

Affine Yangians and integrable systems

小寺 諒介 (神戸大学 大学院理学研究科)

1. はじめに

この講演では、ヤングアンの表現論と可積分系との接点として次の二つのトピックについて述べる。

- ヤングアンとスピン Calogero-Sutherland モデル
- ヤングアンと Coulomb 枝

スピン Calogero-Sutherland モデルの持つヤングアン対称性は 90 年代に集中的に研究された話題である。ヤングアンの表現論を用いたアプローチは [U] にまとめられている。[U] において Uglov は粒子数 $n \rightarrow \infty$ の極限の考察をし、フェルミオン Fock 空間にヤングアン $Y(\mathfrak{gl}_N)$ が作用することを示した。現在の視点では、Fock 空間はアフィンヤングアン $Y(\hat{\mathfrak{gl}}_N)$ の最も基本的な表現と見るのが自然である。

Coulomb 枝の数学的研究は、[Nak] とそれに続く [BFN1] によって始められた。簾の表現に付随して定義される Coulomb 枝の量子化はヤングアンの変種と関係している。ここでは ADE 型簾の場合と Jordan 簾の場合の結果を紹介する。より一般のアフィン型についての研究は今後の課題である。

2. ヤングアンとスピン Calogero-Sutherland モデル

2.1. スピン Calogero-Sutherland モデル

係数体 $\mathbb{K}$ はしばらく $\mathbb{C}$ とするが、後ではフォーマルなパラメータ $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ を用いるため $\mathbb{C}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ に変更する。

スピン Calogero-Sutherland モデルは、円周上の n 粒子がスピン自由度 N を持つ系で、ハミルトニアンが

$$H = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial q_i^2} + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\beta(\beta + P_{ij})}{\sin^2 \frac{1}{2}(q_i - q_j)}$$

で与えられる。ここで β は正の実数のパラメータで、 P_{ij} は i, j 粒子のスピンの交換を表す。通常の ($N = 1$ の) Calogero-Sutherland モデルの場合と同様に $z_i = \exp \sqrt{-1} q_i$ と変数を変換し、 $\text{Ad} \left(\prod_{1 \leq i < j \leq n} |z_i - z_j| \prod_{i=1}^n z_i^{-\frac{n-1}{2}} \right)^{-\beta}$ を施すと

$$\begin{aligned} \tilde{H} = & \sum_{i=1}^n \left(z_i \frac{\partial}{\partial z_i} \right)^2 + \beta \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{z_i + z_j}{z_i - z_j} \left(z_i \frac{\partial}{\partial z_i} - z_j \frac{\partial}{\partial z_j} \right) \\ & - 2\beta \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{z_i z_j}{(z_i - z_j)^2} (1 + P_{ij}) + \frac{\beta^2 n(n^2 - 1)}{12} \end{aligned}$$

という形のハミルトニアンを得る。ハミルトニアン $\tilde{H}$ と可換な作用素の族を導入し、その同時対角化を行うのが目標となる。 $\tilde{H}$ は、以下で述べるように Dunkl-Cherednik 作用素を用いて表すことができる。

Laurent 多項式環 $\mathbb{K}[z_1^{\pm 1}, \dots, z_n^{\pm 1}]$ の z_i と z_j を入れ換える変換を K_{ij} とする. V を N 次元ベクトル空間とし, $V^{\otimes n}$ のテンソル積の i, j 成分を入れ換える変換を P_{ij} とする. 対称群 $\mathfrak{S}_n$ の $\mathbb{K}[z_1, \dots, z_n]$ への右作用を $s_{ij} \mapsto -K_{ij}$ で, $V^{\otimes n}$ への左作用を $s_{ij} \mapsto P_{ij}$ で定める.

$$F_n := \mathbb{K}[z_1^{\pm 1}, \dots, z_n^{\pm 1}] \otimes_{\mathfrak{S}_n} V^{\otimes n} \cong \bigwedge^n V[z^{\pm 1}]$$

において $K_{ij} = -P_{ij}$ が成り立つ. F_n 上の作用素として

$$\tilde{H} = \sum_{i=1}^n \left[z_i \frac{\partial}{\partial z_i} + \beta \left(\sum_{j < i} \frac{z_i}{z_i - z_j} (1 - K_{ji}) + \sum_{i < j} \frac{z_j}{z_i - z_j} (1 - K_{ij}) + \frac{1}{2} (n - 2i + 1) \right) \right]^2$$

が成り立つ.

以降, 係数体を $\mathbb{K} := \mathbb{C}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ とし, $\hbar := \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ とする.

$$D_i := (N\varepsilon_2) z_i \frac{\partial}{\partial z_i} + \hbar \left(\sum_{j < i} \frac{z_i}{z_i - z_j} (1 - K_{ji}) + \sum_{i < j} \frac{z_j}{z_i - z_j} (1 - K_{ij}) + n - i - \frac{1}{2} \right)$$

を Dunkl-Cherednik 作用素と呼ぶ. 但し, 定数項の部分は後の都合に合わせて調整した. D_i は $\mathbb{K}[z_1^{\pm 1}, \dots, z_n^{\pm 1}]$ 上の作用素である.

D_i ($1 \leq i \leq n$) と K_{ij} ($1 \leq i, j \leq n$) の間には退化アフィン Hecke 代数の関係式が成り立つ. 退化アフィン Hecke 代数の右加群 M に対して, $M \otimes_{\mathfrak{S}_n} V^{\otimes n}$ にはヤングアン $Y(\mathfrak{gl}_N)$ の作用が定義できる (Drinfeld [D]). 次節でその構成を説明する.

2.2. ヤングアン $Y(\mathfrak{gl}_N)$ の作用

$$L_{ij}^{(k)}(z) := \delta_{ij} + \frac{\hbar}{z + D_k} \otimes (\text{id}^{k-1} \otimes E_{ij} \otimes \text{id}^{n-k})$$

によって $\text{End}(F_n)[[z^{-1}]]$ の元 $L_{ij}^{(k)}(z)$ を定め,

$$T_{ij}(z) := \sum_{i_1=1}^N \cdots \sum_{i_{n-1}=1}^N L_{i,i_1}^{(1)}(z) L_{i_1,i_2}^{(2)}(z) \cdots L_{i_{n-1},j}^{(n)}(z)$$

とすれば

$$(z - w)[T_{ij}(z), T_{kl}(w)] = \hbar (T_{kj}(z) T_{il}(w) - T_{kj}(w) T_{il}(z))$$

が成り立つ. $T_{ij}(z)$ の展開

$$T_{ij}(z) = \delta_{ij} + \hbar \sum_{r \geq 1} T_{ij}^{(r)} z^{-r}$$

の各項 $T_{ij}^{(r)}$ の満たす関係式を定義関係式として定義される $\mathbb{K}$ 代数がヤングアン $Y(\mathfrak{gl}_N)$ である. 以上より, ヤングアン $Y(\mathfrak{gl}_N)$ の F_n への作用が定義される.

$$A_i(z) := \sum_{w \in \mathfrak{S}_i} (-1)^{l(w)} T_{w(1),1}(z) T_{w(2),2}(z - \hbar) \cdots T_{w(i),i}(z - \hbar(i-1))$$

の展開の各項は互いに可換になる. これらの元で生成される $Y(\mathfrak{gl}_N)$ の部分代数を Gelfand-Zetlin 代数と呼び, $A(\mathfrak{gl}_N)$ で表す. さらに, $A_N(z)$ の展開の各項は $Y(\mathfrak{gl}_N)$ の中心を生成する.

$A_N(z)$ の F_n への作用は Dunkl-Cherednik 作用素を用いて $\prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{\hbar}{z+D_i}\right)$ となるため、スピン Calogero-Sutherland モデルのハミルトニアン $\tilde{H}$ は、 $Y(\mathfrak{gl}_N)$ の中心の元の作用で記述される。Gelfand-Zetlin 代数 $A(\mathfrak{gl}_N)$ は、ハミルトニアンと可換な作用素の族を与える。そこで、最初の問題は $Y(\mathfrak{gl}_N)$ の表現 F_n について $A(\mathfrak{gl}_N)$ の同時固有ベクトルを構成することに置き換わる。この問題は、竹村-Uglov [TU1] によって、次で述べる Nazarov-Tarasov の結果を用いて解決された。

Nazarov-Tarasov [NazTar] は、 $Y(\mathfrak{gl}_N)$ の有限次元既約表現の中で $A(\mathfrak{gl}_N)$ が半単純に作用するクラス (tame 表現) を研究し、同時固有ベクトルからなる基底を構成した。この基底を Gelfand-Zetlin 基底と呼ぶ。[NazTar] により、Gelfand-Zetlin 基底に関する $Y(\mathfrak{gl}_N)$ の生成元の作用の明示公式が知られている。

定理 2.1 ([TU1]). F_n はヤングアン $Y(\mathfrak{gl}_N)$ の表現として有限次元既約表現の直和に分解する。各直和因子は tame 表現で、特に Gelfand-Zetlin 基底を持つ。

次に $n \rightarrow \infty$ の極限を考える。 V の基底 v_j ($1 \leq j \leq N$) を固定し、 $V[z^{\pm 1}]$ と $\mathbb{C}^\infty = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{C} u_k$ とを $v_j \otimes z^m = u_{j-Nm}$ によって同一視する。フェルミオン Fock 空間

$$F := \lim_{n \rightarrow \infty} F_n$$

は、半無限ウェッジ積 $u_{\mathbf{k}} = u_{k_1} \wedge u_{k_2} \wedge \cdots$ で $k_i > k_{i+1}$ ($\forall i$) かつ $k_i = -i + 1$ ($i \gg 0$) を満たすものを基底に持つ。

Uglov は、 $n \rightarrow \infty$ の極限でもヤングアン $Y(\mathfrak{gl}_N)$ の作用が定義されることを示した。

定理 2.2 ([U]). ヤングアン $Y(\mathfrak{gl}_N)$ の F_n への作用は F への作用を誘導する。

$\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots)$ から

$$\lambda_i = k_i + i - 1$$

によって分割 λ を定め、この対応の下に $|\lambda\rangle := u_{\mathbf{k}}$ とする。Uglov は次の性質を持つ F の基底 $\{P_\lambda\}$ を導入した。

- $P_\lambda \in |\lambda\rangle + \sum_{\mu < \lambda} \mathbb{K} |\mu\rangle$
- P_λ は $A(\mathfrak{gl}_N)$ の同時固有ベクトル

Fock 空間 F も、 $Y(\mathfrak{gl}_N)$ の表現として既約な tame 表現の直和に分解する。その分解のもとで、 $\{P_\lambda\}$ は、各 λ に依存する定数倍を除いて Gelfand-Zetlin 基底に一致する。

以下では、 $Y(\mathfrak{gl}_N)$ の部分代数 $Y(\mathfrak{sl}_N)$ に作用を制限して考える。 $Y(\mathfrak{gl}_N)$ の中で、次の形のすべての自己同型

$$T_{ij}(z) \mapsto f(z)T_{ij}(z)$$

($f(z) = 1 + \hbar z^{-1} \mathbb{K}[[z^{-1}]]$) で保たれる部分代数が $Y(\mathfrak{sl}_N)$ だが、次の生成元と関係式による表示を持つ。 $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq N-1}$ を $\mathfrak{sl}_N$ の Cartan 行列とする。

定義 2.3. $\mathbb{K}$ 代数 $Y(\mathfrak{sl}_N)$ を次で定義する。

生成元 : $e_{i,r}, f_{i,r}, h_{i,r}$ ($1 \leq i \leq N-1, r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$)

関係式 :

$$[h_{i,r}, h_{j,s}] = 0, \quad [e_{i,r}, f_{j,s}] = \delta_{ij} h_{i,r+s},$$

$$\begin{aligned}
[h_{i,0}, e_{j,r}] &= a_{ij}e_{j,r}, & [h_{i,0}, f_{j,r}] &= -a_{ij}f_{j,r}, \\
[h_{i,r+1}, e_{j,s}] - [h_{i,r}, e_{j,s+1}] &= a_{ij}\frac{\hbar}{2}\{h_{i,r}, e_{j,s}\}, \\
[h_{i,r+1}, f_{j,s}] - [h_{i,r}, f_{j,s+1}] &= -a_{ij}\frac{\hbar}{2}\{h_{i,r}, f_{j,s}\}, \\
[e_{i,r+1}, e_{j,s}] - [e_{i,r}, e_{j,s+1}] &= a_{ij}\frac{\hbar}{2}\{e_{i,r}, e_{j,s}\}, \\
[f_{i,r+1}, f_{j,s}] - [f_{i,r}, f_{j,s+1}] &= -a_{ij}\frac{\hbar}{2}\{f_{i,r}, f_{j,s}\}, \\
\sum_{w \in \mathfrak{S}_{1-a_{ij}}} [e_{i,r_{w(1)}}[e_{i,r_{w(2)}}, \dots, [e_{i,r_{w(1-a_{ij})}}, e_{j,s}] \dots]] &= 0 \quad (i \neq j), \\
\sum_{w \in \mathfrak{S}_{1-a_{ij}}} [f_{i,r_{w(1)}}[f_{i,r_{w(2)}}, \dots, [f_{i,r_{w(1-a_{ij})}}, f_{j,s}] \dots]] &= 0 \quad (i \neq j)
\end{aligned}$$

[K1] では、Fock 空間 F への $Y(\mathfrak{sl}_N)$ の生成元の作用を明示的に求めた．作用を記述するために分割に関する記号を用意する．分割 λ を Young 図形と思い、次のように $\mathbb{Z}^2$ の部分集合と同一視する．

$$\lambda = \{(x, y) \mid x = 0, \dots, l(\lambda) - 1, y = 0, \dots, \lambda_{x+1} - 1\}$$

$\mathbb{Z}^2$ の元 (x, y) が $y - x \equiv i \pmod{N}$ ($i = 0, 1, \dots, N - 1$) を満たすとき (x, y) を i セルと呼ぶ． $R_{\lambda,i}$ を、 $(x, y) \in \lambda$ なる i セルで $\lambda \setminus (x, y)$ が分割になるものの集合 (removable セル) とし、 $A_{\lambda,i}$ を、 $(x, y) \notin \lambda$ なる i セルで $\lambda \cup (x, y)$ が分割になるものの集合 (addable セル) とする．さらに

$$\begin{aligned}
R_{\lambda,i,(x,y)}^l &= \{(x', y') \in R_{\lambda,i} \mid x' < x\}, & R_{\lambda,i,(x,y)}^r &= \{(x', y') \in R_{\lambda,i} \mid x < x'\}, \\
A_{\lambda,i,(x,y)}^l &= \{(x', y') \in A_{\lambda,i} \mid x' < x\}, & A_{\lambda,i,(x,y)}^r &= \{(x', y') \in A_{\lambda,i} \mid x < x'\}
\end{aligned}$$

とする．

定理 2.4 ([K1]).

$$\begin{aligned}
e_{i,r}P_\lambda &= \sum_{(x,y) \in R_{\lambda,i}} \left(\varepsilon_1(x + \frac{1}{2}i) + \varepsilon_2(y - \frac{1}{2}i) \right)^r \\
&\quad \times \prod_{(x',y') \in A_{\lambda,i,(x,y)}^r} \frac{\varepsilon_1(x - x' + 1) + \varepsilon_2(y - y' + 1)}{\varepsilon_1(x - x') + \varepsilon_2(y - y')} \\
&\quad \times \prod_{(x',y') \in R_{\lambda \setminus (x,y),i,(x,y)}^r} \frac{\varepsilon_1(x - x' - 1) + \varepsilon_2(y - y' - 1)}{\varepsilon_1(x - x') + \varepsilon_2(y - y')} P_{\lambda \setminus (x,y)}, \\
f_{i,r}P_\lambda &= \sum_{(x,y) \in A_{\lambda,i}} \left(\varepsilon_1(x + \frac{1}{2}i) + \varepsilon_2(y - \frac{1}{2}i) \right)^r \\
&\quad \times \prod_{(x',y') \in A_{\lambda \cup (x,y),i,(x,y)}^l} \frac{\varepsilon_1(x - x' + 1) + \varepsilon_2(y - y' + 1)}{\varepsilon_1(x - x') + \varepsilon_2(y - y')} \\
&\quad \times \prod_{(x',y') \in R_{\lambda,i,(x,y)}^l} \frac{\varepsilon_1(x - x' - 1) + \varepsilon_2(y - y' - 1)}{\varepsilon_1(x - x') + \varepsilon_2(y - y')} P_{\lambda \cup (x,y)},
\end{aligned}$$

$$\left(1 + \hbar \sum_{r \geq 0} h_{i,r} z^{-r-1}\right) P_\lambda = \prod_{(x,y) \in A_{\lambda,i}} \frac{z - \varepsilon_1(x + \frac{1}{2}i - 1) - \varepsilon_2(y - \frac{1}{2}i - 1)}{z - \varepsilon_1(x + \frac{1}{2}i) - \varepsilon_2(y - \frac{1}{2}i)} \\ \times \prod_{(x,y) \in R_{\lambda,i}} \frac{z - \varepsilon_1(x + \frac{1}{2}i + 1) - \varepsilon_2(y - \frac{1}{2}i + 1)}{z - \varepsilon_1(x + \frac{1}{2}i) - \varepsilon_2(y - \frac{1}{2}i)} P_\lambda$$

証明には Nazarov-Tarasov [NazTar] の結果を使う． $\{P_\lambda\}$ は、Gelfand-Zetlin 基底そのものに一致するわけではないので、[NazTar] の公式から上の公式を得るにはやや面倒な計算が必要になる．

2.3. アフィンヤングリアンの作用

この節では $N \geq 3$ とし、 $(a_{ij})_{0 \leq i,j \leq N-1}$ をアフィン Lie 代数 $\hat{\mathfrak{sl}}_N$ の Cartan 行列とする．

定義 2.5 (アフィンヤングリアン). $\mathbb{K}$ 代数 $Y(\hat{\mathfrak{sl}}_N)$ を次で定義する．

生成元： $e_{i,r}, f_{i,r}, h_{i,r}$ ($0 \leq i \leq N-1, r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$)

関係式：

$$\begin{aligned} [h_{i,r}, h_{j,s}] &= 0, \quad [e_{i,r}, f_{j,s}] = \delta_{ij} h_{i,r+s}, \\ [h_{i,0}, e_{j,r}] &= a_{ij} e_{j,r}, \quad [h_{i,0}, f_{j,r}] = -a_{ij} f_{j,r}, \\ [h_{i,r+1}, e_{j,s}] - [h_{i,r}, e_{j,s+1}] &= \begin{cases} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \{h_{i,r}, e_{i,s}\} & j = i, \\ -\varepsilon_1 h_{i,r} e_{i-1,s} - \varepsilon_2 e_{i-1,s} h_{i,s} & j = i-1, \\ -\varepsilon_2 h_{i,r} e_{i+1,s} - \varepsilon_1 e_{i+1,s} h_{i,s} & j = i+1, \\ 0 & \text{その他}, \end{cases} \\ [h_{i,r+1}, f_{j,s}] - [h_{i,r}, f_{j,s+1}] &= \begin{cases} -(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \{h_{i,r}, f_{i,s}\} & j = i, \\ \varepsilon_2 h_{i,r} f_{i-1,s} + \varepsilon_1 f_{i-1,s} h_{i,s} & j = i-1, \\ \varepsilon_1 h_{i,r} f_{i+1,s} + \varepsilon_2 f_{i+1,s} h_{i,s} & j = i+1, \\ 0 & \text{その他}, \end{cases} \\ [e_{i,r+1}, e_{j,s}] - [e_{i,r}, e_{j,s+1}] &= \begin{cases} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \{e_{i,r}, e_{i,s}\} & j = i, \\ -\varepsilon_1 e_{i,r} e_{i-1,s} - \varepsilon_2 e_{i-1,s} e_{i,s} & j = i-1, \\ -\varepsilon_2 e_{i,r} e_{i+1,s} - \varepsilon_1 e_{i+1,s} e_{i,s} & j = i+1, \\ 0 & \text{その他}, \end{cases} \\ [f_{i,r+1}, f_{j,s}] - [f_{i,r}, f_{j,s+1}] &= \begin{cases} -(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \{f_{i,r}, f_{i,s}\} & j = i, \\ \varepsilon_2 f_{i,r} f_{i-1,s} + \varepsilon_1 f_{i-1,s} f_{i,s} & j = i-1, \\ \varepsilon_1 f_{i,r} f_{i+1,s} + \varepsilon_2 f_{i+1,s} f_{i,s} & j = i+1, \\ 0 & \text{その他}, \end{cases} \\ \sum_{w \in \mathfrak{S}_{1-a_{ij}}} [e_{i,r_{w(1)}} [e_{i,r_{w(2)}}, \dots, [e_{i,r_{w(1-a_{ij})}}, e_{j,s}] \dots]] &= 0 \quad (i \neq j), \\ \sum_{w \in \mathfrak{S}_{1-a_{ij}}} [f_{i,r_{w(1)}} [f_{i,r_{w(2)}}, \dots, [f_{i,r_{w(1-a_{ij})}}, f_{j,s}] \dots]] &= 0 \quad (i \neq j) \end{aligned}$$

アフィンヤングアン $Y(\hat{\mathfrak{sl}}_N)$ は $U(\hat{\mathfrak{sl}}_N)$ と $Y(\mathfrak{sl}_N)$ を部分代数として含む. すなわち, 生成元のうち $r = 0$ の部分で生成される部分代数は $U(\hat{\mathfrak{sl}}_N)$ と同型であり, $i \neq 0$ の部分で生成される部分代数は $Y(\mathfrak{sl}_N)$ と同型である.

有限ウェッジ空間 F_n および Fock 空間 F には $\hat{\mathfrak{sl}}_N$ と $Y(\mathfrak{sl}_N)$ が作用している. これらの作用は, より大きな対称性である $Y(\hat{\mathfrak{sl}}_N)$ の作用から来していると考えるのが自然である. $F_n = \mathbb{K}[z_1^{\pm 1}, \dots, z_n^{\pm 1}] \otimes_{\mathfrak{S}_n} V^{\otimes n}$ へのヤングアンの作用は, $\mathbb{K}[z_1^{\pm 1}, \dots, z_n^{\pm 1}]$ への退化アフィン Hecke 代数の作用 (対称群の作用と Dunkl-Cherednik 作用素) から来していた. $\mathbb{K}[z_1^{\pm 1}, \dots, z_n^{\pm 1}]$ は, さらに $z_1^{\pm 1}, \dots, z_n^{\pm 1}$ の掛算作用を合わせることで, 退化ダブルアフィン Hecke 代数の作用を持つ. Guay [G] による Schur-Weyl 型関手を $\mathbb{K}[z_1^{\pm 1}, \dots, z_n^{\pm 1}]$ に適用することで, F_n にはアフィンヤングアン $Y(\hat{\mathfrak{sl}}_N)$ が作用することがわかる. この作用が $n \rightarrow \infty$ の極限と整合的であることは自明ではないが, [K1], [K2] で次を証明した.

定理 2.6 ([K1], [K2]). $Y(\hat{\mathfrak{sl}}_N)$ の F_n への作用は F への作用を誘導する.

注意 2.7. この定理は, 量子トロイダル代数に対する斉藤-竹村-Uglov [STU] と Varagnolo-Vasserot [VV] の結果のアフィンヤングアン版である. [K1] では籐多様体に関する結果を使っていたが, [K2] では代数的に証明した. [K2] は一般の高レベル Fock 空間を扱っている. これは竹村-Uglov [TU2] の結果のアフィンヤングアン版であり, 証明の方針は同じである.

Varagnolo [V] により, $A_{N-1}^{(1)}$ 型籐多様体の同変ホモロジー群にアフィンヤングアン $Y(\hat{\mathfrak{sl}}_N)$ が作用することが知られている. 以降では基本ウェイト Λ_0 に付随する籐多様体のみを考える. パラメータ $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ がジェネリックという仮定の下, 局所化公式を使って, トーラス固定点のクラスのなす基底への生成元の作用の明示公式が得られる.

定理 2.4 で述べた基底 $\{P_\lambda\}$ への作用の公式と, 固定点基底への作用とを比較して次がわかる.

定理 2.8 ([K1]). $Y(\hat{\mathfrak{sl}}_N)$ の表現として, Fock 空間 F と籐多様体の局所化同変ホモロジー群は同型である. この同型で $\{P_\lambda\}$ は固定点基底に対応する.

注意 2.9. この定理は, 量子トロイダル代数に対する長尾 [Nag] の結果のアフィンヤングアン版である. 但し [Nag] では q -Fock 空間の同時固有ベクトルを別の方法で構成しており, $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_N)$ の Gelfand-Zetlin 基底は使っていない.

$Y(\mathfrak{sl}_N)$ の有限次元既約表現は, その最高ウェイトを Drinfeld 多項式の形に表すことで分類される. 既約表現の例として, evaluation 写像 $Y(\mathfrak{sl}_N) \rightarrow U(\mathfrak{gl}_N)$ によって $\mathfrak{gl}_N$ の基本表現を $Y(\mathfrak{sl}_N)$ の表現と見なしたものは, 最も簡単な Drinfeld 多項式を持つ.

$Y(\hat{\mathfrak{sl}}_N)$ の最高ウェイト表現についてもその Drinfeld 多項式を考えることができ, Fock 表現 F はこの場合の基本表現にあたる. Guay が導入した evaluation 写像によって $\hat{\mathfrak{gl}}_N$ のレベル 1 可積分最高ウェイト表現を $Y(\hat{\mathfrak{sl}}_N)$ の表現と見なしたものは F と同型になる [K3].

3. ヤングアンと Coulomb 枝

3.1. shifted ヤングアン

この節では $\mathfrak{g}$ を ADE 型単純 Lie 代数とし, その Cartan 行列を $(a_{ij})_{i,j \in I}$ とする. μ を $\mathfrak{g}$ のコウェイトとし, $\mu_i := \langle \alpha_i, \mu \rangle$ とする.

定義 3.1. $\mathbb{C}[\hbar, \hbar^{-1}]$ 代数 Y_μ を次で定義する.

生成元 : $e_{i,r}, f_{i,r}$ ($i \in I, r \geq 0$), $h_{i,s}$ ($i \in I, s \geq -\mu_i$)

関係式 :

$$[h_{i,r}, h_{j,s}] = 0, \quad [e_{i,r}, f_{j,s}] = \begin{cases} \delta_{ij} h_{i,r+s} & r+s \geq -\mu_i, \\ \delta_{ij} \hbar^{-1} & r+s = -\mu_i - 1, \\ 0 & r+s \leq -\mu_i - 2, \end{cases}$$

$$[h_{i,-\mu_i}, e_{j,r}] = a_{ij} e_{j,r}, \quad [h_{i,-\mu_i}, f_{j,r}] = -a_{ij} f_{j,r},$$

$$[h_{i,r+1}, e_{j,s}] - [h_{i,r}, e_{j,s+1}] = a_{ij} \frac{\hbar}{2} \{h_{i,r}, e_{j,s}\},$$

$$[h_{i,r+1}, f_{j,s}] - [h_{i,r}, f_{j,s+1}] = -a_{ij} \frac{\hbar}{2} \{h_{i,r}, f_{j,s}\},$$

$$[e_{i,r+1}, e_{j,s}] - [e_{i,r}, e_{j,s+1}] = a_{ij} \frac{\hbar}{2} \{e_{i,r}, e_{j,s}\},$$

$$[f_{i,r+1}, f_{j,s}] - [f_{i,r}, f_{j,s+1}] = -a_{ij} \frac{\hbar}{2} \{f_{i,r}, f_{j,s}\},$$

$$\sum_{w \in \mathfrak{S}_{1-a_{ij}}} [e_{i,r_{w(1)}} [e_{i,r_{w(2)}}, \dots, [e_{i,r_{w(1-a_{ij})}}, e_{j,s}] \dots]] = 0 \quad (i \neq j),$$

$$\sum_{w \in \mathfrak{S}_{1-a_{ij}}} [f_{i,r_{w(1)}} [f_{i,r_{w(2)}}, \dots, [f_{i,r_{w(1-a_{ij})}}, f_{j,s}] \dots]] = 0 \quad (i \neq j)$$

正ルート $\alpha \in \Delta_+$ に対して, その単純ルートへの分解 $\alpha = \alpha_{i_1} + \dots + \alpha_{i_l}$ を固定する. このとき $\mathfrak{g}$ において Chevalley 生成元の交換子 $[e_{i_1}, [e_{i_2}, \dots, [e_{i_{l-1}}, e_{i_l}] \dots]]$ が 0 にならないように列 $(i_1, \dots, i_l)$ をとる.

$$E_\alpha^{(r)} := \hbar [e_{i_1,0}, [e_{i_2,0}, \dots, [e_{i_{l-1},0}, e_{i_l,r-1}] \dots]],$$

$$F_\alpha^{(r)} := \hbar [f_{i_1,0}, [f_{i_2,0}, \dots, [f_{i_{l-1},0}, f_{i_l,r-1}] \dots]],$$

$$H_i^{(s)} := \hbar h_{i,s-1}$$

と定義する. $E_\alpha^{(r)}, F_\alpha^{(r)}$ ($\alpha \in \Delta_+, r \geq 1$), $H_i^{(s)}$ ($i \in I, s \geq -\mu_i + 1$) で生成される Y_μ の $\mathbb{C}[\hbar]$ 部分代数を $\mathbf{Y}_\mu$ で表し, shifted ヤングアンと呼ぶ.

このように生成元をとる理由を説明する. 例えば $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$ とする. このとき

$$E_{\alpha_1}^{(1)} := \hbar e_{1,0}, \quad E_{\alpha_2}^{(1)} := \hbar e_{2,0}, \quad E_{\alpha_1+\alpha_2}^{(1)} := \hbar [e_{1,0}, e_{2,0}]$$

である. ここで $E_{\alpha_1}^{(1)}$ と $E_{\alpha_2}^{(1)}$ の交換関係を計算すると

$$[E_{\alpha_1}^{(1)}, E_{\alpha_2}^{(1)}] = [\hbar e_{1,0}, \hbar e_{2,0}] = \hbar^2 [e_{1,0}, e_{2,0}] = \hbar E_{\alpha_1+\alpha_2}^{(1)}$$

となり, $\hbar = 0$ において $E_{\alpha_1}^{(1)}$ と $E_{\alpha_2}^{(1)}$ は可換になる. 一般に, $\mathbf{Y}_\mu/(\hbar = 0)$ は可換になることが [FKPRW] で示された.

注意 3.2. shifted ヤングアンは, $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_N$ で μ がドミナントの場合に Brundan-Kleshchev [BK] が導入し, その後, Kamnitzer-Webster-Weekes-Yacobi [KWWY] が一般の $\mathfrak{g}$ で μ がドミナントの場合に拡張した. μ がドミナントの場合は, 通常 of ヤングアン $Y(\mathfrak{g})$ の部分代数として定義することができる (ここでの定義と一見違うが, 同型になる).

一般の μ に対する定義は Braverman-Finkelberg-Kamnitzer-小寺-中島-Webster-Weekes [BFKKNWW] による. 正確には [BFKKNWW] ではフィルトレーションとそれに付随する Rees 代数を使って定義している. 上の定義は Finkelberg-Tsybaliuk [FT] によって与えられ, 二つの定義が同値であることは Tsybaliuk-Weekes [TW] による.

3.2. 差分作用素 (GKLO 表現)

差分作用素による shifted ヤングアン $\mathbf{Y}_\mu$ の実現を導入する.

コウエイト μ に加えて, ドミナントコウエイト λ で, ドミナンス順序に関して $\lambda \geq \mu$ を満たすものを固定する. 基本コウエイト $\varpi_i^\vee$ と単純コルート $\alpha_i^\vee$ ($i \in I$) を用いて

$$\lambda = \sum_{i \in I} \lambda_i \varpi_i^\vee, \quad \lambda - \mu = \sum_{i \in I} a_i \alpha_i^\vee$$

と表示すると, λ と μ の取り方から λ_i と a_i は非負整数となる. 新たなパラメータ $\mathcal{Z} = (z_{i,k})_{i \in I, 1 \leq k \leq \lambda_i}$ および変数 $u_{i,r}$, $u_{i,r}^{-1}$, $w_{i,r}$ ($i \in I$, $1 \leq r \leq a_i$) を用意し, 交換関係を

$$u_{i,r} u_{i,r}^{-1} = u_{i,r}^{-1} u_{i,r} = 1, \quad [u_{i,r}, w_{i,r}] = \hbar u_{i,r}, \quad \text{他は可換}$$

で定めることで $\mathbb{C}[\hbar, \mathcal{Z}]$ 上の非可換代数を定義する. $u_{i,r}$ は $w_{i,r} \mapsto w_{i,r} + \hbar$ なる差分作用素と思える. この代数に $\hbar^{-1}$ および $(w_{i,r} - w_{i,s} + m\hbar)^{-1}$ ($r \neq s, m \in \mathbb{Z}$) の形の逆元をすべて加え, 局所化した代数を

$$\tilde{\mathcal{A}} := \mathbb{C}[\hbar, \mathcal{Z}] \left(\langle u_{i,r}^{\pm 1}, w_{i,r} \rangle / (\text{上の関係式}) \right) [\hbar^{-1}, (w_{i,r} - w_{i,s} + m\hbar)^{-1} (r \neq s, m \in \mathbb{Z})]$$

とする.

定理 3.3 ([BFKKNWW]). $\mathfrak{g}$ の Dynkin 図形の辺の向き付けを任意に固定する. 言い換えれば, ADE 型の籐を考える.

このとき次を満たす $\mathbb{C}[\hbar, \mathcal{Z}]$ 代数の準同型写像 $\Phi_\mu^\lambda: \mathbf{Y}_\mu \otimes \mathbb{C}[\mathcal{Z}] \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}$ が存在する.

$$E_{\alpha_i}^{(p)} \mapsto - \sum_{r=1}^{a_i} w_{i,r}^{p-1} \frac{\prod_{j:j \rightarrow i} \prod_{1 \leq s \leq a_j} (w_{i,r} - w_{j,s} - \frac{1}{2}\hbar)}{\prod_{1 \leq s \leq a_i, s \neq r} (w_{i,r} - w_{i,s})} Z_{i,r} u_{i,r}^{-1},$$

$$F_{\alpha_i}^{(p)} \mapsto \sum_{r=1}^{a_i} (w_{i,r} + \hbar)^{p-1} \frac{\prod_{j:i \rightarrow j} \prod_{1 \leq s \leq a_j} (w_{i,r} - w_{j,s} + \frac{1}{2}\hbar)}{\prod_{1 \leq s \leq a_i, s \neq r} (w_{i,r} - w_{i,s})} u_{i,r},$$

$$z^{\mu_i} + \sum_{p \geq 1} H_i^{(-\mu_i + p)} z^{\mu_i - p} \mapsto \prod_{k=1}^{\lambda_i} \left(z - z_{i,k} - \frac{1}{2}\hbar \right) \frac{\prod_{j:j \rightarrow i \text{ or } i \rightarrow j} \prod_{1 \leq r \leq a_j} (z - w_{j,r} - \frac{1}{2}\hbar)}{\prod_{1 \leq r \leq a_i} (z - w_{i,r})(z - w_{i,r} - \hbar)}$$

但し

$$Z_{i,r} := \prod_{k=1}^{\lambda_i} \left(w_{i,r} - z_{i,k} - \frac{1}{2}\hbar \right)$$

である.

定義 3.4. Φ_μ^λ の像を $\mathbf{Y}_\mu^\lambda$ で表し, truncated shifted ヤングアンと呼ぶ.

例 3.5. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$, $\lambda = 0$, $\mu = -2\varpi_1^\vee$ の場合.

Φ_μ^λ は次の代数同型を誘導する.

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{-2\varpi_1^\vee}^0 &\xrightarrow{\cong} \mathbb{C}[\hbar]\langle w, u^{\pm 1} \rangle / ([u, w] = \hbar u) \\ E^{(1)}, F^{(1)}, H^{(3)} &\mapsto -u^{-1}, u, 2w + \hbar \end{aligned}$$

この同型の $\hbar = 0$ の極限として

$$\mathbf{Y}_{-2\varpi_1^\vee}^0 / (\hbar = 0) \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}[w, u^{\pm 1}]$$

が成り立つ. 右辺は $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^\times = T^*\mathbb{C}^\times$ の座標環を与える.

注意 3.6. Φ_μ^λ は $\mu = 0$ (シフトなし) の場合に Gerasimov-Kharchev-Lebedev-Oblezin [GKLO] によって導入された. その後 Kamnitzer-Webster-Weekes-Yacobi [KWWY] が μ がドミナントの場合 (shifted ヤングアンが通常のヤングアンの部分代数になる場合) に拡張し, GKLO 表現と呼んだ. [GKLO], [KWWY] の動機は, based map の空間あるいはアフィングラスマンのスライスの量子化を記述することにあった. これらの多様体は, 次節で導入する Coulomb 枝の例になっている. [BFKKNWW] では Coulomb 枝の量子化をヤングアンを用いて記述するために, ドミナントとは限らない μ の場合に GKLO 表現を拡張した.

3.3. Coulomb 枝

この節では, [BFN1], [BFN2] に従い, 簾の表現に付随する Coulomb 枝を導入する. Coulomb 枝については [K4] も参照せよ.

$Q = (I, \Omega)$ を頂点集合 I と矢の集合 Ω からなる簾とする. 各 $h \in \Omega$ に対して, その始点 $\text{out}(h) \in I$ および終点 $\text{in}(h) \in I$ が定まる.

$V = \bigoplus_{i \in I} V_i$ および $W = \bigoplus_{i \in I} W_i$ を, I によって次数付けられた $\mathbb{C}$ ベクトル空間とする. $G := \prod_{i \in I} \text{GL}(V_i)$ とし, V, W から定まるフレーム付きの簾の表現を

$$\mathbf{N} := \bigoplus_{h \in \Omega} \text{Hom}(V_{\text{out}(h)}, V_{\text{in}(h)}) \oplus \bigoplus_{i \in I} \text{Hom}(W_i, V_i)$$

によって定義する. G は

$$(g_i) \cdot ((B_h), (a_i)) := ((g_{\text{in}(h)}^{-1} B_h g_{\text{out}(h)}), (g_i^{-1} a_i))$$

によって $\mathbf{N}$ に作用する. T_W を対角行列からなる $\prod_{i \in I} \text{GL}(W_i)$ の極大トーラスとする. T_W は

$$(g_i) \cdot ((B_h), (a_i)) := ((B_h), (a_i g_i))$$

によって $\mathbf{N}$ に作用する.

以上のデータから Coulomb 枝を定義する.

$$\mathcal{K} = \mathbb{C}((z)) \supset \mathcal{O} = \mathbb{C}[[z]],$$

$$G_{\mathcal{K}} = G(\mathcal{K}), \quad G_{\mathcal{O}} = G(\mathcal{O}), \quad \mathbf{N}_{\mathcal{O}} = \mathbf{N} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}$$

とし,

$$\mathcal{R}(V, W) := \{([g], x) \in G_{\mathcal{K}}/G_{\mathcal{O}} \times \mathbf{N}_{\mathcal{O}} \mid g^{-1}x \in \mathbf{N}_{\mathcal{O}}\}$$

によって $\mathcal{R}(V, W)$ を定義する. $\mathcal{R}(V, W)$ には $(G \times T_W)_{\mathcal{O}} \rtimes \mathbb{C}_{\text{rot}}^{\times}$ が作用する. ここで $\mathbb{C}_{\text{rot}}^{\times}$ は $\mathcal{K} = \mathbb{C}((z))$ への $\mathbb{C}^{\times}$ 作用 $z \rightarrow tz$ ($t \in \mathbb{C}^{\times}$) から誘導される作用 (loop rotation) とする. 同変 Borel-Moore ホモロジー群

$$\mathcal{A}(V, W) := H_*^{(G \times T_W)_{\mathcal{O}} \rtimes \mathbb{C}_{\text{rot}}^{\times}}(\mathcal{R}(V, W))$$

は convolution 積によって結合代数となる. $\mathcal{A}(V, W)$ を簾の表現に付随する量子 Coulomb 枝と呼ぶ. $\mathbb{C}_{\text{rot}}^{\times}$ に関する同変パラメータを $\hbar$ とし, T_W に関する同変パラメータを $\vec{z} = (z_{i,k})_{i \in I, 1 \leq k \leq \lambda_i}$ とする. つまり, 1 点の同変コホモロジー環を

$$H_{\mathbb{C}_{\text{rot}}^{\times}}^*(\text{pt}) = \mathbb{C}[\hbar], \quad H_{T_W}^*(\text{pt}) = \mathbb{C}[\vec{z}]$$

と同一視すると, $\mathcal{A}(V, W)$ は $\mathbb{C}[\hbar, \vec{z}]$ 上の代数となる. 次の事実が基本的である.

定理 3.7 ([BFN1]). $\mathcal{A}(V, W)/(\hbar = 0)$ は可換.

$$\mathcal{M}(V, W) := \text{Spec } \mathcal{A}(V, W)/(\hbar = \vec{z} = 0)$$

を Coulomb 枝と呼ぶ. $\mathcal{M}(V, W)$ は既約なアフィン代数多様体になる. その座標環 $\mathbb{C}[\mathcal{M}(V, W)] = \mathcal{A}(V, W)/(\hbar = \vec{z} = 0)$ には, $\mathcal{A}(V, W)$ の非可換な積から Poisson 構造が誘導される. 従って, $\mathcal{A}(V, W)$ は $\mathcal{M}(V, W)$ の量子化を与える. 可換な $\mathbb{C}[\vec{z}]$ 代数 $\mathcal{A}(V, W)/(\hbar = 0)$ の Spec は, $\mathcal{M}(V, W)$ の変形を与える.

$H_{G \times T_W \times \mathbb{C}_{\text{rot}}^{\times}}^*(\text{pt})$ は量子 Coulomb 枝 $\mathcal{A}(V, W)$ の可換な部分代数をなす. 従って $\hbar = \vec{z} = 0$ において $H_G^*(\text{pt})$ は $\mathbb{C}[\mathcal{M}(V, W)]$ の Poisson 可換な部分代数をなす. この Spec をとったもの

$$\mathcal{M}(V, W) \rightarrow \text{Spec } H_G^*(\text{pt}) = \prod_{i \in I} \left(\mathbb{C}^{\dim V_i} / \mathfrak{S}_{\dim V_i} \right)$$

は, Liouville の意味での可積分系になる.

3.4. ADE 型簾の場合

簾 Q がループを持たないとき, Q に付随する対称 Kac-Moody Lie 代数 $\mathfrak{g}_Q$ を構成できる. $\mathfrak{g}_Q$ のドミナントコウエイト λ と, ドミナンス順序に関して $\lambda \geq \mu$ を満たす (ドミナントとは限らない) コウエイト μ を固定し

$$\lambda = \sum_{i \in I} \lambda_i \varpi_i^{\vee}, \quad \lambda - \mu = \sum_{i \in I} a_i \alpha_i^{\vee}$$

と表示する. $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$, $W = \bigoplus_{i \in I} W_i$ を, $\dim V_i = a_i$, $\dim W_i = \lambda_i$ を満たすものとする. 以上の状況のとき, 前節で構成した $\mathcal{A}(V, W)$, $\mathcal{M}(V, W)$ を $\mathcal{A}_{\mu}^{\lambda}$, $\mathcal{M}_{\mu}^{\lambda}$ と書くことにする.

以下では Q が ADE 型の簾の場合を考える. この場合の Coulomb 枝 $\mathcal{M}_{\mu}^{\lambda}$ は [BFN2] によって決定された.

定理 3.8 ([BFN2]). $\mathcal{M}_{\mu}^{\lambda}$ は, $\mathfrak{g}_Q$ に対応する adjoint 群のアフィングラスマンの generalized スライス $\overline{\mathcal{W}}_{-w_0\mu}^{-w_0\lambda}$ と同型である.

generalized スライス $\overline{W}_\mu^\lambda$ は, [BFN2] で導入された. μ がドミナントの場合は, アフィングラスマンの Schubert 多様体と, その横断スライスとの共通部分に一致する (λ と μ はアフィングラスマンの点を指定する). M_μ^λ の量子化である $\mathcal{A}_\mu^\lambda$ について, 現在分かっているヤンギアンとの関係は次の通りである.

定理 3.9 ([BFKKNWW]). $\mathbb{C}[\hbar, \vec{z}]$ 代数の単射準同型

$$\mathbf{Y}_\mu^\lambda \rightarrow \mathcal{A}_\mu^\lambda$$

が存在し, μ がドミナントのときは同型となる.

証明は, 局所化定理によって $\mathcal{A}_\mu^\lambda$ を $\tilde{\mathcal{A}}$ に埋め込み, 像を比較する. 特に GKLO 表現は幾何学的な解釈を持つ.

3.5. アフィン型筋の場合

アフィン型に対しては分かっていることは少ない. ここでは主に Jordan 筋の場合を扱う.

$V = \mathbb{C}^n$, $W = \mathbb{C}^l$ ($n \geq 1$, $l \geq 0$) とする.

$$G = \mathrm{GL}(V) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}),$$

$$\mathbf{N} = \mathrm{End}(V) \oplus \mathrm{Hom}(W, V) = \mathrm{End}(\mathbb{C}^n) \oplus (\mathbb{C}^n)^{\oplus l}$$

に対して $\mathcal{R}(V, W)$ が定義されていた. この場合, 筋がループを持つことに起因して, $\mathrm{End}(V)$ の成分を定数倍する $\mathbb{C}^\times$ 作用が新たに生じる. この作用を入れた同変ホモロジー群によって

$$\mathcal{A} := H_*^{(G \times T_W \times \mathbb{C}^\times) \ltimes \mathbb{C}_{\mathrm{rot}}^\times}(\mathcal{R}(V, W))$$

と定義する. 同変パラメータは

$$H_{\mathbb{C}_{\mathrm{rot}}^\times}^*(\mathrm{pt}) = \mathbb{C}[\hbar], \quad H_{T_W}^*(\mathrm{pt}) = \mathbb{C}[\vec{z} = (z_1, \dots, z_l)], \quad H_{\mathbb{C}^\times}^*(\mathrm{pt}) = \mathbb{C}[\mathbf{t}]$$

とする. この場合の Coulomb 枝 $\mathcal{M} := \mathrm{Spec} \mathcal{A} / (\hbar = \vec{z} = \mathbf{t} = 0)$ も [BFN2] で決定された.

定理 3.10 ([BFN2]). $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $\mathbf{N} = \mathrm{End}(\mathbb{C}^n) \oplus (\mathbb{C}^n)^{\oplus l}$ のとき

$$\mathcal{M} \cong \begin{cases} (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^\times)^n / \mathfrak{S}_n & (l = 0 \text{ のとき}) \\ (\mathbb{C}^2 / (\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}))^n / \mathfrak{S}_n & (l \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

である.

この定理の右辺の量子化は, Etingof-Ginzburg [EG] によって別の方法 (Cherednik 代数) で与えられていた. 二つの量子化の間の関係を調べたのが [KN] である (代数の定義とパラメータの具体形は [KN] あるいは [K4] を参照せよ).

定理 3.11 ([KN]). $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $\mathbf{N} = \mathrm{End}(\mathbb{C}^n) \oplus (\mathbb{C}^n)^{\oplus l}$ のとき

$$\mathcal{A} \cong \begin{cases} \text{spherical trigonometric Cherednik 代数 } \mathbf{SH}_n^{\mathrm{trig}} & (l = 0 \text{ のとき}) \\ \text{spherical cyclotomic rational Cherednik 代数 } \mathbf{SH}_{n,l}^{\mathrm{cyc}} & (l \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

である. 両辺の代数のパラメータの対応は明示的に与えられる.

Jordan 箒の場合にも、量子 Coulomb 枝 $\mathcal{A}$ は差分作用素の代数 $\tilde{\mathcal{A}}$ に埋め込まれる。この場合は次のような形の差分作用素が現れる。

$$\sum_{r=1}^n w_r^{p-1} \left(\prod_{1 \leq s \leq n, s \neq r} \frac{w_r - w_s + \mathbf{t}}{w_r - w_s} \right) \left(\prod_{k=1}^l (w_r - z_k - \hbar) \right) u_r^{-1},$$

$$\sum_{r=1}^n (w_r + \hbar)^{p-1} \left(\prod_{1 \leq s \leq n, s \neq r} \frac{w_r - w_s - \mathbf{t}}{w_r - w_s} \right) u_r$$

$l = 0$ ならばこれらは Macdonald 作用素の加法的な退化であり、そのことから $\mathbf{SH}_n^{\text{trig}}$ と関係がつく。[KN] では、 $l \geq 1$ についても $\mathbf{SH}_{n,l}^{\text{cyc}}$ を差分作用素によって $\tilde{\mathcal{A}}$ に埋め込み、 $\mathcal{A}$ の像と比較して定理を証明した。

こうして得られた Cherednik 代数の表現は、ADE 型の場合の GKLO 表現の類似である。但しこの場合には、shifted ヤングアンを経ることなく、その商にあたるものが Cherednik 代数として直接定義されている。

Jordan 箒に付随するヤングアン $Y(\hat{\mathfrak{gl}}_1)$ は Maulik-Okounkov [MO] と Schiffmann-Vasserot [SV] によって導入された。また、その生成元と関係式による表示は Arbesfeld-Schiffmann [AS] によって与えられた。[KN] では、[AS] の関係式と、差分作用素が満たす関係式を元に、この場合に shifted ヤングアンと呼ぶべきもの（論文では $Y_l(\vec{z})$ と書かれている）を導入し、量子 Coulomb 枝 $\mathcal{A}$ への全射を構成した。

アフィン A 型の場合の Coulomb 枝は、中島-高山 [NakTak] によって、Cherkis の弓箭多様体 (bow variety) と同定された。その量子化はアフィンヤングアン $Y(\hat{\mathfrak{sl}}_N)$ の shifted 版によって記述されるはずである。

謝辞

この研究は JSPS 科研費 17H06127, 18K13390 の助成を受けたものです。

参考文献

- [AS] Noah Arbesfeld and Olivier Schiffmann, *A presentation of the deformed $W_{1+\infty}$ algebra*, Symmetries, integrable systems and representations, Springer Proc. Math. Stat., vol. 40, Springer, Heidelberg, 2013, pp. 1–13.
- [BFKKNWW] Alexander Braverman, Michael Finkelberg, Joel Kamnitzer, Ryosuke Kodera, Hiraku Nakajima, Ben Webster, and Alex Weekes, Appendices to [BFN2].
- [BFN1] Alexander Braverman, Michael Finkelberg, and Hiraku Nakajima, *Towards a mathematical definition of Coulomb branches of 3-dimensional $\mathcal{N} = 4$ gauge theories, II*, arXiv:1601.03586.
- [BFN2] Alexander Braverman, Michael Finkelberg, and Hiraku Nakajima, *Coulomb branches of 3d $\mathcal{N} = 4$ quiver gauge theories and slices in the affine Grassmannian* (with appendices by A. Braverman, M. Finkelberg, J. Kamnitzer, R. Kodera, H. Nakajima, B. Webster, and A. Weekes), arXiv:1604.03625.
- [BK] Jonathan Brundan and Alexander Kleshchev, *Shifted Yangians and finite W -algebras*, Adv. Math. **200** (2006), no. 1, 136–195.
- [D] Vladimir G. Drinfeld, *Degenerate affine Hecke algebras and Yangians*, Functional Anal. Appl. **20** (1986), no. 1, 62–64.

- [EG] Pavel Etingof and Victor Ginzburg, *Symplectic reflection algebras, Calogero-Moser space, and deformed Harish-Chandra homomorphism*, Invent. Math. **147** (2002), no. 2, 243–348.
- [FKPRW] Michael Finkelberg, Joel Kamnitzer, Khoa Pham, Leonid Rybnikov, and Alex Weekes, *Comultiplication for shifted Yangians and quantum open Toda lattice*, Adv. Math. **327** (2018), 349–389.
- [FT] Michael Finkelberg and Alexander Tsymbaliuk, *Shifted quantum affine algebras: integral forms in type A* (with appendices by Alexander Tsymbaliuk and Alex Weekes), arXiv:1811.12137.
- [G] Nicolas Guay, *Cherednik algebras and Yangians*, Int. Math. Res. Not. (2005), no. 57, 3551–3593.
- [GKLO] Anton Gerasimov, Sergey Kharchev, Dimitri Lebedev, and Sergey Oblezin, *On a class of representations of the Yangian and moduli space of monopoles*, Comm. Math. Phys. **260** (2005), no. 3, 511–525.
- [K1] Ryosuke Kodera, *Affine Yangian action on the Fock space*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **55** (2019), no. 1, 189–234.
- [K2] Ryosuke Kodera, *Higher level Fock spaces and affine Yangian*, Transform. Groups, **23** (2018), no. 4, 939–962.
- [K3] Ryosuke Kodera, *On Guay’s evaluation map for affine Yangians*, arXiv:1806.09884.
- [K4] 小寺諒介, 日本数学会 2017 年度秋季総合分科会代数学分科会特別講演予稿.
- [KN] Ryosuke Kodera and Hiraku Nakajima, *Quantized Coulomb branches of Jordan quiver gauge theories and cyclotomic rational Cherednik algebras*, String-Math 2016, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 98, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2018, pp. 49–78.
- [KWWY] Joel Kamnitzer, Ben Webster, Alex Weekes, and Oded Yacobi, *Yangians and quantizations of slices in the affine Grassmannian*, Algebra Number Theory **8** (2014), no. 4, 857–893.
- [MO] Daves Maulik and Andrei Okounkov, *Quantum groups and quantum cohomology*, arXiv:1211.1287.
- [Nag] Kentaro Nagao, *K-theory of quiver varieties, q-Fock space and nonsymmetric Macdonald polynomials*, Osaka J. Math. **46** (2009), no. 3, 877–907.
- [Nak] Hiraku Nakajima, *Towards a mathematical definition of Coulomb branches of 3-dimensional $\mathcal{N} = 4$ gauge theories, I*, Adv. Theor. Math. Phys. **20** (2016), no. 3, 595–669.
- [NakTak] Hiraku Nakajima and Yuuya Takayama, *Cherkis bow varieties and Coulomb branches of quiver gauge theories of affine type A*, Selecta Math. (N.S.) **23** (2017), no. 4, 2553–2633.
- [NazTar] Maxim Nazarov and Vitaly Tarasov, *Representations of Yangians with Gelfand-Zetlin bases*, J. Reine Angew. Math. **496** (1998), 181–212.
- [STU] Yoshihisa Saito, Kouichi Takemura, and Denis Uglov, *Toroidal actions on level 1 modules of $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$* , Transform. Groups **3** (1998), no. 1, 75–102.
- [SV] Olivier Schiffmann and Eric Vasserot, *Cherednik algebras, W-algebras and the equivariant cohomology of the moduli space of instantons on $\mathbf{A}^2$* , Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **118** (2013), 213–342.
- [TU1] Kouichi Takemura and Denis Uglov, *The orthogonal eigenbasis and norms of eigenvectors in the spin Calogero-Sutherland model*, J. Phys. A **30** (1997), no. 10, 3685–3717.

- [TU2] Kouichi Takemura and Denis Uglov, *Representations of the quantum toroidal algebra on highest weight modules of the quantum affine algebra of type $\mathfrak{gl}_N$* , Publ. Res. Inst. Math. Sci. **35** (1999), no. 3, 407–450.
- [TW] Alexander Tsymbaliuk and Alex Weekes, Appendices to [FT].
- [U] Denis Uglov, *Symmetric functions and the Yangian decomposition of the Fock and basic modules of the affine Lie algebra $\mathfrak{sl}_N$* , Quantum many-body problems and representation theory, MSJ Mem., vol. 1, Math. Soc. Japan, Tokyo, 1998, pp. 183–241.
- [V] Michela Varagnolo, *Quiver varieties and Yangians*, Lett. Math. Phys. **53** (2000), no. 4, 273–283.
- [VV] Michela Varagnolo and Eric Vasserot, *Double-loop algebras and the Fock space*, Invent. Math. **133** (1998), no. 1, 133–159.