定できる。以下で多様体を定める。

$$E(V, \omega; L_1, \dots, L_k) = (V \times \mathbb{D}) \cup (H_1 \cup \dots \cup H_k)$$

ここで、各 H_j は L_j に沿って $V \times \mathbb{D}$ に貼った Weinstein ハンドルである。 $(V, \omega = d\lambda)$ が Weinstein 領域であると仮定すると、 $E(V, \omega; L_1, \dots, L_k)$ も Weinstein 領域となる。Eliashberg の結果から、Weinstein 構造を変形し $E(V, \omega; L_1, \dots, L_k)$ を Stein 領域とみなせる。これにより、Stein 領域が得られた。この境界は $OB(V, \lambda; \tau_{L_k} \circ \dots \circ \tau_{L_1})$ であり、得られた Stein 領域はこの接触多様体の Stein 充填になっている。

以上で、抽象的なデータから Lefschetz ファイバー空間が構成され Stein 領域を得たが、実はこの逆も成立する。以下の定理は、複素 2 次元の場合に、Akbulut と Ozbagci[3]、Loi と Piergallini[16] が独立に、一般の場合に Giroux と Pardon[11] によって示された。

定理 2.8 ([3, 16, 11]). Stein 領域は、Lefschetz ファイバー空間の構造を許容する。

3. 低次元の接触・シンプレクティック多様体

3.1. 3次元接触多様体の Stein 充填

接触多様体の Stein 充填の研究に関する1つのテーマとして、充填の個数の問題がある。ただし、この「個数」は、シンプレクティック変形同値や微分同相など適切な関係のもとで数える。一般に、与えられた接触多様体に対して Stein 充填は1つとは限らない。Ozbagci と Stipsicz [23] は、互いにホモトピー型が異なる無限個の Stein 充填を持つ3次元接触多様体を構成した。彼らの結果以前は、Stein 充填のホモトピー型が特定され

³ より正確には、全空間としては角付き多様体を取らなければならない。詳しい議論は [19, Section 2.3] を見ていただきたい

ていた接触多様体に関して、充填の位相型は高々有限個であった。構成にはオープンブックと Lefschetz ファイバー空間を用いる。アイデアとしては、Lefschetz ファイバー空間の無限族で以下の条件を満たすものを構成する：(1) 全空間のホモロジー群が互いに異なる；(2) 境界に同じオープンブックを誘導する。あとは、前節で行なった構成から、Lefschetz ファイバー空間の全空間には Stein 構造が、境界にはオープンブックから接触構造が定まり、結果を得る。鍵となるのは Lefschetz ファイバー空間の族の構成である。これには写像類群の組合せ群論的な手法が用いられており、**モノドロミー置換**と呼ばれる操作の1つである。この操作は Lefschetz ファイバー空間のモノドロミーに対する群論的な操作であるが、対応する全空間の4次元多様体の手術として解釈することもできる。ここではその詳細に立ち入らないが、[8]に遠藤氏による詳しい解説があるので興味のある方は参照していただきたい。

3次元接触多様体が Stein 充填をたくさん持つとすると、そのトポロジーの“多様さ”が問題として挙がる。これが Stein 充填の地誌学 (geography) の問題である。3次元接触多様体 (M, ξ) に対し、次の集合を定義する：

$$\mathcal{C}(M, \xi) = \{(\chi(V), \sigma(V)) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid (V, J) \text{ は } (M, \xi) \text{ の Stein 充填}\}$$

ここで、 $\chi(V)$ 、 $\sigma(V)$ はそれぞれ V の Euler 標数、符号数である。地誌学はこの $\mathcal{C}(M, \xi)$ の範囲、大きさを問うものである。2004年に出版された [24] では、 $\mathcal{C}(M, \xi)$ は任意の (M, ξ) に対し有限であると予想されている。その後、接触多様体のあるクラスではこの予想が正しいことが考察された。しかし、近年 Baykur と Van Horn-Morris [5] がこの予想の反例を前節で述べたファイバー構造を一般化したものを用いて構成した。彼らは、3次元接触多様体で、 $\chi(V)$ がいくらでも大きくできるものを構成している。これを境に、様々な反例が構成されている：[6], [4], [7].

ここまでは、Stein 充填が無数ある場合について述べてきた。充填が高々有限個の接触3次元多様体の例も知られている。例えば、標準的接触構造の入った S^3 や、レンズ空間 [17], [12], 単純特異点、単純楕円型特異点のリンク [21], [22] などがある。これらは、擬正則曲線などを利用して得られたものである。ファイバー構造を用いても Stein 充填の有限性を示すことができる。その土台となるのが、次の結果である。

定理 3.1 (Wendl [29]). 3次元接触多様体 M 上の接触構造 ξ が Stein 充填可能であり、 ξ はページの種数が0である M のオープンブック分解と適合しているとする。このとき、そのモノドロミー ϕ は右手 Dehn ツイストの積として書き表される。さらに、 (M, ξ) の任意の Stein 充填は与えられた ϕ のある右手 Dehn ツイストの積から定まる Lefschetz ファイバー空間の構造を持つ。

この定理から、定理の仮定を満たす接触多様体 (M, ξ) であれば、与えられたオープンブックからその Stein 充填すべてが理論的には書き下すことができる。この定理を用いて、Plamenevskaya と Van Horn-Morris [26] はレンズ空間 $L(p, 1)$ で Stein 充填可能な接触構造を持つものに対してその Stein 充填の分類を行い、上記の [17] の結果を拡張した。レンズ空間以外の3次元多様体に対しても、Wendlの結果を用いて Stein 充填の一意性や分類を行うことができる。例えば、双曲多様体 [14], 他のレンズ空間に関する結果 [15] や、筆者によるホモロジー球面に関する結果 [18] がある。

3.2. 3次元接触トポロジーへの応用

Giroux の対応 [10] を通じ、3次元接触多様体はオープンブックを用いて研究する動きが活発である。例えば、Ozsváth と Szabó [25] による Heegaard Floer ホモロジー由来の接触構造の不変量がある。Heegaard Floer ホモロジーは3次元多様体の Heegaard 分解を用いて定義されるホモロジーである。接触構造の不変量は、バインディングに相当する絡み目の Heegaard Floer ホモロジー群を経由して定義されるものである。例えば、与えられた接触構造のこの不変量が自明であれば、Stein 充填不可能であることがわかる。

上記の他にもオープンブックを用いた3次元接触多様体の研究が様々ある。羅列になるが、Wand によるタイトな接触構造の Legendrian 手術による保存性 [28] について、Weinstein 予想の Abbas-Cieliebak-Hofer らの部分的解決 [1] や、伊藤氏・川室氏のオープンブック葉層の理論 [13] などがある。

4. 高次元の接触・シンプレクティック多様体

4.1. Stein 充填を無限個持つ接触多様体

前節で述べた通り、低次元接触多様体の Stein 充填に関しては様々な結果がある。一方、高次元の場合は Eliashberg, McDuff, Floer たち [17] による標準的な接触構造を持つ球面 S^{2n+1} に関する Stein 充填の一意性がほとんど唯一の結果であった。少なくとも、Stein 充填を複数個もつ高次元接触多様体の存在は知られていなかった。低次元の場合の真似をしてファイバー構造でこのような例を構成しようとするると次のような困難な点が生じる：

- (i) シンプレクティック多様体の中の Lagrange 球面たちをどのようにとるか？
- (ii) 高次元の場合のモノドロミー置換はどのように行えばよいか？

まず、1つ目について解決する。 $\pi : (E, \omega) \rightarrow D^2$ を Lefschetz ファイバー空間とする。

定義 4.1. π に関する **マッチングパス** とは以下を満たすパス $\gamma : [-1, 1] \rightarrow D^2$ である：

- (i) $\gamma^{-1}(\pi(\text{Crit}(\pi))) = \{\pm 1\}$ かつ $\gamma(-1) \neq \gamma(1)$ ；
- (ii) $\gamma_{\pm} : [0, 1] \rightarrow D^2$ を $\gamma_{\pm}(t) := \gamma(\pm t)$ で定めるとき、消滅サイクル $L(\gamma_-)$, $L(\gamma_+)$ は $(\pi^{-1}(\gamma(0)), \omega_{\pi^{-1}(\gamma(0))})$ の中の Lagrange 球面として一致する。

Lefschetz シンブル $\Delta(\gamma_{\pm})$ は (E, ω) 内の Lagrange 円盤であるから、 $S(\gamma) := \Delta(\gamma_-) \cup \Delta(\gamma_+)$ は Lagrange 球面となる。これを γ の上の **マッチングサイクル** という。例えば、全空間が $2n + 2$ 次元の Lefschetz ファイバー空間を構成したいときには、 $2n$ 次元の全空間をもつ Lefschetz ファイバー空間とその中のマッチングパスを消滅サイクルとするアブストラクト Lefschetz ファイバー空間を考えればよい。

次に2つ目の困難な点に関して、その解決法を述べる。 (L_1, \dots, L_k) を一般ファイバーが V である Lefschetz ファイバー空間 $\pi : (E, \omega) \rightarrow D^2$ の消滅サイクルの組とする。あるいは、アブストラクト Lefschetz ファイバー空間 $(V, \omega; L_1, \dots, L_k)$ を考えていると思ってもよい。 V の中のある Lagrange 球面 L に沿う Dehn ツイストが積 $\tau_{L_{k''}} \circ \tau_{L_{k''-1}} \circ \dots \circ \tau_{L_{k'}}$ ($1 \leq k' \leq k'' < k$) とアイソトピーの差をのぞいて可換であるとする。このとき、以下の操作を τ_L による **部分共役** という：

$$(V, \omega; L_1, \dots, L_{k'}, \dots, L_{k''}, \dots, L_k) \mapsto (V, \omega; L_1, \dots, \tau_L(L_{k'}), \dots, \tau_L(L_{k''}), \dots, L_k).$$

$[\tau_L]$ と $[\tau_{L_{k''}} \circ \tau_{L_{k''-1}} \cdots \circ \tau_{L_{k'}}]$ が可換であることから、消滅サイクルに沿う Dehn ツイストたちの積は部分共役の前後で不変であることに注意しておく。

定理 4.2 (大場 [19]). $n \geq 2$ に対し、接触 $4n - 1$ 次元多様体で、ホモトピー型が相異なる Stein 充填を無限個持つものが存在する。また、このような接触多様体は各 n に対し、無限個存在する。

構成の概略について記す。低次元の場合と同様にファイバー構造を用いて構成する。Lefschetz ファイバー空間のファイバー、オープンブックのページとなる多様体は例 2.6 で登場した A_m -Milnor ファイバー V_m である。Lefschetz ファイバー空間 $\pi_m : V_m \rightarrow D^2$ は、任意の消滅パスに対して消滅サイクルがファイバーの DT^*S^n の零切断の像で与えられる。したがって、相異なる特異値を結ぶパスはマッチングパスとなる。このようなパスで特別なものを以下のようにして選ぶ。 π_m の特異値は ε の $m+1$ 乗根 $\zeta_j := \sqrt[m+1]{\varepsilon} e^{\frac{2\pi}{m+1}j}$ ($j = 1, \dots, m+1$) である。これらの点は \mathbb{C} 上の半径 $\sqrt[m+1]{\varepsilon}$ の円上にあり、端点が ζ_j と ζ_{j+1} であるこの円の弧のうち、最短のものを l_j とおく。これはマッチングパスであり、マッチングサイクル L_j を取ることができる。 m 次のブレイド群 B_m と $\pi_0(\text{Symp}_c(V_m, \omega_0))$ の間には以下のような反準同型が知られている：

$$\rho : B_m \rightarrow \pi_0(\text{Symp}(V_m, \omega_0)), \sigma_j \mapsto [\tau_{L_j}],$$

ただし、 σ_j は B_m の標準的生成元である。この反準同型により、 B_m の組合せ群論で $\pi_0(\text{Symp}(V_m, \omega_0))$ の組合せ群論を考えることができる。

構成のためには $\dim_{\mathbb{C}} = 2n$ である V_4 を用いる。まず、 B_5 と 5 つの点が付いた円盤の写像類群とを同一視する。この同一視のもとで図 1 のパス α_j に沿うハーフツイストに対応する B_5 の元を β_j とする。

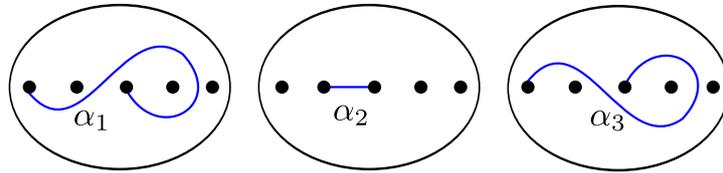


図 1: パス $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

次に

$$\psi_k := (\sigma_3^{-k} \beta_1 \sigma_3^k) (\sigma_3^{-k} \beta_2 \sigma_3^k) (\sigma_3^{-k} \beta_3 \sigma_3^k) \beta_2 \sigma_4$$

とおく。 $[\beta_1 \beta_2 \beta_3, \sigma_3] = 1$ が成り立っており、任意の k, k' に対し $\psi_k = \psi_{k'}$ が成り立つ。 $\sigma_3^{-k} \beta_j \sigma_3^k$ の ρ による像はある Lagrange 球面に沿う Dehn ツイストのアイソトピー類であり、その球面を $B_{j,k}$ と書く。 $M_k := M(V_4, \omega_0; \tau_{L_4} \circ \tau_{L_2} \circ \tau_{B_{3,k}} \circ \tau_{B_{2,k}} \circ \tau_{B_{1,k}})$, $\xi_k := \xi(V_4, \omega_0; \tau_{L_4} \circ \tau_{L_2} \circ \tau_{B_{3,k}} \circ \tau_{B_{2,k}} \circ \tau_{B_{1,k}})$, $E_k := E(V_4, \omega_0; B_{1,k}, B_{2,k}, B_{3,k}, L_2, L_4)$ とおく。 $\rho(\psi_k) = \tau_{L_4} \circ \tau_{L_2} \circ \tau_{B_{3,k}} \circ \tau_{B_{2,k}} \circ \tau_{B_{1,k}}$ であることから、 (M_k, ξ_k) は k に依らず、すべて接触同型である。しかし、 (M_k, ξ_k) の Stein 充填である E_k は、直接計算からホモロジー群が相異なることがわかる。ゆえに、族 $\{E_k\}_{k \geq 0}$ は接触 $4n - 1$ 次元多様体 (M_k, ξ_k) のホモトピー型が異なる Stein 充填の族を与える。

注意 4.3. 上の構成は接触多様体が $4n + 1$ 次元の場合にも意味を持つが、Stein 充填がホモロジーでは区別できない。例えば、 $n = 1$ の時は、Dehn ツイストが $\pi_0(\text{Diff}_c(V_4))$ では位数 2 であることから、充填は k の偶奇が同じであれば微分同相となる。

4.2. Lefschetz-Bott ファイバー空間とシンプレクティック多様体

ここまでは主に Stein 領域の方に焦点を当ててきた。Stein 領域は複素多様体であるため、シンプレクティック多様体の中では非常に狭いクラスを与える。より広いクラスをファイバー構造を用いて研究するために、Lefschetz ファイバー空間よりも広いファイバー構造の定義を与える。

定義 4.4. (1) 概 Kähler 多様体 (X, Ω, J) の中の概複素部分多様体 C が **normally Kähler** であるとは、 C の X における管状近傍 $\nu_X(C)$ でこの近傍の各ファイバー D_x ($x \in C$) において J が積分可能かつ Ω が Kähler 形式であるときをいう。

(2) **Lefschetz-Bott ファイバー空間**とは次からなる組 (E, π, Ω, J, j) のことである：
 (E, Ω) は開シンプレクティック多様体である； $\pi : E \rightarrow \mathbb{C}$ は全射な写像で、臨界点集合 $\text{Crit}(\pi)$ は E の部分多様体である； J は $\text{Crit}(\pi)$ の近傍 \mathcal{U} で定義された概複素構造である； j は $\pi(\text{Crit}(\pi))$ の近傍 \mathcal{V} で定義された複素構造である。これらが以下を満たす：

- (i) $\text{Crit}(\pi)$ は有限個の連結成分を持ち、normally Kähler である；
- (ii) $\pi|_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ は (J, j) -正則写像である；
- (iii) 各 $x \in \text{Crit}(\pi)$ において \mathcal{U} における法方向の Hessian $D^2\pi|_{D_x}$ は非退化である；
- (iv) $\Omega|_{\mathcal{U}}$ は J と適合している；
- (v) Ω は $\ker(D\pi)$ で非退化である。

注意 4.5. コンパクトな境界付きシンプレクティック多様体 (E, Ω) に対しても Lefschetz-Bott ファイバー空間は定義できる。その場合は、 π の値域を D^2 に変え、定義 2.5 の条件 (iv) も課す。

主定理を述べるために、概念を1つ復習する。 (M, ω) を閉シンプレクティック多様体で、 $[\omega/2\pi] \in H^2(M; \mathbb{Z})$ を満たすものとする。このとき、Euler 類が $-[\omega/2\pi]$ である主 S^1 束 $\varpi : P \rightarrow M$ が存在する。さらにその接続形式 α で $d\alpha = \varpi^*\omega$ を満たすものがとれる。 (P, α) のことを **Boothby-Wang 束** という。簡単な計算から α が P の接触形式を与えることがわかる。

定理 4.6 (大場 [20]). (M, ω) を閉シンプレクティック多様体で、 $[\omega/2\pi]$ が $H^2(M; \mathbb{Z})$ でかつ余次元 2 のシンプレクティック部分多様体のホモロジー類と Poincaré 双対であるとする。このとき、 (M, ω) 上の Boothby-Wang 束に付随する直線束の全空間 L は Lefschetz-Bott ファイバー空間の構造を許容する。

注意 4.7. $\dim_{\mathbb{R}} L > 4$ のとき、ハンドル分解の情報などから L は Lefschetz ファイバー空間の構造を許容しないことがわかる。

構成について述べる。ここでは写像 π についてのみ記す。詳しくは論文 [20] を見ていただきたい。 (M, ω) を定理の仮定を満たすものとし、 $H \subset (M, \omega)$ を $[\omega/2\pi] = PD[H]$ なるシンプレクティック部分多様体とする。 (M, ω) 上の Boothby-Wang 束を書き下し、その後それに付随する直線束を構成する。まず、 H の管状近傍 $\nu_M(H)$ を取る。これは位相的には、 $P \times_{S^1} D^2$ で与えられることに注意する。ただし、 $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ の作用は $[x, z] \cdot \theta = [x \cdot \theta, e^{2\pi i \theta} z]$ で定めている。したがって、この上の S^1 束は $P \times D^2$ そのものである。この S^1 束に付随する直線束は $(P \times D^2) \times_{S^1} \mathbb{C}$ で与えられる。ここでの S^1 作

用は次で定義されている： $[x, z_1, z_2] \in P \times D^2 \times \mathbb{C}$, $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ に対し

$$[x, z_1, z_2] \cdot \theta = [x \cdot \theta, e^{2\pi i \theta} z_1, e^{-2\pi i \theta} z_2].$$

補空間 $V := M \setminus \nu_M(H)$ に関しては, $V \times \mathbb{C} \rightarrow V$ が欲している直線束になっている. 以上から, $L = (V \times \mathbb{C}) \cup ((P \times D^2) \times_{S^1} \mathbb{C})$ が Boothby-Wang 束に付随する直線束の全空間である.

写像 $\pi : L \rightarrow \mathbb{C}$ を定義する. まず, $V \times \mathbb{C}$ 上では, 射影 $\pi_V : V \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ とする. $(P \times D^2) \times_{S^1} \mathbb{C}$ 上では, $\pi_\nu : (P \times D^2) \times_{S^1} \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ を次で定義する:

$$\pi_\nu(x, z_1, z_2) = (\rho(r_1)r_2, \theta_1 + \theta_2).$$

ここで, $\rho : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ は r が小さいところでは $\rho(r) = r$, 1 に近いところでは $\rho(r) \equiv 1$ であり, その他のところでは $\rho'(r) > 0$ であるとする. $\pi = \pi_V \cup \pi_\nu$ とすると, これは適当な概複素構造などに対し, 定義 4.4 の各条件を満たす写像になっている.

例 4.8. $f_d(z_0, \dots, z_{n+1}) := z_0^d + \dots + z_{n+1}^d \in \mathbb{C}[z_0, \dots, z_{n+1}]$ とし, 複素射影空間 $\mathbb{C}\mathbb{P}^{n+1}$ の中の超曲面を次で定義する: $M_d = \{[z] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^{n+1} \mid f_d(z) = 0\}$. また, $H_d = M_d \cap \{z_{n+1} = 0\}$ とする. ω_d を $\mathbb{C}\mathbb{P}^{n+1}$ 上の Fubini-Study 形式の M_d への引き戻しとすると, (M_d, ω_d) は上記の定理の仮定をみたす: $[\omega_d/2\pi] = PD[H_d]$. したがって, 対応する直線束の全空間 L_d は Lefschetz-Bott ファイバー空間の構造を持つ.

この L_d には別の幾何学的な意味がある. $X_d = \{z \in \mathbb{C}^{n+2} \mid f_d(z) = 0\}$ とすると, この空間は原点に特異点を持つ. L_d はこの特異点の resolution に他ならない. 一方で, $X_{d,1} = \{z \in \mathbb{C}^{n+2} \mid f_d(z) = 1\}$ とおくと, これは滑らかな多様体であり, いわゆる特異点の smoothing である. resolution は上の議論にあるように, Lefschetz-Bott ファイバー空間の構造を許容する. 一方で, smoothing $X_{d,1}$ は Lefschetz ファイバー空間の構造を持つことが知られている. 各々の正則ファイバーは $M_d \setminus H_d$ であり, 大域モノドロミーはファイバー-Dehn ツイスト τ , Dehn ツイストの積 $\tau_{L_1} \circ \dots \circ \tau_{L_k}$ でそれぞれ与えられる. 実は, 次のような関係式が知られている ([2]):

$$[\tau] = [\tau_{L_1} \circ \dots \circ \tau_{L_k}] \in \pi_0(\text{Symp}_c(M_d \setminus H_d)).$$

すなわち, この写像類群の関係式は特異点の resolution と smoothing を結ぶものといえることができる.

参考文献

- [1] C. Abbas, K. Cieliebak, and H. Hofer. The Weinstein conjecture for planar contact structures in dimension three. *Comment. Math. Helv.*, 80(4):771–793, 2005.
- [2] B. Acu and R. Avdek. Symplectic mapping class group relations generalizing the chain relation. *Internat. J. Math.*, 27(12):1650096, 26, 2016.
- [3] S. Akbulut and B. Ozbagci. Lefschetz fibrations on compact Stein surfaces. *Geom. Topol.*, 5:319–334, 2001.
- [4] R. I. Baykur, N. Monden, and J. Van Horn-Morris. Positive factorizations of mapping classes. *Algebr. Geom. Topol.*, 17(3):1527–1555, 2017.
- [5] R. I. Baykur and J. Van Horn-Morris. Families of contact 3-manifolds with arbitrarily large Stein fillings. *J. Differential Geom.*, 101(3):423–465, 2015. With an appendix by Samuel Lisi and Chris Wendl.

- [6] R. I. Baykur and J. Van Horn-Morris. Topological complexity of symplectic 4-manifolds and Stein fillings. *J. Symplectic Geom.*, 14(1):171–202, 2016.
- [7] E. Dalyan, M. Korkmaz, and M. Pamuk. Arbitrarily long factorizations in mapping class groups. *International Mathematics Research Notices*, 2015(19):9400–9414, Dec 2014.
- [8] 遠藤久顕. Lefschetz ファイバー空間. *数学*, 69(2):157–180, 2017.
- [9] H. Geiges. *An introduction to contact topology*, volume 109 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2008.
- [10] E. Giroux. Géométrie de contact: de la dimension trois vers les dimensions supérieures. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Beijing, 2002)*, pages 405–414. Higher Ed. Press, Beijing, 2002.
- [11] E. Giroux and J. Pardon. Existence of Lefschetz fibrations on Stein and Weinstein domains. *Geom. Topol.*, 21(2):963–997, 2017.
- [12] R. Hind. Stein fillings of lens spaces. *Commun. Contemp. Math.*, 5(6):967–982, 2003.
- [13] T. Ito and K. Kawamuro. Open book foliation. *Geom. Topol.*, 18(3):1581–1634, 2014.
- [14] A. Kaloti. Stein fillings of planar open books. *arXiv preprint arXiv:1311.0208*, 2013.
- [15] A. Kaloti and Y. Li. Stein fillings of contact 3-manifolds obtained as Legendrian surgeries. *J. Symplectic Geom.*, 14(1):119–147, 2016.
- [16] A. Loi and R. Piergallini. Compact Stein surfaces with boundary as branched covers of B^4 . *Invent. Math.*, 143(2):325–348, 2001.
- [17] D. McDuff. The structure of rational and ruled symplectic 4-manifolds. *J. Amer. Math. Soc.*, 3(3):679–712, 1990.
- [18] T. Oba. Stein fillings of homology 3-spheres and mapping class groups. *Geom. Dedicata*, 183:69–80, 2016.
- [19] T. Oba. Higher-dimensional contact manifolds with infinitely many Stein fillings. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 370(7):5033–5050, 2018.
- [20] T. Oba. Lefschetz-Bott fibrations on line bundles over symplectic manifolds. in preparation.
- [21] H. Ohta and K. Ono. Symplectic fillings of the link of simple elliptic singularities. *J. Reine Angew. Math.*, 565:183–205, 2003.
- [22] H. Ohta and K. Ono. Simple singularities and symplectic fillings. *J. Differential Geom.*, 69(1):1–42, 2005.
- [23] B. Ozbagci and A. I. Stipsicz. Contact 3-manifolds with infinitely many Stein fillings. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 132(5):1549–1558, 2004.
- [24] B. Ozbagci and A. I. Stipsicz. *Surgery on contact 3-manifolds and Stein surfaces*, volume 13 of *Bolyai Society Mathematical Studies*. Springer-Verlag, Berlin; János Bolyai Mathematical Society, Budapest, 2004.
- [25] P. Ozsváth and Z. Szabó. Heegaard Floer homology and contact structures. *Duke Math. J.*, 129(1):39–61, 2005.
- [26] O. Plamenevskaya and J. Van Horn-Morris. Planar open books, monodromy factorizations and symplectic fillings. *Geom. Topol.*, 14(4):2077–2101, 2010.
- [27] P. Seidel. *Fukaya categories and Picard-Lefschetz theory*. Zurich Lectures in Advanced Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2008.
- [28] A. Wand. Tightness is preserved by legendrian surgery. *Annals of Mathematics*, 182(2):723–738, 2015.
- [29] C. Wendl. Strongly fillable contact manifolds and J -holomorphic foliations. *Duke Math. J.*, 151(3):337–384, 2010.