

共形場理論とパンルヴェ方程式

名古屋 創 (金沢大学)*

2019年1月31日

1. Introduction

パンルヴェ方程式と共形場理論に関しては, 初期の発展についてレビュー [N1] を書いているため, ここでは, 繰り返しを避けて最近の我々の結果を中心に説明を行う.

19世紀初頭, 超幾何関数や楕円関数を超える特殊関数を得るために, P. Painlevé は 2 階の非線形常微分方程式を初期条件に依存する解の特異点は極のみであるという条件で分類し, 6 個の方程式を得た.

$$\begin{aligned} P_I \quad y'' &= 6y^2 + t, \\ P_{II} \quad y'' &= 2y^3 + ty + \alpha, \\ P_{III} \quad y'' &= \frac{1}{y}y'^2 - \frac{1}{y}y' + \frac{1}{t}(\alpha y^2 + \beta) + \gamma y^3 + \frac{\delta}{y}, \\ P_{IV} \quad y'' &= \frac{1}{2y}y'^2 + \frac{3}{2}y^3 + 4ty^2 + 2(t^2 - \alpha)y + \frac{\beta}{y}, \\ P_V \quad y'' &= \left(\frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1}\right)y'^2 - \frac{1}{t}y' + \frac{(y-1)^2}{t^2}\left(\alpha y + \frac{\beta}{y}\right) + \gamma \frac{y}{t} + \delta \frac{y(y+1)}{y-1}, \\ P_{VI} \quad y'' &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-t}\right)y'^2 - \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{y-t}\right)y' \\ &\quad + \frac{y(y-1)(y-t)}{t^2(t-1)^2}\left(\alpha + \beta \frac{t}{y^2} + \gamma \frac{t-1}{(y-1)^2} + \delta \frac{t(t-1)}{(y-t)^2}\right). \end{aligned}$$

ここで, $y = y(t), y' = dy/dt, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$.

パンルヴェ方程式は, ハミルトニアン系

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H_J}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H_J}{\partial q}, \quad (J = I, \dots, VI)$$

で表せることが知られており,

$$\frac{d}{dt} \log \tau_J = H_J$$

でタウ関数 τ_J が定義される.

パラメータを特殊化したときに, パンルヴェ方程式のタウ関数は超幾何関数で表示される. しかし, 超幾何級数のような明示的, 具体的な級数表示は長い間得られていなかった. 2012 年に [GIL] によって次の発見がされた. P_{VI} のタウ関数が 2 次元共型場理論の 4 点共形ブロックの無限和 (Fourier 変換と思える) で表示されるという発見である:

本研究は科研費 (課題番号:18K03326) の助成を受けたものである.

キーワード: Painlevé equations, conformal field theory

* 〒920-1192 石川県金沢市角間町 金沢大学 理工研究域
e-mail: nagoya@se.kanazawa-u.ac.jp

$$\tau_{\text{VI}}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} s^n C \left(\begin{matrix} \theta_1, \theta_t \\ \theta_\infty, \sigma + n, \theta_0 \end{matrix} \right) \mathcal{F} \left(\begin{matrix} \theta_1, \theta_t \\ \theta_\infty, \sigma + n, \theta_0 \end{matrix} ; t \right), \quad (1)$$

ただし $s, \sigma \in \mathbb{C}$ は初期条件に相当し, $\mathcal{F}(\theta, \sigma; t) = t^{\sigma^2 - \theta_t^2 - \theta_0^2} (1 + O(t))$ は中心荷電 c が 1 である 4 点共形ブロックである. 係数 C は

$$C(\theta, \sigma) = \frac{\prod_{\epsilon, \epsilon' = \pm} G(1 + \theta_t + \epsilon \theta_0 + \epsilon' \sigma) G(1 + \theta_1 + \epsilon \theta_\infty + \epsilon' \sigma)}{\prod_{\epsilon = \pm} G(1 + 2\epsilon \sigma)}$$

で与えられる. ここで, $G(z)$ は $G(z+1) = \Gamma(z)G(z)$ をみたす Barnes の G 関数である. AGT 対応 [AGT] により, 4 点共形ブロックは 4 次元ゲージ理論の Nekrasov 分配関数と一致し, 明示的な級数表示を持つ.

$$\mathcal{F} \left(\begin{matrix} \theta_1, \theta_t \\ \theta_\infty, \sigma + n, \theta_0 \end{matrix} ; t \right) = t^{\sigma^2 - \theta_0^2 - \theta_t^2} (1 - t)^{2\theta_0 \theta_1} \sum_{\lambda, \mu \in \mathbb{Y}} Z_{\lambda, \mu} \left(\begin{matrix} \theta_1, \theta_t \\ \theta_\infty, \sigma, \theta_0 \end{matrix} \right) t^{|\lambda| + |\mu|}. \quad (2)$$

ただし, $\mathbb{Y}$ はすべてのヤング図形からなる集合で,

$$Z_{\lambda, \mu} \left(\begin{matrix} \theta_1, \theta_t \\ \theta_\infty, \sigma, \theta_0 \end{matrix} \right) = \prod_{(i, j) \in \lambda} \frac{((\theta_t + \sigma + i - j)^2 - \theta_0^2)((\theta_1 + \sigma + i - j)^2 - \theta_\infty^2)}{h_\lambda^2(i, j)(\lambda'_j + \mu_i - i - j + 1 + 2\sigma)^2} \\ \times \prod_{(i, j) \in \mu} \frac{((\theta_t - \sigma + i - j)^2 - \theta_0^2)((\theta_1 - \sigma + i - j)^2 - \theta_\infty^2)}{h_\mu^2(i, j)(\mu'_j + \lambda_i - i - j + 1 - 2\sigma)^2}$$

である. ここで, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ($\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n > 0$), $|\lambda| = \sum_{i=1}^n \lambda_i$, λ' は λ の転置, $h_\lambda(i, j)$ はフック長で $h_\lambda(i, j) = \lambda_i + \lambda'_j - i - j + 1$ で定義される.

2015 年に [ILT] により, 退化場を挿入した Virasoro 代数の $c = 1$ の共形ブロックの Fourier 変換で P_{VI} および Garnier 系に付随する線形方程式のモノドロミー不変な基本解行列が構成された. タウ関数 τ_{VI} の表示 (1) はモノドロミー不変な基本解行列から得られる. また, [BS] では 2 つの Virasoro 代数の直和が super Virasoro 代数の部分代数になることを利用して, τ_{VI} の表示 (1) が双線形方程式を満たすことが示された. 2016 年には, タウ関数の Fredholm 行列式を展開することで τ_{VI} の表示 (1) が得られている [GL].

2. Irregular conformal blocks

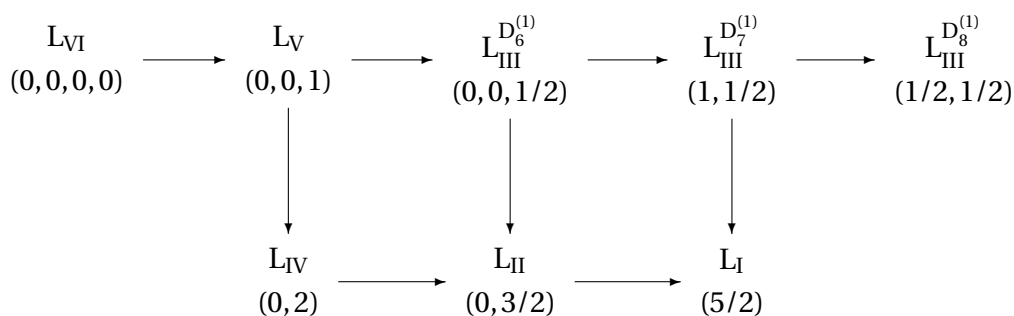
原点におけるタウ関数の級数展開の退化操作は容易に計算できて, P_{VI} のタウ関数の展開 (1), (2) と同様な展開が, P_{V} , P_{III} について得られる [GIL1]. この P_{V} , P_{III} のタウ関数の展開に使われる関数は, 不確定共形ブロックであり退化型 Nekrasov 分配関数である [G]. P_{IV} , P_{II} , P_{I} のタウ関数の級数展開については, 2012 年の [GIL] による発見の後しばらく結果が公表されていなかった. それは次の理由によると思われる. まず, パンルヴェ方程式のハミルトニアンもある非線形常微分方程式をみたすことに注意する [O]. タウ関数がある関数の Fourier 展開になっていると仮定してハミルトニアンがみたす微分方程式に代入すると, タウ関数の無限遠点における級数展開が初項から順に決定されていくことが観察される. この観察は 2016 年に提出された self-dual Omega 背景を持つ Argyres-Douglas 理論の双対分配関数とパンルヴェのタウ関数が一致するという予想に発展した [BLMST]. 一方で, P_{IV} , P_{II} , P_{I} のタウ関数の Fourier 展開には不確定共形ブロックが現れることが自然に推察されるので, ハミルトニアンのみたす微分方程式から決ま

る関数は不確定共形ブロックであるはずである. P_{IV} , P_{II} , P_I のタウ関数を無限遠点で展開したときには, 不確定特異点における展開となるので, 不確定特異点における展開である不確定共形ブロックが必要になる. 2012 年には通常の Virasoro 代数の確定特異点型の頂点作用素の退化操作が議論されていたが ([GT] の Appendix), [GT] には不確定共形ブロックの具体的な式が書かれていなかったため, ハミルトニアンのみたす微分方程式から決まる関数が不確定共形ブロックであるかどうか確認できなかったと思われる¹.

2015 年になって, Virasoro 代数の不確定頂点作用素が導入され, その期待値である不確定特異点における級数展開である (と期待される) 不確定共形ブロックを用いて, P_V , P_{IV} のタウ関数の無限遠点における展開が不確定共形ブロックの Fourier 変換であるという予想が提出された [N]. その後, [GT] で議論されていた確定頂点作用素の退化操作を正当化することで, P_V のタウ関数の無限遠点における Fourier 展開が P_{VI} の無限遠点における Fourier 展開の退化で得られることが示された [LNR]². 同様に P_{IV} のタウ関数の無限遠点における Fourier 展開が P_{VI} の無限遠点における Fourier 展開の退化で得られる.

P_{VI} に付随する線形方程式は 4 点の特異点を持つ 2 階の Fuchs 型方程式である. 共形ブロックを用いて, モノドロミー不変な基本解行列を構成するには, 5 点の共形ブロックで 1 点に退化場を挿入したものを使う必要があった. 退化場以外の 4 点が P_{VI} に付随する線形方程式の特異点に対応し, 退化場が挿入された点は線形方程式の独立変数に対応する. タウ関数の Fourier 展開には退化場をのぞいた 4 点共形ブロックが用いられた. 従って, パンルヴェ方程式のタウ関数の Fourier 展開に現れる共形ブロックの特異点の型はパンルヴェ方程式に付随する線形方程式の特異点の型に一致することが予想される.

パンルヴェ方程式に付随する線形方程式の退化図は次で与えられる (例えば [OO] を見よ):



ここで, かっこの中の数字は特異点における Poincaré rank を表す. 例えば, L_{VI} の組 $(0,0,0,0)$ は L_{VI} が 4 点の確定特異点を持つことを表す. P_{III} は 3 つの場合に分けた. $D_6^{(1)}$ などは対応するパンルヴェ方程式が得られる曲面に対応している [Sa1]. また $(1,1)$ 型の

¹ Lisovyy 氏によれば [ILT] における共同研究者で [GT] の著者の Tschner 氏にハミルトニアンのみたす微分方程式から決まる関数に相当する関数を不確定共形ブロックとして知っているかと聞いたところ, 知らないという答えだったとのこと.

² 2015 年の 9 月にフランスのトゥールに Lisovyy 氏を訪問したときから始まった共同研究. 前月に京都で立教大学の笈三郎氏が主催された可積分系の研究集会があり, そこで講演をさせていただいたときに, P_V のタウ関数の無限遠点における Fourier 展開は P_{VI} の無限遠点における Fourier 展開の退化で得られないんですかと質問された. 「計算がうまくいかないんです」と答えたときに前列に座っていたある方が首をかしげていたことが印象に残り, ホテルに戻ったときにもう一度計算したら, 具体例では共形ブロックの退化で不確定特異点における級数展開である不確定共形ブロックが得られることを確認できた. 9 月に Lisovyy 氏に話すと最初は信じてくれなかった. その後タウ関数についても退化操作が取れることがわかり, P_V のタウ関数の接続公式に関する予想も得た.

2 階の線形方程式のモノドロミー保存変形は $P_{\text{III}}^{D_6^{(1)}}$ を与え, (3) 型の 2 階の線形方程式のモノドロミー保存変形は P_{II} を与えることに注意する.

[N], [LNR] によって, P_V, P_{IV} のタウ関数が無限遠点において不確定共形ブロックを用いて Fourier 展開されることがわかった. $P_{\text{III}}^{D_6}, P_{\text{II}}$ の場合には, [N2] において, 分岐型の不確定頂点作用素の定義および不確定共形ブロックの定義が与えられ, タウ関数の無限遠点における Fourier 展開が不確定共形ブロックを用いて表せるという予想を提出した. 現段階では, 定義を満たす分岐型の不確定頂点作用素の存在及び一意性を証明することができず甚だ不完全である. 残りの $P_{\text{III}}^{D_7}, P_{\text{III}}^{D_8}, P_I$ のタウ関数の無限遠点における Fourier 展開に用いられる関数を不確定共形ブロック, すなわち Virasoro 代数の頂点作用素の期待値としてどのように記述すればよいかについては未解決問題である. さらに, P_V のタウ関数を無限遠点において Fourier 展開すると, 虚軸あるいは実軸で意味を持つ展開が得られる. 不確定共形ブロックを用いて表されることがわかっているのは, 虚軸で意味を持つ展開のみであり, 実軸で意味を持つ展開は不確定共形ブロックを用いて展開できるかわかっていない. 他の $P_{\text{IV}}, P_{\text{III}}^{D_7}, P_{\text{III}}^{D_8}, P_{\text{III}}^{D_8}, P_{\text{II}}, P_I$ のタウ関数についても事情は同じである.

3. CFT approach to the q -Painlevé VI equation

この節では, q 差分第六パインルヴェ方程式 (q -P_{VI}) の解を q -共形ブロックを用いて構成する [JNS] の結果を紹介する.

q -P_{VI} は次の差分方程式である.

$$\frac{y\bar{y}}{a_3 a_4} = \frac{(\bar{z} - t b_1)(\bar{z} - t b_2)}{(\bar{z} - b_3)(\bar{z} - b_4)}, \quad \frac{z\bar{z}}{b_3 b_4} = \frac{(y - t a_1)(y - t a_2)}{(y - a_3)(y - a_4)}. \quad (3)$$

ただし, $\bar{f}(t) = f(qt)$, $\underline{f}(t) = f(t/q)$. ここでパラメータを次のようにおく.

$$a_1 = q^{-2\theta_1-1}, \quad a_2 = q^{-2\theta_t-2\theta_1-1}, \quad a_3 = q^{-1}, \quad a_4 = q^{-2\theta_1-1}, \\ b_1 = q^{-\theta_0-\theta_t-\theta_1}, \quad b_2 = q^{\theta_0-\theta_t-\theta_1}, \quad b_3 = q^{\theta_\infty-1/2}, \quad b_4 = q^{-\theta_\infty-1/2}.$$

q -P_{VI} は 2×2 の線形方程式系

$$Y(qx, t) = A(x, t)Y(x, t), \quad A(x, t) = \frac{A_2 x^2 + A_1(t)x + A_0(t)}{(x - q^{-1})(x - tq^{-2\theta_1-1})}, \quad (4)$$

$$Y(x, qt) = B(x, t)Y(x, t), \quad B(x, t) = \frac{xI + B_0(t)}{x - tq^{-2\theta_t-2\theta_1}}, \quad (5)$$

$$A_2 = \text{diag}(q^{-\theta_\infty-1/2}, q^{\theta_\infty+1/2}), \quad A_0(t) = tq^{-3\theta_1-\theta_t-2}G(t) \cdot \text{diag}(q^{\theta_0}, q^{-\theta_0}) \cdot G(t)^{-1},$$

$$\det A(x, t) = \frac{(x - q^{-2\theta_1-1})(x - tq^{-2\theta_t-2\theta_1-1})}{(x - q^{-1})(x - tq^{-2\theta_1-1})}.$$

の両立条件から得られる [JS]. 両立条件は基本解行列 $Y(x, t)$ の 0 と ∞ の間の接続行列が t に依存しないこと (q シフトで不変) に同値であることから, connection 保存変形から q -P_{VI} が得られるともいう.

Ding-Iohara-Miki 代数の intertwiner の期待値から q -共形ブロックが得られる [AFS]:

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}\left(\begin{array}{ccccccc} \theta_m & \theta_{m-1} & \cdots & \theta_1 \\ \theta_{m+1} & \sigma_{m-1} & \sigma_{m-2} & \cdots & \sigma_1 & \theta_0 \end{array}; x_m, \dots, x_1\right) \\ &= \prod_{p=1}^m \mathcal{N}\left(\begin{array}{cc} \theta_p & \\ \sigma_p & \sigma_{p-1} \end{array}\right) q^{2\theta_p \sigma_p^2} \cdot \prod_{p=1}^m x_p^{\sigma_p^2 - \theta_p^2 - \sigma_{p-1}^2} \\ &\times \sum_{\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(m-1)}} \prod_{p=1}^{m-1} \left(\frac{q^{2\theta_p} x_p}{x_{p+1}}\right)^{|\lambda^{(p)}|} \cdot \frac{\prod_{p=1}^m \prod_{\epsilon, \epsilon'=\pm} N_{\lambda_{\epsilon}^{(p)}, \lambda_{\epsilon'}^{(p-1)}}(q^{\epsilon \sigma_p - \theta_p - \epsilon' \sigma_{p-1}})}{\prod_{p=1}^{m-1} \prod_{\epsilon, \epsilon'=\pm} N_{\lambda_{\epsilon}^{(p)}, \lambda_{\epsilon'}^{(p)}}(q^{\epsilon \sigma_p - \epsilon' \sigma_p})}. \end{aligned} \quad (6)$$

ここで $\sigma_0 = \theta_0, \sigma_m = \theta_{m+1}, \lambda^{(0)} = \lambda^{(m)} = (\emptyset, \emptyset)$ とおいた. 和はすべての $\lambda^{(p)} = (\lambda_+^{(p)}, \lambda_-^{(p)}) \in \mathbb{Y}^2, p = 1, \dots, m-1$. にとる. また,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}\left(\begin{array}{cc} \theta_2 & \\ \theta_3 & \theta_1 \end{array}\right) &= \frac{\prod_{\epsilon, \epsilon'=\pm} G_q(1 + \epsilon \theta_3 - \theta_2 - \epsilon' \theta_1)}{G_q(1 + 2\theta_3) G_q(1 - 2\theta_1)}, \\ N_{\lambda, \mu}(w) &= \prod_{\square \in \lambda} (1 - q^{-\ell_{\lambda}(\square) - a_{\mu}(\square) - 1} w) \prod_{\square \in \mu} (1 - q^{a_{\lambda}(\square) + \ell_{\mu}(\square) + 1} w). \end{aligned}$$

ここで, $G_q(x)$ は Barners の G 関数の q 類似であり, $a_{\lambda}(\square) = \lambda_i - j, \ell_{\lambda}(\square) = \lambda'_j - i$. 式 (6) は AGT 対応の q 類似とみなせる [AY], [Y].

$m = 2$ のときパラメータ θ_1, σ_1 を特殊化すると q -超幾何級数になり, 一般に同じ特殊化を θ_i, σ_i に施すことは, 点 x_i に退化場を挿入することに対応する. 退化場を挿入した共形ブロックの無限和でモノドロミー不変な関数を構成するには, 次の接続問題

$$\begin{aligned} & \begin{array}{c} \theta_m \quad \theta_{i+2} \quad \theta_{i+1} \quad \textcolor{red}{1/2} \quad \theta_{i-1} \quad \theta_1 \\ | \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \\ \theta_{\infty} \text{---} (x_m) \quad \cdots \quad (x_{i+2}) \quad \sigma_{i+1} \quad (x_{i+1}) \quad \sigma_{i-1} + \epsilon/2 \quad \textcolor{red}{(z)} \quad \sigma_{i-1} \quad (x_{i-1}) \quad \cdots \quad (x_1) \text{---} \theta_0 \end{array} \\ &= \sum_{\epsilon'=\pm 1} \begin{array}{c} \theta_m \quad \theta_{i+2} \quad \textcolor{red}{1/2} \quad \theta_{i+1} \quad \theta_{i-1} \quad \theta_1 \\ | \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \\ \theta_{\infty} \text{---} (x_m) \quad \cdots \quad (x_{i+2}) \quad \sigma_{i+1} \quad \textcolor{red}{(z)} \quad \sigma_{i+1} - \epsilon'/2 \quad (x_{i+1}) \quad \sigma_{i-1} \quad (x_{i-1}) \quad \cdots \quad (x_1) \text{---} \theta_0 \end{array} C_{\epsilon', \epsilon} \begin{bmatrix} \theta_{i+1} & 1/2 \\ \sigma_{i+1} & \sigma_{i-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

が解けていて, 接続行列がパラメータの整数シフトによらないことが本質的であった. 微分の場合は, Virasoro 代数を用いた共形ブロックの定義から, 超幾何関数の接続問題がすべての descendant に持ち上がるため, 上の公式が導かれる. 接続行列がパラメータの整数シフトによらないようにするためには, 適当に正規化すればよく, それが正規化因子 $\mathcal{N}(q \rightarrow 1)$ である.

q 差分の場合には, q -超幾何関数の接続問題が持ち上がるかどうかは q -共形ブロックの構成からは明らかでない. そこで, [JNS] では

$$\mathcal{F}\left(\begin{array}{cccc} \theta_2 & \frac{1}{2} & \theta_1 & \theta_t \\ \theta_3 & \theta_{\infty} & \theta_{\infty} + \frac{\epsilon}{2} & \sigma \end{array}; x_3, x_1, x_2, t\right)$$

の $t^{|\lambda|+|\mu|} x_3^{-|\alpha|-|\beta|}$ の係数 $X_{\lambda, \mu, \alpha, \beta}^{\epsilon}(\theta_{\infty}, \theta_1, \sigma, x_1, x_2)$ に対して, 隣接関係式

$$\begin{aligned} & C(\theta_{\infty}, \theta_1, \sigma, x_2) (q^{-\ell(\hat{\lambda}) - \epsilon \theta_{\infty} + \theta_1 + \sigma - 1/2} T_1 - 1) X_{\lambda, \mu, \alpha, \beta}^{\epsilon}(\theta_{\infty}, \theta_1, \sigma, x_1, x_2) \\ &= X_{\hat{\lambda}, \mu, \alpha, \beta}^{\epsilon}(\theta_{\infty}, \theta_1 - 1/2, \sigma - 1/2, x_1, x_2) \end{aligned}$$

が成り立つことを直接計算で示した. ここで, $C(\theta_\infty, \theta_1, \sigma, x_2)$ は x_1 によらない定数, T_1 は x_1 に関する q -シフト, すなわち, $T_1(f(x_1, x_2)) = f(qx_1, x_2)$. ヤング図形 $\hat{\lambda}$ は λ の各行に 1 つずつ箱を足したものである. 足す箱の数は, $\ell(\lambda)$ 以上でなければならない. 例えば,

$$\lambda = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline \end{array}, \quad \hat{\lambda} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline \end{array}$$

となる. 同様な式が μ, α, β にも成り立つ. $\lambda, \mu, \alpha, \beta$ がすべて空集合であるときは, 係数 $X_{\emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset}^\varepsilon(\theta_\infty, \theta_1, \sigma, x_1, x_2)$ は q -超幾何級数となるので, 上の隣接関係式は q -超幾何級数の隣接関係式

$$\frac{1 - q^\alpha T_1}{1 - q^\alpha} {}_{n+1}\phi_n \left(\begin{matrix} \alpha, \beta \\ \gamma \end{matrix}; q, x_1 \right) = {}_{n+1}\phi_n \left(\begin{matrix} \alpha + 1, \beta \\ \gamma \end{matrix}; q, x_1 \right)$$

を含む一般化である.

この隣接関係式により, q -超幾何関数の接続問題がすべての $t^{|\lambda|+|\mu|} x_3^{-|\alpha|-|\beta|}$ の係数の間の接続問題に持ち上がり, 接続行列がパラメータのシフト $(\theta_1, \sigma) \rightarrow (\theta_1 - 1/2, \sigma - 1/2)$ によらないことから, 退化場を挿入した q -共形ブロックの接続問題が解ける. 退化場を挿入した q -共形ブロックの適切な無限和の接続行列は t に依存しないので, 5 点 q -共形ブロックの無限和は q - P_{VI} が得られる線形方程式 (4), (5) の基本解行列を与える. 基本解行列から係数行列 $A(x, t)$, $B(x, t)$ が計算できることから次の定理を得る. まずタウ関数を次で定める.

$$\tau \left[\begin{matrix} \theta_1 & \theta_t \\ \theta_\infty & \theta_0 \end{matrix} \middle| s, \sigma, t \right] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} s^n t^{(\sigma+n)^2 - \theta_t^2 - \theta_0^2} C \left[\begin{matrix} \theta_1 & \theta_t \\ \theta_\infty & \theta_0 \end{matrix} \middle| \sigma + n \right] Z \left[\begin{matrix} \theta_1 & \theta_t \\ \theta_\infty & \theta_0 \end{matrix} \middle| \sigma + n, t \right].$$

ただし,

$$C \left[\begin{matrix} \theta_1 & \theta_t \\ \theta_\infty & \theta_0 \end{matrix} \middle| \sigma \right] = \frac{\prod_{\varepsilon, \varepsilon' = \pm} G_q(1 + \varepsilon \theta_\infty - \theta_1 + \varepsilon' \sigma) G_q(1 + \varepsilon \sigma - \theta_t + \varepsilon' \theta_0)}{G_q(1 + 2\sigma) G_q(1 - 2\sigma)},$$

$$Z \left[\begin{matrix} \theta_1 & \theta_t \\ \theta_\infty & \theta_0 \end{matrix} \middle| \sigma, t \right] = \sum_{\lambda = (\lambda_+, \lambda_-) \in \mathbb{Y}^2} t^{|\lambda|} \cdot \frac{\prod_{\varepsilon, \varepsilon' = \pm} N_{\emptyset, \lambda_{\varepsilon'}}(q^{\varepsilon \theta_\infty - \theta_1 - \varepsilon' \sigma}) N_{\lambda_\varepsilon, \emptyset}(q^{\varepsilon \sigma - \theta_t - \varepsilon' \theta_0})}{\prod_{\varepsilon, \varepsilon' = \pm} N_{\lambda_\varepsilon, \lambda_{\varepsilon'}}(q^{(\varepsilon - \varepsilon') \sigma})}.$$

さらに,

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \tau \left[\begin{matrix} \theta_1 & \theta_t \\ \theta_\infty + \frac{1}{2} & \theta_0 \end{matrix} \middle| s, \sigma, t \right], & \tau_2 &= \tau \left[\begin{matrix} \theta_1 & \theta_t \\ \theta_\infty - \frac{1}{2} & \theta_0 \end{matrix} \middle| s, \sigma, t \right], \\ \tau_3 &= \tau \left[\begin{matrix} \theta_1 & \theta_t \\ \theta_\infty & \theta_0 + \frac{1}{2} \end{matrix} \middle| s, \sigma + \frac{1}{2}, t \right], & \tau_4 &= \tau \left[\begin{matrix} \theta_1 & \theta_t \\ \theta_\infty & \theta_0 - \frac{1}{2} \end{matrix} \middle| s, \sigma - \frac{1}{2}, t \right], \\ \tau_5 &= \tau \left[\begin{matrix} \theta_1 - \frac{1}{2} & \theta_t \\ \theta_\infty & \theta_0 \end{matrix} \middle| s, \sigma, t \right], & \tau_6 &= \tau \left[\begin{matrix} \theta_1 + \frac{1}{2} & \theta_t \\ \theta_\infty & \theta_0 \end{matrix} \middle| s, \sigma, t \right], \\ \tau_7 &= \tau \left[\begin{matrix} \theta_1 & \theta_t - \frac{1}{2} \\ \theta_\infty & \theta_0 \end{matrix} \middle| s, \sigma + \frac{1}{2}, t \right], & \tau_8 &= \tau \left[\begin{matrix} \theta_1 & \theta_t + \frac{1}{2} \\ \theta_\infty & \theta_0 \end{matrix} \middle| s, \sigma - \frac{1}{2}, t \right]. \end{aligned}$$

と定める.

定理 3.1 ([JNS]). y と z を次で定める.

$$y = q^{-2\theta_1-1} t \cdot \frac{\tau_3 \tau_4}{\tau_1 \tau_2}, \quad z = \frac{\tau_1 \tau_2 - \tau_1 \tau_2}{q^{1/2+\theta_\infty} \tau_1 \tau_2 - q^{1/2-\theta_\infty} \tau_1 \tau_2}$$

このとき, y と z は q -P_{VI} (3) の解となる. □

[Sa] では q -超幾何関数を成分とする行列式がみたす双線形方程式をもとに, q -P_{VI} の超幾何解が構成された. [TM] においては, $D_5^{(1)}$ の weight lattice 上の関数として q -P_{VI} のタウ関数が導入され, それらのタウ関数がみたす双線形方程式が導かれた. 我々のタウ関数も双線形方程式を満たすことが期待される. 実際, 次の予想を得た.

予想 3.2 ([JNS]). 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} \tau_1 \tau_2 - q^{-2\theta_1} t \tau_3 \tau_4 - (1 - q^{-2\theta_1} t) \tau_5 \tau_6 &= 0, \\ \tau_1 \tau_2 - t \tau_3 \tau_4 - (1 - q^{-2\theta_t} t) \tau_5 \tau_6 &= 0, \\ \tau_1 \tau_2 - \tau_3 \tau_4 + (1 - q^{-2\theta_1} t) q^{2\theta_t} \tau_7 \tau_8 &= 0, \\ \tau_1 \tau_2 - q^{2\theta_t} \tau_3 \tau_4 + (1 - q^{-2\theta_t} t) q^{2\theta_t} \tau_7 \tau_8 &= 0, \\ \tau_5 \tau_6 + q^{-\theta_1-\theta_\infty+\theta_t-1/2} t \tau_7 \tau_8 - \tau_1 \tau_2 &= 0, \\ \tau_5 \tau_6 + q^{-\theta_1+\theta_\infty+\theta_t-1/2} t \tau_7 \tau_8 - \tau_1 \tau_2 &= 0, \\ \tau_5 \tau_6 + q^{\theta_0+2\theta_t} \tau_7 \tau_8 - q^{\theta_t} \tau_3 \tau_4 &= 0, \\ \tau_5 \tau_6 + q^{-\theta_0+2\theta_t} \tau_7 \tau_8 - q^{\theta_t} \tau_3 \tau_4 &= 0. \end{aligned}$$

さらに, q -P_{VI} の解 y, z は次のように表示される.

$$y = q^{-2\theta_1-1} t \cdot \frac{\tau_3 \tau_4}{\tau_1 \tau_2}, \quad z = -q^{\theta_t-\theta_1-1} t \cdot \frac{\tau_7 \tau_8}{\tau_5 \tau_6}.$$

□

線形方程式 (4), (5) からタウ関数のみたす双線形方程式が得られる. 例えば,

$$\tau_1 \tau_2 - \tau_1 \tau_2 = \frac{q^{1/2+\theta_\infty} - q^{1/2-\theta_\infty}}{q^{-\theta_0} - q^{\theta_0}} q^{-\theta_1-1} t (\tau_3 \tau_4 - \tau_3 \tau_4). \quad (7)$$

しかし, 線形方程式から得られる双線形方程式で, 予想 3.2 の双線形方程式が再現できるかはわかっていない.

予想 3.2 の双線形方程式は退化操作

$$P(A_3^{(1)}) \longrightarrow P(A_4^{(1)}) \longrightarrow P(A_5^{(1)}) \longrightarrow P(A_6^{(1)}) \longrightarrow P(A_7^{(1)})$$

をタウ関数の Fourier 展開の構造を壊さずに行うことができる [MN]. ここで, q 差分パウルヴェ方程式が得られる曲面の型に対応して, $P(A_i^{(1)})$ と書いている. $P(A_3^{(1)})$ が q -P_{VI} である. $q \rightarrow 1$ で上の q -差分パウルヴェ方程式のタウ関数は, それぞれ

$$P_{VI} \longrightarrow P_V \longrightarrow P_{III}^{D^{(1)}} \longrightarrow P_{III}^{D^{(1)}} \longrightarrow P_{III}^{D^{(1)}}$$

のタウ関数に退化する. 予想 3.2 の双線形方程式の退化で得られる $P(A_5^{(1)})$ の双線形方程式の一つは, 双線形方程式 (7) の退化と一致し, 他の双線形方程式も $P(A_5^{(1)})$ の対称性と定理 3.1 の退化で得られる $P(A_5^{(1)})$ に対する定理から得られ, したがって, $P(A_6^{(1)})$, $P(A_7^{(1)})$ のタウ関数も 3.2 から得られる双線形方程式をみたすことが導かれる [MN]. $P(A_7^{(1)})$ のタウ関数及び双線形方程式は, [BS1] で得られていたものと一致する.

双線形方程式は Schlesinger 変換, すなわち線形方程式 (4) の基本解行列のパラメータ θ_i たちのシフト, から得られる. 得られた双線形方程式の極限 $q \rightarrow 1$ をとると [Su] で得られた広田・三輪型の双線形方程式 ((3.46) in [Su]) になる.

定理 3.1 の成立には, q -共形ブロックの Fourier 変換で構成される基本解行列が適当な領域で絶対収束することを仮定している. 共形ブロックの Fourier 変換が収束することの証明は与えられておらず, 未解決問題である.

4. Connection problem for the generalized hypergeometric function and its application

この節では, Fuji-Suzuki-Tsuda 系に対する [GIL2] の結果を紹介し, その後 [MN1] の結果を紹介する.

[GIL2] ではスペクトルタイプが,

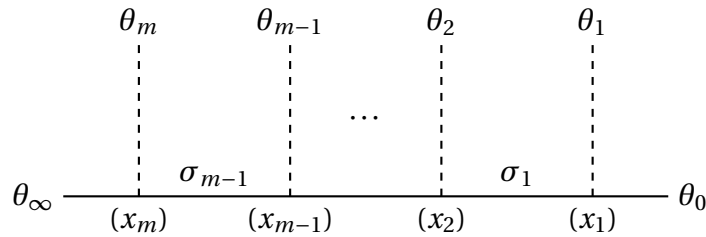
$$(1^n), (1^n), (n-1, 1), \dots, (n-1, 1)$$

である Fuchs 型方程式

$$\frac{dY}{dz} = \sum_{i=0}^m \frac{A_i}{z - x_i} Y \quad (x_0 = 0, A_i \in M(n, \mathbb{C})) \quad (8)$$

のモノドロミー不変な基本解を中心荷電 c が $n-1$ である W 代数の共形ブロックのフーリエ変換として構成した. 留数行列 A_i ($1 \leq i \leq m$) の固有値の重複度を $(n-1, 1)$ とし, 原点と無限遠点における留数行列 A_0, A_∞ の固有値の重複度を (1^n) とする. 上記のタイプの Fuchs 型方程式のモノドロミー保存変形を記述する非線形微分方程式は, 藤・鈴木, 鈴木による Drinfeld-Sokolov 階層の相似簡約 [FS], [Su1], 津田による UC 階層の相似簡約 [T1] によって得られた Painlevé 系と一致し, Fuji-Suzuki-Tsuda 系と呼ばれる. [Su2], [T] では, Fuji-Suzuki-Tsuda 系が一般化超幾何関数およびその多変数化を特殊解に持つことが明らかにされた.

以下では, $c = n-1$ とする. [GIL2] で使われた $m+2$ 点共形ブロックは, 次のように図示される.



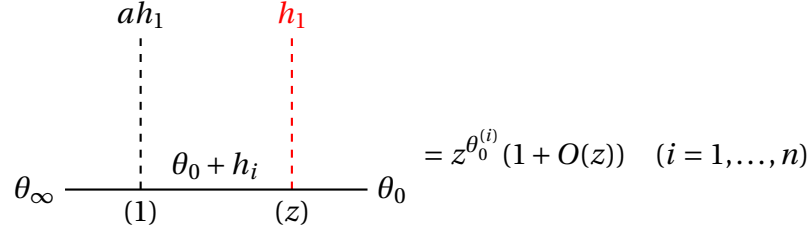
ここで, $\theta_1, \dots, \theta_m \in \mathbb{C}$, $\theta_0, \theta_\infty, \sigma_1, \dots, \sigma_{m-1} \in \mathbb{C}^n$. ただし, θ_0 等はすべての成分の和は 0 であるベクトルである. これは Fuchs 型方程式 (8) の確定特異点 $x_1, \dots, x_m$ における留数行列 A_i の固有値の重複度が $(n-1, 1)$ であり, 原点と無限遠点における留数行列 A_0, A_∞

の固有値の重複度が (1^n) であることに対応している. $n \geq 3$ であるときは, 一般に W 代数の共形ブロックは Ward 恒等式から一意的に決定されないが, 上図のように, 頂点作用素の共形次元の一つを $\theta = ah_1$ ($a \in \mathbb{C}$) と取っておけば一意的に決定される [GIL2]. ここで, h_i ($i = 1, \dots, n$) は

$$h_i^{(j)} = \delta_{ij} - \frac{1}{n}$$

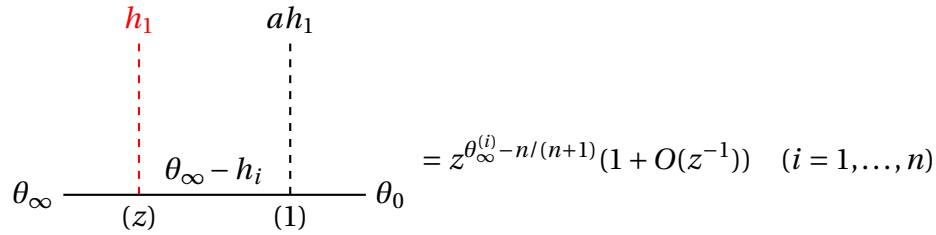
で定義されるものである.

$\theta = h_1$ とさらに特殊化したとき, 4 点共形ブロック



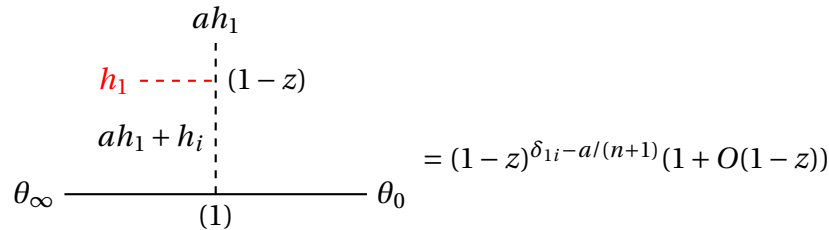
$$= z^{\theta_0^{(i)}} (1 + O(z)) \quad (i = 1, \dots, n)$$

が一般化超幾何微分方程式 $_{n+1}E_n$ (を適当にゲージ変換したもの) の $z = 0$ における基本解系を与え,



$$= z^{\theta_\infty^{(i)} - n/(n+1)} (1 + O(z^{-1})) \quad (i = 1, \dots, n)$$

が $z = \infty$ における基本解系を与える. $z = 1$ における基本解系は



$$= (1-z)^{\delta_{1i} - a/(n+1)} (1 + O(1-z))$$

で与えられる. 指数は次のように計算している. $\Delta_\theta = \sum_{i=1}^n (\theta^{(i)})^2 / 2$ として, $z = 0$ のまわりであれば, 指数は $\Delta_{\theta_0 + h_i} - \Delta_{h_1} - \Delta_{\theta_0}$ であり, $z = \infty$ のまわりであれば, 指数は $\Delta_{\theta_\infty} - \Delta_{h_1} - \Delta_{\theta_\infty - h_i}$ であり, $z = 1$ のまわりであれば, 指数は $\Delta_{ah_1 + h_i} - \Delta_{h_1} - \Delta_{ah_1}$ である. 上図のように h_1 を差し込むことを退化条件を課す, あるいは退化場を考えるとということにする.

一般化超幾何微分方程式の $z = 0$ における基本解系と $z = \infty$ における基本解系の接続公式は Γ 関数を用いて明示的に表示されることは昔から知られていた. 故に $m + 2$ 点共

形ブロックで 1 点に退化条件を課しているとき, 次の形の接続問題

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccccccc}
 a_m h_1 & & a_{i+2} h_1 & & a_{i+1} h_1 & & h_1 & & a_{i-1} h_1 & & a_1 h_1 \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 \theta_\infty & (x_m) & (x_{i+2}) & (x_{i+1}) & (z) & (x_{i-1}) & (x_1) & \theta_0
 \end{array} \\
 \\
 = \sum_{k=1}^n \begin{array}{ccccccc}
 a_m h_1 & & a_{i+2} h_1 & & h_1 & & a_{i+1} h_1 & & a_{i-1} h_1 & & a_1 h_1 \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 \theta_\infty & (x_m) & (x_{i+2}) & (z) & (x_{i+1}) & (x_{i-1}) & (x_1) & \theta_0
 \end{array} \quad C_{kj} \begin{bmatrix} a_{i+1} & h_1 \\ \sigma_{i+1} & \sigma_{i-1} \end{bmatrix}
 \end{array}$$

が解けていることになる. 共形ブロックを適当に正規化すれば, 接続行列が $\omega \in \mathbb{Z}^n$ ($\sum_{i=1}^n \omega^{(i)} = 0$) のシフトで不変になるから, 無限和

$$Y_{ij}(z, t) = \sum_{\omega} e^{(\omega, \rho)/n} \begin{array}{ccccccc}
 & & h_1 & & a_2 h_1 & & a_1 h_1 \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 \theta_\infty + h_i & (z) & \theta_\infty + h_i - h_j & (1) & \sigma + \omega & (t) & \theta_0
 \end{array}$$

を考えると, $Y(z, t) = (Y_{i,j}(z, t))_{1 \leq i, j \leq n}$ は $m=2$ の (8) のモノドロミー不変な基本解行列となる. ここで, 和はすべての $\omega \in \mathbb{Z}^n$ ($\sum_{i=1}^n \omega^{(i)} = 0$) で取る. 以上が [GIL2] における結果である.

[GIL2] におけるモノドロミー不変な基本解行列の構成には, 一般化超幾何関数の特異点 0 と 1 の間の接続公式は用いられていない. 彼らの結果より, 0 と 1 の間の接続行列も適当な正規化で ω のシフトで不変になり, $z=t$ あるいは $z=1$ における基本解も共形ブロックの Fourier 変換で表されることが期待される.

一般化超幾何関数の ${}_nF_{n-1}(z)$ の特異点 0 と 1 の間の接続問題について, $n=3$ のとき, すなわち ${}_3F_2(z)$ の接続問題は [M] で解かれている. $n \geq 4$ のときの $z=1$ における非正則解を $z=0$ における基本解系で表す結果 [OTY], [W], [M1] はあるものの 0 と 1 の間の基本解系の接続公式の具体形を述べた結果を文献に見つけることができなかった. 一般的にも Fuchs 型方程式の確定特異点 x_i における解空間を特性指数で固有空間分解 $U^{(i)} = \oplus_{\alpha} V_{\alpha}^{(i)}$ したとき, $\dim(V_{\alpha}^{(i)}) \geq 2$ の元に対する接続係数は, 基底の選び方の問題もあり, あまり知られていないようである. $\dim(V_{\alpha}^{(i)}) = 1, \dim(V_{\beta}^{(j)}) = 1$ の元同士の接続係数を決定する問題は 大島 [Os] によって解決されている.

[MN1] では, Cauchy の積分定理を用いて, 接続公式を得るという手法 [M], [HM], [BHS] を用いて, 一般化超幾何関数 ${}_nF_{n-1}(z)$ の $z=0$ における基本解系と $z=1$ における基本解系の間の接続行列を解いた. 一般に n 階の (rigid) Fuchs 型方程式の接続問題を解の積分表示と Cauchy の積分定理を用いて解こうとすると, 解くべき線形方程式が多すぎてどうしたらよいかわからないが³, ${}_nF_{n-1}(z)$ の場合には次のようにしてうまくいった. [M1] において, $z < 0$ としたときに, $z=0$ と $z=\infty$ の基本解系を与える積分領域 $D_i^{(0)}, D_i^{(\infty)}$ ($i=1, \dots, n$) が記述されて, それらに対応する積分表示の間の関係式が与えられている.

³ もちろん具体的な n に関しては, コンピュータで計算できる限り接続問題は解ける.

また, $0 < z < 1$ としたときに, $z = 0$ の基本解系を与える積分領域 $\tilde{D}_i^{(0)}$ と $z = 1$ の非正則解を与える積分領域が記述され, それらに対応する積分表示の間の関係式が与えられている. 実は, [M1] で述べられている積分領域に関しては, $z < 0$ における積分領域 $D_i^{(0)}$ を $0 < z < 1$ に解析接続すると $0 < z < 1$ における積分領域 $\tilde{D}_i^{(0)}$ になっている. このことに注目して, $z < 0$ における $D_i^{(\infty)}$ を $D_j^{(0)}$ で表した式を $0 < z < 1$ に解析接続する. すると, $D_i^{(\infty)}$ ($i = 1, \dots, n-1$) の解析接続がちょうど $z = 1$ における正則解と $\tilde{D}_j^{(0)}$ で表されることが計算できて, $\sin$ で接続係数がかけることがわかる. なお, $z < 0$ における $D_i^{(0)}$ を $D_j^{(\infty)}$ で表した式を $0 < z < 1$ に解析接続した場合は, うまく計算できる方法がわかっていない.

最後に, [MN1] の主結果を述べる. 一般化超幾何級数は

$${}_{n+1}F_n \left(\begin{matrix} \alpha_1, \dots, \alpha_{n+1} \\ \beta_1, \dots, \beta_n \end{matrix}; z \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_k \cdots (\alpha_{n+1})_k}{(\beta_1)_k \cdots (\beta_n)_k k!} z^k$$

である. ただし, $a \in \mathbb{C}$ に対して

$$(a)_k = \begin{cases} 1 & (k = 0) \\ a(a+1) \cdots (a+k-1) & (k \in \mathbb{Z}_{>0}) \end{cases}$$

と定める. 一般化超幾何級数は一般化超幾何微分方程式 ${}_{n+1}E_n$

$$\left\{ \delta_z \left\{ \prod_{l=1}^n (\delta_z + \beta_l - 1) \right\} - z \left\{ \prod_{l=1}^{n+1} (\delta_z + \alpha_l) \right\} \right\} F = 0$$

をみたす. ここで $\delta_z = z(d/dz)$ である. 一般化超幾何微分方程式 ${}_{n+1}E_n$ の解を一般化超幾何関数という. 以下, $\alpha_i - \alpha_j, \beta_i - \beta_j \notin \mathbb{Z}$ ($1 \leq i < j \leq n+1$) を仮定する. 一般化超幾何微分方程式は $z = 0, 1, \infty$ を確定特異点に持ち, その Riemann Scheme は

$$\left(\begin{array}{ccc} z=0 & z=1 & z=\infty \\ 1-\beta_1 & \sum_{i=1}^n \beta_i - \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i & \alpha_1 \\ 1-\beta_2 & 0 & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1-\beta_n & 0 & \alpha_n \\ 0 & 0 & \alpha_{n+1} \end{array} \right)$$

で与えられる.

$t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{C}^n$ として,

$$T_z = \mathbb{C}^n - \bigcup_{i=1}^n \{t_i = 0\} \cup \bigcup_{i=1}^{n+1} \{t_{i-1} - t_i = 0\}$$

上定義される関数

$$u(t) = \prod_{i=1}^n t_i^{\lambda_i} \prod_{i=1}^{n+1} (t_{i-1} - t_i)^{\mu_i}$$

を考える. ただし

$$\begin{aligned} t_0 &= 1, \quad t_{n+1} = z, \\ \lambda_i &= \alpha_{i+1} - \beta_i \quad (1 \leq i \leq n), \\ \mu_i &= \beta_i - \alpha_i - 1 \quad (1 \leq i \leq n+1), \\ \beta_{n+1} &= 1. \end{aligned}$$

$z \in \mathbb{C}$ を $z < 0$ を満たす実数として固定し, $T_{\mathbb{R}}$ の部分集合として

$$\begin{aligned} D_i^{(0)} &= \{(t_1, \dots, t_n) \mid z < t_n < \dots < t_i < 0, 1 < t_1 < \dots < t_{i-1} < +\infty\} \quad (1 \leq i \leq n+1), \\ D_i^{(\infty)} &= \{(t_1, \dots, t_n) \mid -\infty < t_i < \dots < t_n < z, 0 < t_{i-1} < \dots < t_1 < 1\} \quad (1 \leq i \leq n+1) \end{aligned}$$

をとる. 実領域 D 上で関数 $u(t)$ の分枝 (のスカラー倍) を次のように取る. $u_D(t) = \prod_{i=1}^m (\epsilon_i f_i(t))^{\alpha_i}$ としたとき, $\epsilon_i f_i(t) > 0$ となるように $\epsilon_i \in \{1, -1\}$ をとり, 偏角を 0 となるようにとる. このような分枝のとり方を **standard loading** とよぶ. 以下では, 積分 $\int_D u_D(t) dt$ と積分領域 D を同一視する. 積分の収束に必要な条件は省く. $s(A) = \sin(\pi A)$ とおく.

命題 4.1 ([M1]). $1 \leq i, j \leq n+1$ に対して, $\alpha_i - \beta_j \notin \mathbb{Z}$, $\beta_i - \beta_j \notin \mathbb{Z}$ ($i \neq j$) を仮定する. このとき, $1 \leq i \leq n+1$ に対して

$$D_i^{(\infty)} = \sum_{1 \leq j \leq n+1} \frac{s(\beta_i - \alpha_i)}{s(\beta_j - \alpha_i)} \prod_{\substack{1 \leq k \leq n+1, \\ k \neq j}} \frac{s(\alpha_k - \beta_j)}{s(\beta_k - \beta_j)} \times D_j^{(0)}$$

が成り立つ. □

次に, $z \in \mathbb{C}$ を $0 < z < 1$ を満たす実数として固定し, $T_{\mathbb{R}}$ の部分集合として

$$\begin{aligned} \tilde{D}_i^{(0)} &= \{(t_1, \dots, t_n) \mid 0 < t_i < \dots < t_n < z, 1 < t_1 < \dots < t_{i-1} < +\infty\} \quad (1 \leq i \leq n+1), \\ \tilde{D}_i^{(1)} &= \{(t_1, \dots, t_n) \mid -\infty < t_i < \dots < t_n < 0, 0 < t_{i-1} < \dots < t_1 < 1\} \quad (1 \leq i \leq n), \\ \tilde{D}_{n+1}^{(1)} &= \{(t_1, \dots, t_n) \mid z < t_n < \dots < t_1 < 1\} \end{aligned}$$

をとる. $\tilde{D}_i^{(1)}$ が正則解を与える積分領域であることは明らか.

命題 4.2 ([M1]). $1 \leq i, j \leq n+1$ に対して, $\alpha_i - \beta_j \notin \mathbb{Z}$, $\beta_i - \beta_j \notin \mathbb{Z}$ ($i \neq j$) を仮定する. このとき,

$$\tilde{D}_{n+1}^{(1)} = \sum_{1 \leq j \leq n+1} \prod_{\substack{1 \leq k \leq n+1, \\ k \neq j}} \frac{s(\alpha_k - \beta_j)}{s(\beta_k - \beta_j)} \times \tilde{D}_j^{(0)}$$

が成り立つ. □

定理 4.3 ([MN1]). $1 \leq i, j \leq n+1$ に対して, $\alpha_i - \beta_j \notin \mathbb{Z}$, $\beta_i - \beta_j \notin \mathbb{Z}$ ($i \neq j$) を仮定する. このとき, $1 \leq i \leq n$ に対して

$$\tilde{D}_i^{(1)} = \sum_{1 \leq j \leq n+1} \frac{s(\beta_i - \alpha_i) s(\alpha_{n+1})}{s(\beta_j - \alpha_i) s(\beta_j - \alpha_{n+1})} \prod_{\substack{1 \leq k \leq n+1, \\ k \neq j}} \frac{s(\alpha_k - \beta_j)}{s(\beta_k - \beta_j)} \times \tilde{D}_j^{(0)}$$

が成り立つ. □

命題 4.2 と定理 4.3 より

$$\left(\tilde{D}_1^{(1)}, \dots, \tilde{D}_{n+1}^{(1)} \right) = \left(\tilde{D}_1^{(0)}, \dots, \tilde{D}_{n+1}^{(0)} \right) C \quad (C \in M(n+1, \mathbb{C}))$$

を得る. $\det(C) \neq 0$ であることが直接確認できるので, $\{\tilde{D}_1^{(1)}, \dots, \tilde{D}_{n+1}^{(1)}\}$ は $z=1$ における基本解系を与える. パラメータ α_i, β_j を共形ブロックのパラメータに変換して調べる

と, $\omega \in \mathbb{Z}^{n+1}$ のシフトに関して不変であることも確かめられる. ω によるシフトは, 局所モノドロミーを変えないようなパラメータの変換とみなせるので, Fuchs 型方程式の接続行列は基本解系を適切に取るとき, 局所モノドロミーを変えない変換で不変であると予想される. 積分表示から, Cauchy の積分定理を用いて接続行列を求めると, 係数は $\exp(\pi i A)$ の形だから, $\omega \in (2\mathbb{Z})^{n+1}$ のシフトで不変なことは自明であることに注意する.

参考文献

- [AFS] H. Awata, B. Feigin and J. Shiraishi, *Quantum algebraic approach to refined topological vertex*, JHEP **2012** (2012) 041
- [AGT] L. F. Alday, D. Gaiotto and Y. Tachikawa, *Liouville Correlation Functions from Four-dimensional Gauge Theories*, Lett. Math. Phys. **91**, 167–197 (2010) [arXiv:0906.3219].
- [AY] H. Awata and Y. Yamada, *Five-dimensional AGT conjecture and the deformed Virasoro algebra*, JHEP **1001** (2010) 125
- [BHS] V. Belavin, Y. Haraoka and R. Santachiara, *Rigid Fuchsian Systems in 2-Dimensional Conformal Field Theories*, Commun. Math. Phys. **365** (2019) 17–60
- [BLMST] G. Bonelli, O. Lisovyy, K. Maruyoshi, A. Sciarappa, and A. Tanzini, *On Painlevé/gauge theory correspondence*, arXiv:1612.06235
- [BS] M. Bershtein and A. Shchepochkin, *Bilinear equations on Painlevé τ functions from CFT*, Commun. Math. Phys. **339** (2015) 1021–1061
- [BS1] M. Bershtein and A. Shchepochkin, *q -deformed Painlevé τ function and q -deformed conformal blocks*, J. Phys. A: Math. Theor. **50** (2017) 085202, 22p
- [FM] G. Felder and M. Müller-Lennert, *Analyticity of Nekrasov Partition functions*, arXiv:1709.05232
- [FS] K. Fuji and T. Suzuki, *Drinfeld-Sokolov hierarchies of type A and fourth order Painlevé systems*, Funkcial. Ekvac. **53** (2010), 143–167
- [G] D. Gaiotto, *Asymptotically free $\mathfrak{N} = 2$ theories and irregular conformal blocks*, J. Phys. Conference series **462** (2013) 012014, arXiv:0908.0307
- [GL] P. Gavrylenko and O. Lisovyy, *Fredholm determinant and Nekrasov sum representations of isomonodromic tau functions*, arxiv:1608.00958
- [GT] D. Gaiotto and J. Teschner, *Irregular singularities in Liouville theory and Argyres-Douglas type gauge theories, I*, arXiv: 1203.1052
- [GIL] O. Gamayun, N. Iorgov and O. Lisovyy, *Conformal field theory of Painlevé VI*, JHEP **2012** (2012) 38
- [GIL1] O. Gamayun, N. Iorgov and O. Lisovyy, *How instanton combinatorics solves Painlevé VI, V and IIIs*, J. Phys. A: Math. Theor. **46** (2013) 335203
- [GIL2] P. Gavrylenko, N. Iorgov, O. Lisovyy, *Higher rank isomonodromic deformations and W-algebras*, arXiv:1801.09608
- [GIL3] P. Gavrylenko, N. Iorgov, O. Lisovyy, *On solutions of the Fuji-Suzuki-Tsuda system*, arXiv:1806.08650
- [HM] Y. Haraoka and K. Mimachi, *A Connection Problem for Simpson's Even Family of Rank Four*, Funkcialaj Ekvacioj **54** (2011) 495–515
- [ILT] N. Iorgov, O. Lisovyy and J. Teschner, *Isomonodromic tau-functions from Liouville conformal blocks*, Commun. Math. Phys. **336** (2015) 671–694
- [ILT1] A. Its, O. Lisovyy and Y. Tykhyy, *Connection Problem for the Sine-Gordon/Painlevé III Tau Function and Irregular Conformal Blocks*, International Mathematics Research Notices, Volume 2015, Issue 18, 1 January 2015, 8903–8924
- [JNS] M. Jimbo, H. Nagoya and H. Sakai, *CFT approach to the q -Painlevé VI equation*, Journal of

- [JS] M. Jimbo and H. Sakai, *A q -analog of the sixth Painlevé equation*, Lett. Math. Phys. **38** (1996) 145–154
- [KNY] K. Kajiwara, M. Noumi and Y. Yamada, *Geometric aspects of Painlevé equations*, J. Phys. A: Math. Theor. **50** (2017) 073001
- [LNR] O. Lisovyy, H. Nagoya and J. Roussillon, *Irregular conformal blocks and connection formulae for Painlevé V functions*, J. Math. Phys. **59**, 091409 (2018) arXiv:1806.08344
- [MN] Y. Matsuhira and H. Nagoya, *Combinatorial expressions for the tau functions of q -Painlevé V and III equations*, arXiv:1811.03285
- [MN1] Y. Matsuhira and H. Nagoya, *Connection problem for the generalized hypergeometric function and its application*, in preparation
- [M] K. Mimachi, *Connection Matrices Associated with the Generalized Hypergeometric Function ${}_3F_2$* , Funkcialaj Ekvacioj **51** (2008), 107–133
- [M1] K. Mimachi, *Intersection Numbers for Twisted Cycles and the Connection Problem Associated with the Generalized Hypergeometric Function ${}_{n+1}F_n$* , International Mathematics Research Notices, Vol.2011, No.8, 1757–1781
- [N] H. Nagoya, *Irregular conformal blocks, with an application to the fifth and fourth Painlevé equations*, J. Math. Phys. **56** (2015) 123505
- [N1] H. Nagoya, *Conformal blocks and Painlevé functions*, arXiv:1611.08971, submitted to RIMS Kokyuroku Bessatsu
- [N2] H. Nagoya, *Remarks on irregular conformal blocks and Painlevé III and II tau functions*, The proceedings of 'Meeting for Study of Number theory, Hopf algebras and related topics, Toyama, 12–15 February 2017', arXiv:1804.04782
- [OO] Y. Ohyaama and S. Okumura: *A coalescent diagram of the Painlevé equations from the viewpoint of isomonodromic deformations*, J. Phys. A: Math. Gen. **39** (2006), 12129–12151.
- [OTY] K. Okubo, K. Takano and S. Yoshida, *A connection problem for the generalized hypergeometric equation*, Funkcialaj Ekvacioj **31** (1988) 483–495
- [O] K. Okamoto, パンルヴェ方程式, 岩波書店, (2009)
- [Os] T. Oshima, *Classification of Fuchsian systems and their connection problem*, (2008), arXiv:0811.2916
- [Sa] H. Sakai, *Casorati determinant solutions for the q -difference sixth Painlevé equation*, Nonlinearity **11** (1998) 823–833
- [Sa1] H. Sakai, *Rational surfaces associated with affine root systems and geometry of Painlevé equations*, Commun. Math. Phys. **220** (2001) 165–229
- [Su] T. Suzuki, *Affine Weyl Group Symmetry of the Garnier System*, Funkcialaj Ekvacioj, **48** (2005) 203–230
- [Su1] T. Suzuki, *A class of higher order Painlevé systems arising from integrable hierarchies of type A* , Contemp. Math. arXiv:1002.2685
- [Su2] T. Suzuki, *A Particular Solution of a Painlevé System in Terms of the Hypergeometric Function ${}_{n+1}F_n$* , SIGMA **6** (2010), 078, (11pp)
- [T] T. Tsuda, *Hypergeometric solution of a certain polynomial Hamiltonian system of isomonodromy type*, Quart. J. Math. **63** (2010), 489–505
- [T1] T. Tsuda, *UC hierarchy and monodromy preserving deformation*, J. reine angew. Math.
- [TM] T. Tsuda and T. Masuda, *q -Painlevé VI equation arising from q -UC hierarchy*, Commun. Math. Phys. **262** (2006) 595–609
- [Y] S. Yanagida, *Norm of the Whittaker vector of the deformed Virasoro algebra*, arXiv:1411.0462.
- [W] E. Winkler, *Über die hypergeometrische differentialgleichung n^{ter} ordnung mit zwei endlichen*

singulären punkten, Inaugural-Dissertation, Universität Munchen, 1930