

離散凸解析と数理経済モデル

田村 明久 (慶應義塾大学)*

概 要

離散凸解析は、離散最適化において提案された一つの枠組みで、 L 凸関数と M 凸関数という2種類の離散的凸関数が重要な役割を成す。離散凸解析では、 L 凸関数と M 凸関数の共役性、 L 凸関数と L 凹関数の離散分離定理、 M 凸関数と M 凹関数の離散分離定理、フェンシユル双対定理および L 凸関数の最小化や M 凸関数の最小化などアルゴリズム的な研究が成されてきた。

近年、数理経済学の分野において不可分財（離散財）を扱うモデルに対して離散凸解析が応用されている。本稿では、離散凸解析を概説し、数理経済学分野での幾つかの応用例を紹介する。

1. はじめに

離散凸解析は、離散最適化において提案された一つの枠組みで、 L 凸関数と M 凸関数という2種類の離散的凸関数が重要な役割を成す。離散凸解析については、2節で概説する。

近年、数理経済学の分野において不可分財（離散財）を扱うモデルに対して離散凸解析が応用されている。数理経済学において、人と仕事、研修医と病院のように異なる集合に属するもの同士の割当を求める状況のモデル化としてGale-Shapley [13] による安定結婚モデルとShapley-Shubik [30] による割当モデルが代表的である。これらの違いは、安定結婚モデルでは金銭のやり取りがないもので、安定性という解概念を導入し、学生の学科分けや研究室分け、研修医の病院への割当などに利用されている。一方、割当モデルでは金銭のやり取りがあるモデルで、均衡やコアという解概念が導入され、人の仕事への割当などに利用できる。

3節では、割当モデルの離散凸解析を用いた拡張の一つについて説明するが、以下のような研究：付値マトロイド (M 凹関数の一種) を用いた割当モデルの提案と均衡の存在 [20], Arrow-Debreu 型モデルの拡張モデルでの均衡の存在とその計算法 [3, 28], コアの存在やコアと均衡の関係に関する研究 [17, 32], 経済主体が売手であり買手でもある2部グラフ構造から一般のネットワーク構造への拡張と均衡の存在 [16] などが成されている。

4節では、安定結婚モデルの離散凸解析を用いた拡張の一つ [4] について説明するが、その他にも以下のような研究：離散凸解析を利用した配分制約を導入したモデル化に関する研究 [18], 安定割当の束構造に関する研究 [29], 2部グラフ構造から非循環有向グラフへの拡張モデルと安定割当の存在 [15], 配分制約を持つ学科分けという現実問題への適用 [1] などが成されている。また、割当モデルと安定結婚モデルの両方を包含する統一モデルも離散凸解析を用いて提案されている [10, 11]。

本研究は科研費 (課題番号: JP16K00023) の助成を受けたものである。

2010 Mathematics Subject Classification: 90C27, 91B68

キーワード：最適化, 離散凸解析, 数理経済モデル

* 〒223-8522 横浜市港北区日吉3-14-1 慶應義塾大学 理工学部

e-mail: aki-tamura@math.keio.ac.jp

web: <http://www.math.keio.ac.jp/~aki-tamura/>

この他にも組合せオークションへの離散凸解析の応用 [19], 離散凸解析を用いた繰返しオークションの拡張と計算量解析の研究 [26], 混雑ゲームの離散凸解析を用いた解析 [8], 整凹関数 (L 凸関数や M 凸関数を包含する離散的凸関数である整凸関数の凹関数版) を用いたゲームにおける純戦略均衡の存在 [14] などの研究が成されている. 離散凸解析の数理経済学やゲーム理論への応用については図書 [31] やサーベイ論文 [24] がある.

2. 離散凸解析の概説

離散凸解析では, L 凸関数と M 凸関数の共役性, L 凸関数と L 凹関数の離散分離定理, M 凸関数と M 凹関数の離散分離定理, フェンシエル双対定理および L 凸関数の最小化や M 凸関数の最小化などアルゴリズム的な研究が成されてきたが, 本節では次節以降で必要となる $M^\sharp$ 凸関数について必要最小限のことを紹介する. 詳しくは図書 [23] を参照されたい.

2.1. $M^\sharp$ 凸関数

V を非空な有限集合とし, $\mathbf{Z}$ と $\mathbf{R}$ をそれぞれ整数と実数全体の集合とする. V 上の整数ベクトル $\mathbf{x} = (x(v) : v \in V) \in \mathbf{Z}^V$ に対して, その正の台と負の台をそれぞれ

$$\text{supp}^+(\mathbf{x}) = \{v \in V \mid x(v) > 0\}, \quad \text{supp}^-(\mathbf{x}) = \{v \in V \mid x(v) < 0\}$$

と定義する. 任意の $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{Z}^V$ に対して, ベクトル $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$ と $\mathbf{x} \vee \mathbf{y}$ を次のように定義する:

$$(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y})(v) = \min\{x(v), y(v)\}, \quad (\mathbf{x} \vee \mathbf{y})(v) = \max\{x(v), y(v)\} \quad (v \in V).$$

それぞれの部分集合 $S \subseteq E$ に対して, その特性ベクトル $\mathbf{e}_S$ を

$$\mathbf{e}_S(v) = \begin{cases} 1 & (v \in S) \\ 0 & (v \in V \setminus S) \end{cases}$$

と定め, 特に V の各要素 v の特性ベクトルを $\mathbf{e}_v$ と表記する. 与えられたベクトル $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^V$ と関数 $f : \mathbf{Z}^V \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ に対して, 2つの関数 $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle$ と $f[-\mathbf{p}](\mathbf{x})$ を

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle = \sum_{v \in V} p(v)x(v), \quad f[-\mathbf{p}](\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle \quad (\mathbf{x} \in \mathbf{Z}^E)$$

と定義する. また, 関数 f の $U (\subseteq \mathbf{Z}^V)$ 内の最大解集合と f の実効定義域 $\text{dom } f$ を次のように定める:

$$\begin{aligned} \arg \max\{f(\mathbf{y}) \mid \mathbf{y} \in U\} &= \{\mathbf{x} \in U \mid f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{y}), \forall \mathbf{y} \in U\}, \\ \text{dom } f &= \{\mathbf{x} \in \mathbf{Z}^V \mid f(\mathbf{x}) \in \mathbf{R}\}. \end{aligned}$$

関数 $f : \mathbf{Z}^V \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ が $\text{dom } f \neq \emptyset$ と次の条件を満たすとき $M^\sharp$ 凸関数 [21, 22, 25] であるという:

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \text{dom } f, \forall u \in \text{supp}^+(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \exists v \in \{0\} \cup \text{supp}^-(\mathbf{x} - \mathbf{y}) :$$

$$f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x} - \mathbf{e}_u + \mathbf{e}_v) + f(\mathbf{y} + \mathbf{e}_u - \mathbf{e}_v).$$

ただし、 $e_0 = \mathbf{0}$ とする。以下で、 $M^\natural$ 凸関数の例を紹介する。

例 1. V の部分集合族 $\mathcal{T}$ が次の条件を満たすとき $\mathcal{T}$ を層族という：

$$X, Y \in \mathcal{T} \Rightarrow (X \cap Y = \emptyset \text{ または } X \subseteq Y \text{ または } Y \subseteq X).$$

層族 $\mathcal{T}$ と $\mathcal{T}$ の各要素 Z に対する 1 変数凸関数 $f_Z : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ が与えられたとき

$$f(X) = \sum_{Z \in \mathcal{T}} f_Z(|X \cap Z|) \quad (X \subseteq V)$$

は、 $\text{dom } f \neq \emptyset$ ならば $M^\natural$ 凸関数である [23]。この関数を層型凸関数とよぶ。 $\square$

$M^\natural$ 凸関数は凸拡張可能である。すなわち、以下の命題が成立する。

命題 1 ([21, 25]). $M^\natural$ 凸関数 $f : \mathbf{Z}^V \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ に対して、ある凸関数 $\bar{f} : \mathbf{R}^V \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ が存在し、

$$f(\mathbf{x}) = \bar{f}(\mathbf{x}) \quad (\forall \mathbf{x} \in \mathbf{Z}^V).$$

通常の凸関数では、極小解は最小解である。この性質は $M^\natural$ 凸関数にも引き継がれ、以下の最小性基準が示されている。

定理 2 ([21, 25]). $M^\natural$ 凸関数 $f : \mathbf{Z}^V \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$, $\mathbf{x}^* \in \text{dom } f$ に対し以下が成立する：

$$f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{y}) \quad (\forall \mathbf{y} \in \mathbf{Z}^V) \Leftrightarrow \begin{cases} f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x}^* - \mathbf{e}_u + \mathbf{e}_v) \quad (\forall u, v \in V) \\ f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x}^* \pm \mathbf{e}_u) \quad (\forall u \in V). \end{cases}$$

通常の凸関数の和は凸であるが、残念ながら 2 つの $M^\natural$ 凸関数の和は $M^\natural$ 凸とは限らない。2 つの $M^\natural$ 凸関数の和の最小解については以下の特徴付けが知られている。

定理 3 (M 凸交叉定理 [21, 25]). $M^\natural$ 凸関数 $f_1, f_2 : \mathbf{Z}^V \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ と $\mathbf{x}^* \in \text{dom } f_1 \cap \text{dom } f_2$ に対して、

$$\mathbf{x}^* \in \arg \min (f_1 + f_2)$$

である必要十分条件は、ある $\mathbf{p}^* \in \mathbf{R}^V$ が存在して、

$$\mathbf{x}^* \in \arg \min f_1[-\mathbf{p}^*] \cap \arg \min f_2[+\mathbf{p}^*].$$

さらに $f_1, f_2 : \mathbf{Z}^V \rightarrow \mathbf{Z} \cup \{+\infty\}$ ならば $\mathbf{p}^* \in \mathbf{Z}^V$ とできる。

2.2. $M^\natural$ 凹性の経済学的意味

以降では、 $M^\natural$ 凹関数 f ($-f$ が $M^\natural$ 凸関数) が数理経済学の観点からも良い性質を有することを紹介する。例えば、数理経済学では効用関数が凹関数であると仮定することが一般的であるが、先ほども触れたように $M^\natural$ 凹関数は凹拡張可能である。

関数 $f : \mathbf{Z}^V \rightarrow \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ が粗代替性を満たすとは、

$$\forall \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{R}^V \quad (\mathbf{p} \leq \mathbf{q}), \quad \forall \mathbf{x}^* \in \arg \max f[-\mathbf{p}], \quad \exists \mathbf{y}^* \in \arg \max f[-\mathbf{q}]:$$

$$y^*(v) \geq x^*(v) \quad (\forall i \in V : q(v) = p(v))$$

が成り立つことと定義する． V を不可分財の集合，不可分財の消費個数をベクトル $\mathbf{x} \in \mathbf{Z}^V$ で表現し，ある消費者の $\mathbf{x}$ に対する貨幣価値の評価を関数 f で表したとする．価格ベクトル $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^V$ が所与のとき，この消費者は $f[-\mathbf{p}](\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle$ を最大化する消費の仕方（消費ベクトル）を選択する．粗代替性は，価格が $\mathbf{p}$ から $\mathbf{q}$ に上昇したとき価格が不変の財の消費個数が減らない最適消費が存在することを意味している．[12] では， $\text{dom } f = \{0, 1\}^V$ のとき， f が $M^\sharp$ 凹関数であることと f が粗代替性を満たすことが同値であることを示した．一般の場合については粗代替性だけでは弱く，[2, 27] では， $\text{dom } f$ が有界な場合に $M^\sharp$ 凹性と同値な粗代替性の拡張版が提案されている．次の形が数理経済学的に分かり易い特徴付けである．

定理 4 ([26]). $f : \mathbf{Z}^V \rightarrow \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ が凹拡張可能かつ $\text{dom } f$ が有界なとき，以下の主張は同値である．

(1) f は $M^\sharp$ 凹関数，

(2) $\forall \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{R}^V$ ($\mathbf{p} \leq \mathbf{q}$), $\forall \mathbf{x}^* \in \arg \max f[-\mathbf{p}]$, $\exists \mathbf{y}^* \in \arg \max f[-\mathbf{q}]$:

$$\begin{aligned} y^*(v) &\geq x^*(v) \quad (\forall v \in V : q(v) = p(v)), \\ \sum_{i \in V} y^*(i) &\leq \sum_{i \in V} x^*(i). \end{aligned}$$

粗代替性の最後の条件は，価格上昇に対して最適消費個数は増えないことを意味している．

4節で紹介するアルゴリズムの正当性は，次の代替性に基づいている．関数 $f : \mathbf{Z}^V \rightarrow \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ が代替性を満たすとは，

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in \mathbf{Z}^V \ (\mathbf{z}_1 \geq \mathbf{z}_2), \forall \mathbf{x}_2 \in \arg \max \{f(\mathbf{y}) \mid \mathbf{y} \leq \mathbf{z}_2\}, \\ \exists \mathbf{x}_1 \in \arg \max \{f(\mathbf{y}) \mid \mathbf{y} \leq \mathbf{z}_1\} : \mathbf{z}_2 \wedge \mathbf{x}_1 \leq \mathbf{x}_2 \end{aligned}$$

が成り立つことと定義する．条件 $\mathbf{z}_2 \wedge \mathbf{x}_1 \leq \mathbf{x}_2$ から， $x_2(i) < z_2(i) \Rightarrow x_1(i) \leq x_2(i)$ が導かれる． $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2$ が消費可能な不可分財の上限個数を表すと思うと，代替性は上限が低いときに人気のない財 ($x_2(i) < z_2(i)$) は，上限が増えても消費個数は増えない ($x_1(i) \leq x_2(i)$) ことを意味している．代替性と $M^\sharp$ 凹性の関係については以下が知られている．

命題 5 ([4]). $M^\sharp$ 凹関数は代替性を満たす．

代替性を用いた $M^\sharp$ 凹性の次の特徴付けが，[6] で $\text{dom } f \subseteq \{0, 1\}^V$ の場合について，[5] で $\text{dom } f$ が有界な場合について示されている．

定理 6. $f : \mathbf{Z}^V \rightarrow \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ に対し $\text{dom } f$ が有界なとき， f が $M^\sharp$ 凹関数である必要十分条件は，任意の $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^V$ に対して $f[-\mathbf{p}]$ が代替性を満たすことである．

3. 離散凸解析を用いた労働市場モデル

この節では，医師を病院に割当てる状況を考える．各医師は複数の病院で複数時間（離散時間）勤務し，各病院も複数の医師を複数時間雇用できるとする．医師の集合を $D = \{d_1, \dots, d_i, \dots, d_n\}$ ，病院の集合を $H = \{h_1, \dots, h_j, \dots, h_m\}$ とし， $E = D \times H$, $E_{d_i} = \{d_i\} \times H$, $E_{h_j} = D \times \{h_j\}$ とする．医師の勤務状況は整数ベクトル $\mathbf{x} \in \mathbf{Z}_+^E$ で表現する．

すなわち、 $\mathbf{x}$ の (d_i, h_j) 成分 $x(d_i, h_j)$ は医師 d_i の病院 h_j での勤務時間を表すとする。このベクトルを割当ベクトルと呼ぶことにする。

給与を想定し、これを給与ベクトル $\mathbf{p} \in \mathbf{R}_+^E$ を用いて表現する。すなわち、医師 d_i が病院 h_j で勤務する場合の単位時間当りの給与を $p(d_i, h_j)$ で表す。 E 上のベクトル $\mathbf{z}$ に対して、 E_{d_i} と E_{h_j} への制限をそれぞれ $\mathbf{z}_{d_i}$ 、 $\mathbf{z}_{h_j}$ と表記する。

医師の病院に対する選好や病院の医師に対する選好を表現するために、各医師、各病院は割当ベクトルに対する貨幣価値の評価関数を持つと仮定する。医師 d_i の評価関数を $f_{d_i} : \mathbf{Z}^{E_{d_i}} \rightarrow \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ と表記し、病院 h_j の評価関数を $f_{h_j} : \mathbf{Z}^{E_{h_j}} \rightarrow \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ と表記する。すなわち、医師は自分の勤務時間のみで割当ベクトルを評価し、他の医師の勤務時間を考慮せず、病院も自分の雇用状況のみで割当ベクトルを評価し、他の病院の雇用状況を考慮しないとしている。また、 $f_{d_i}(\mathbf{y}) = -\infty$ となる $\mathbf{y}$ は d_i にとっては受理できない割当であり、病院についても同様である。

給与の給与ベクトル $\mathbf{p}$ に対して、医師 d_i は自身の勤務時間に関する評価値と受け取る給与総額の和を最大化するように行動すると仮定する。すなわち、 d_i は

$$\arg \max \{f_{d_i}(\mathbf{y}) + \langle \mathbf{p}_{d_i}, \mathbf{y} \rangle \mid \mathbf{y} \in \mathbf{Z}^{E_{d_i}}\} = \arg \max f_{d_i}[\mathbf{p}_{d_i}]$$

より自身に関する割当ベクトルを選択する。 $i \neq i'$ ならば、 $E_{d_i} \cap E_{d_{i'}} = \emptyset$ であるから、医師全体の評価関数 $f_D : \mathbf{Z}^E \rightarrow \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ を

$$f_D(\mathbf{x}) = \sum_{d_i \in D} f_{d_i}(\mathbf{x}_{d_i}) \quad (\mathbf{x} \in \mathbf{Z}^E)$$

と定義すると、医師全体の行動基準は

$$\arg \max f_D[\mathbf{p}]$$

に含まれる割当ベクトルの選択となる。

同様に、給与の給与ベクトル $\mathbf{p}$ に対して、病院 h_j は自身の雇用状況に関する評価値と支払う給与総額の差を最大化するように行動すると仮定する。すなわち、 h_j は

$$\arg \max \{f_{h_j}(\mathbf{y}) - \langle \mathbf{p}_{h_j}, \mathbf{y} \rangle \mid \mathbf{y} \in \mathbf{Z}^{E_{h_j}}\} = \arg \max f_{h_j}[-\mathbf{p}_{h_j}]$$

より自身に関する割当ベクトルを選択する。 $j \neq j'$ ならば、 $E_{h_j} \cap E_{h_{j'}} = \emptyset$ であるから、病院全体の評価関数 $f_H : \mathbf{Z}^E \rightarrow \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ を

$$f_H(\mathbf{x}) = \sum_{h_j \in H} f_{h_j}(\mathbf{x}_{h_j}) \quad (\mathbf{x} \in \mathbf{Z}^E)$$

と定義すると、病院全体の行動基準は

$$\arg \max f_H[-\mathbf{p}]$$

に含まれる割当ベクトルの選択となる。

割当ベクトルと給与ベクトルの組 $(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*) \in \mathbf{Z}_+^E \times \mathbf{R}^E$ が均衡であるとは、

$$\mathbf{x}^* \in \arg \max f_D[\mathbf{p}^*] \text{ かつ } \mathbf{x}^* \in \arg \max f_H[-\mathbf{p}^*]$$

を満たすことと定義する．すなわち，均衡とは，給与ベクトル $\mathbf{p}^*$ に対して医師にとっても病院にとっても $\mathbf{x}^*$ が最適な割当ベクトルであることを意味している． $\mathbf{p} \geq \mathbf{0}$ を均衡の条件に加えることもあるが，ここではこの条件は外す．ただし $\mathbf{p} \geq \mathbf{0}$ となる十分条件を後に与える．

勤務時間が連続である場合は，自然な前提条件のもとで f_D と f_H が凹関数ならば均衡が存在する．しかし，勤務時間が離散である場合には， f_D や f_H が凹拡張可能だけでは均衡が存在するとは限らない．M 凸交叉定理の M 凹版を用いると，各医師と各病院の評価関数が M[♯] 凹関数であるとき， $\arg \max(f_D + f_H) \neq \emptyset$ ならば均衡が存在する．

定理 7. 各医師の評価関数 $f_{d_i} : \mathbf{Z}^{E_{d_i}} \rightarrow \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ と各病院の評価関数 $f_{h_j} : \mathbf{Z}^{E_{h_j}} \rightarrow \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ が M[♯] 凹関数であるとき，以下が成り立つ．

(1) $f_D, f_H : \mathbf{Z}^E \rightarrow \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ は M[♯] 凹関数である．

(2) $\arg \max\{f_D + f_H\} \neq \emptyset$ ならば， $\mathbf{x}^* \in \mathbf{Z}^E$ ， $\mathbf{p}^* \in \mathbf{R}^E$ が存在し

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^* &\in \arg \max\{f_D(\mathbf{x}) + \langle \mathbf{p}^*, \mathbf{x} \rangle \mid \mathbf{x} \in \mathbf{Z}^E\} \\ \mathbf{x}^* &\in \arg \max\{f_H(\mathbf{x}) - \langle \mathbf{p}^*, \mathbf{x} \rangle \mid \mathbf{x} \in \mathbf{Z}^E\}\end{aligned}$$

を満たす．すなわち， $(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*)$ は均衡である．

(3) f_D が単調非増加 ($\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \text{dom } f_D, \mathbf{x} \leq \mathbf{y} \Rightarrow f_D(\mathbf{x}) \geq f_D(\mathbf{y})$) のとき，

$$\mathbf{x}^* - \mathbf{e}_{(i,j)} \in \text{dom } f_D \Rightarrow p^*(i, j) \geq 0.$$

(4) f_H が単調非減少 ($\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \text{dom } f_H, \mathbf{x} \leq \mathbf{y} \Rightarrow f_H(\mathbf{x}) \leq f_H(\mathbf{y})$) のとき，

$$\mathbf{x}^* + \mathbf{e}_{(i,j)} \in \text{dom } f_H \Rightarrow p^*(i, j) \geq 0.$$

証明. (1) $i \neq i'$ ならば $E_{d_i} \cap E_{d_{i'}} = \emptyset$ であり， $j \neq j'$ ならば $E_{h_j} \cap E_{h_{j'}} = \emptyset$ による．

(2) $\mathbf{x}^* \in \arg \max\{f_D + f_H\}$ を任意に選ぶと M 凸交叉定理の M 凹版より， $\mathbf{p}^* \in \mathbf{R}^E$ が存在し， $\mathbf{x}^* \in \arg \max f_D[+\mathbf{p}^*] \cap \arg \max f_H[-\mathbf{p}^*]$ となる．

(3) $\mathbf{x}^* - \mathbf{e}_{(i,j)} \in \text{dom } f_D$ とすると $f_D(\mathbf{x}^*) + \langle \mathbf{p}^*, \mathbf{x}^* \rangle \geq f_D(\mathbf{x}^* - \mathbf{e}_{(i,j)}) + \langle \mathbf{p}^*, \mathbf{x}^* - \mathbf{e}_{(i,j)} \rangle$ より， $p^*(i, j) \geq f_D(\mathbf{x}^* - \mathbf{e}_{(i,j)}) - f_D(\mathbf{x}^*) \geq 0$ ．

(4) $\mathbf{x}^* + \mathbf{e}_{(i,j)} \in \text{dom } f_H$ とすると $f_H(\mathbf{x}^*) - \langle \mathbf{p}^*, \mathbf{x}^* \rangle \geq f_H(\mathbf{x}^* + \mathbf{e}_{(i,j)}) - \langle \mathbf{p}^*, \mathbf{x}^* + \mathbf{e}_{(i,j)} \rangle$ より， $p^*(i, j) \geq f_H(\mathbf{x}^* + \mathbf{e}_{(i,j)}) - f_H(\mathbf{x}^*) \geq 0$ ． $\square$

4. 離散凸解析を用いた安定結婚モデルの拡張

通常安定結婚モデルでは，男性の集合 M と女性の集合 W に対して，男女ペアの集合でマッチング（各男性は高々一人の女性と結婚し，各女性も高々一人の男性と結婚する状態を表現したもの）となるものを対象とする．マッチングに対して，（駆け落ちなどにより）ペアを解消しないようなある種の安定性が提案されている．この安定性を導入するために，各人は異性に対して選好順序を持つとする．ここでは [13] で扱われている状況より少し融通を持たせ，同程度に好きである状況（無差別）を許すこと

にする．与えられたマッチング $X \subseteq M \times W$ に対して， X では組とならない男性 i と女性 j が存在し， i は X でのパートナーよりも j を好み， j も X でのパートナーよりも i を好むならば， i と j がより好ましい相手との再婚を望むとみなし， X は不安定であると定義する（パートナーと同程度に好きな異性とは，離婚してまで再婚する意志がないとしている）．マッチングが上の意味で不安定でないとき，安定であるという．Gale-Shapley [13] は，無差別がない場合に安定マッチングを求めるアルゴリズムを提案することで，その存在を構成的に示している．上記の例は男女のように1対1の設定だが，学生を学科に配属されるなど，多対1や多対多へも自然に拡張できる．

次に離散凸解析を用いた安定結婚モデル [4] を紹介する．ここでも男女の集合 M と W が与えられ，男女の組全体を E ，すなわち $E = M \times W$ とする．このモデルでは，各人は複数の異性と複数回組むことができると仮定する．例えば，男女がダンスを踊る，テニスで混合ダブルスを組むなど複数の異性と複数回を許す作業を行う状況を想定している．

男女が組む状態はベクトル $\mathbf{x} \in \mathbf{Z}^E$ で表現し，このようなベクトルを割当と呼ぶことにする．安定結婚モデルでは各人の異性に対する選好順序を所与としたが，[4] では，各人の割当に対する選好を表現する関数を所与とし，関数値が大きいものほど好ましいとする（関数値が同じ割当は無差別と解釈する）．正確には，男性 m に対して $E_m = \{m\} \times W \subseteq E$ とし， m の評価関数 $f_m : \mathbf{Z}^{E_m} \rightarrow \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ を所与とする．同様に女性 w に対して $E_w = M \times \{w\}$ とし， w の評価関数 $f_w : \mathbf{Z}^{E_w} \rightarrow \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ を所与とする．男女ともに割当において自分が関連する部分のみで，割当を評価し他の同性と異性に関する割当には影響されないと仮定している．

割当 $\mathbf{x}$ ，男性 m ，女性 w に対して， $\mathbf{x}$ の E_m への制限を $\mathbf{x}_m$ とし， E_w への制限を $\mathbf{x}_w$ と表記する．さらに，男性全体の評価を統合した関数 f_M と女性全体の評価を統合した関数 f_W を以下のように定義する：

$$\begin{aligned} f_M(\mathbf{x}) &= \sum_{m \in M} f_m(\mathbf{x}_m) \\ f_W(\mathbf{x}) &= \sum_{w \in W} f_w(\mathbf{x}_w) \end{aligned} \quad (\mathbf{x} \in \mathbf{Z}^E).$$

このとき，各 f_m ($m \in M$) が $M^\natural$ 凹関数ならば f_M も $M^\natural$ 凹関数となり，各 f_w ($w \in W$) が $M^\natural$ 凹関数ならば f_W も $M^\natural$ 凹関数となる¹． $\mathbf{x} \in (\text{dom } f_M) \cap (\text{dom } f_W)$ を満たす割当 $\mathbf{x}$ を実行可能割当という．

f_M と f_W は次の前提条件を満たすと仮定する．

(A) 実効定義域 $\text{dom } f_M$ と $\text{dom } f_W$ は，有界かつ遺伝的であり共通最小点 $\mathbf{0}$ を持つ．

ここで，実効定義域が遺伝的とは， $\mathbf{0} \leq x_1 \leq x_2 \in \text{dom } f_M$ ($\text{dom } f_W$) ならば $x_1 \in \text{dom } f_M$ ($\text{dom } f_W$) であることを意味する．この前提条件は，空集合はマッチングであり，マッチングの部分集合はマッチングであるという安定結婚モデルの状況から類推される自然なものである．

¹ ここでは f_M, f_W を f_m ($m \in M$)， f_w ($w \in W$) の統合として定義したが，単に男性集合 M に対する $M^\natural$ 凹関数，女性集合 W に対する $M^\natural$ 凹関数が所与としても以下の議論に支障は起こらない．

実行可能割当 $\mathbf{x}$ が

$$\begin{aligned} f_M(\mathbf{x}) &= \max\{f_M(\mathbf{y}) \mid \mathbf{y} \leq \mathbf{x}\} \\ f_W(\mathbf{x}) &= \max\{f_W(\mathbf{y}) \mid \mathbf{y} \leq \mathbf{x}\} \end{aligned}$$

を満たすとき、動機制約を満たすという。動機制約は、 $\mathbf{x}$ に対して男女共に割当数を減らす動機を持たないことを意味している。

実行可能割当 $\mathbf{x}$ に対して、男女の組 (m, w) が $\mathbf{x}$ に対するブロックペアであるとは、

$$\begin{aligned} f_M(\mathbf{x}) &< \max\{f_M(\mathbf{y}) \mid y(i, j) \leq x(i, j), \forall (i, j) \neq (m, w)\} \\ f_W(\mathbf{x}) &< \max\{f_W(\mathbf{y}) \mid y(i, j) \leq x(i, j), \forall (i, j) \neq (m, w)\} \end{aligned}$$

を満たすことと定義する。すなわち、 (m, w) がブロックペアであるとは、割当 $\mathbf{x}$ に対して、 (m, w) 以外の組については割当数を増やすことなく、 $((m, w)$ の割当数を増やすことで) 男女共に評価値を上げられる場合である²。実行可能割当が動機制約を満たしかつ、ブロックペアが存在しないとき、安定であるという。

前提条件 (A) の $\text{dom } f_M, \text{dom } f_W$ の有界性より、

$$\text{dom } f_M \cup \text{dom } f_W \subseteq \{\mathbf{y} \in \mathbf{Z}^E \mid \mathbf{0} \leq \mathbf{y} \leq \mathbf{z}\}. \quad (1)$$

を満たす整数ベクトル $\mathbf{z}$ が存在する。[11] のモデルの特殊な場合として、実行可能割当の特徴付けとして以下を示すことができる。

命題 8. f_M, f_W を前提条件 (A) を満たす $M^\natural$ 凹関数とし、 $\mathbf{z}$ を (1) を満たすベクトルとする。このとき、実行可能割当 $\mathbf{x} \in \text{dom } f_M \cap \text{dom } f_W$ が安定あるための必要十分条件は、以下の条件を満たす $\mathbf{z}_M, \mathbf{z}_W \in \mathbf{Z}^E$ が存在することである。

$$\mathbf{z} = \mathbf{z}_M \vee \mathbf{z}_W, \quad (2)$$

$$\mathbf{x} \in \arg \max\{f_M(\mathbf{y}) \mid \mathbf{y} \leq \mathbf{z}_M\}, \quad (3)$$

$$\mathbf{x} \in \arg \max\{f_W(\mathbf{y}) \mid \mathbf{y} \leq \mathbf{z}_W\}. \quad (4)$$

ただし、 $\mathbf{z}_M \vee \mathbf{z}_W$ は $\mathbf{z}_M$ と $\mathbf{z}_W$ の成分ごとの最大値をとるベクトルで、 $\arg \max\{f_M(\mathbf{y}) \mid \mathbf{y} \leq \mathbf{z}_M\}$ は $\mathbf{z}_M$ 以下である f_M の最大解全体を表す。

[4] では、(A) を満たす $M^\natural$ 凹関数 $f_M, f_W : \mathbf{Z}^E \rightarrow \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ と (1) を満たすベクトル $\mathbf{z}$ に対して、次のアルゴリズム GGS が (2), (3), (4) を満たす $(\mathbf{x}, \mathbf{z}_M, \mathbf{z}_W)$ を求めることを示すことで安定割当の存在を証明している。

² この定義では、 m と w が増やす割当数で同意しているとは限らないが、 f_M も f_W も $M^\natural$ 凹関数のとき、 (m, w) がブロックペアならば (m, w) の割当数を 1 増やすことで評価値がそれぞれ上がる可以说。

GGS(f_M, f_W, z)

入力: (A) を満たす $M^\natural$ 凹関数 $f_M, f_W : \mathbf{Z}^E \rightarrow \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ と (1) を満たすベクトル z ;

出力: (2), (3), (4) を満たす (x, z_M, z_W) ;

$x_W \leftarrow \mathbf{0}, z_W \leftarrow \mathbf{0}, z_M \leftarrow z$;

repeat {

 let x_M be any element in $\arg \max\{f_M(y) \mid x_W \leq y \leq z_M\}$;

 let x_W be any element in $\arg \max\{f_W(y) \mid y \leq x_M\}$;

for each $e \in E$ with $x_M(e) > x_W(e)$ {

$z_M(e) \leftarrow x_W(e)$;

$z_W(e) \leftarrow z(e)$;

 };

} **until** $x_M = x_W$;

$z_W \leftarrow z_W \vee x_M$;

return (x_M, z_M, z_W) .

定理 9 ([4]). 前提条件 (A) を満たす $M^\natural$ 凹関数 $f_M, f_W : \mathbf{Z}^E \rightarrow \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ に対して, 常に安定割当が存在する.

参考文献

- [1] 赤堀峻, 関口陽介, 田村 明久: 学生にグループ分けのある学科配属問題 — 離散凸解析の適用例, Transactions of the Operations Research Society of Japan **60**, 50–73 (2017).
- [2] Danilov, V., Koshevoy, G., Lang, C.: Gross substitution, discrete convexity, and submodularity, Discrete Applied Mathematics **131**, 283–298 (2003).
- [3] Danilov, V., Koshevoy, G., Murota, K.: Discrete convexity and equilibria in economies with indivisible goods and money, Mathematical Social Sciences **41**, 251–273 (2001).
- [4] Eguchi, A., Fujishige, S., Tamura, A.: A generalized Gale-Shapley algorithm for a discrete-concave stable-marriage model, Algorithms and Computation: 14th International Symposium, ISAAC2003, LNCS 2906 (T. Ibaraki, N. Katoh, and H. Ono, eds.), Springer-Verlag, Berlin, 2003, pp. 495–504.
- [5] Farooq, R., Shioura, A.: A note on the equivalence between substitutability and $M^\natural$ -convexity, Pacific Journal of Optimization **1**, 243–252 (2005).
- [6] Farooq, R., Shioura, A.: A new characterization of $M^\natural$ -convex set functions by substitutability, Journal of the Operations Research Society of Japan **47**, 18–24 (2004).
- [7] Favati, P., Tardella, F.: Convexity in nonlinear integer programming, Ricerca Operativa **53**, 3–44 (1990).
- [8] Fujishige, S., Goemans, M.X., Harks, T., Peis, B., Zenklusen, R.: Congestion games viewed from M -convexity, Operations Research Letters **43**, 329–333 (2015).
- [9] Fujishige, S., Murota, K.: Notes on L -/ M -convex functions and the separation theorems, Mathematical Programming **88**, 129–146 (2000).
- [10] Fujishige, S., Tamura, A.: A general two-sided matching market with discrete concave utility functions, Discrete Applied Mathematics **154**, 950–970 (2006).
- [11] Fujishige, S., Tamura, A.: A two-sided discrete-concave market with possibly bounded side payments: An approach by discrete convex analysis, Mathematics of Operations Research **32**, 136–155 (2007).

- [12] Fujishige, S., Yang, Z.: A note on Kelso and Crawford's gross substitutes condition, *Mathematics of Operations Research* **28**, 463–469 (2003).
- [13] Gale, D., Shapley, L. S.: College admissions and the stability of marriage, *American Mathematical Monthly* **69**, 9–15 (1962).
- [14] Imura, T., Watanabe, T.: Existence of a pure strategy equilibrium in finite symmetric games where payoff functions are integrally concave, *Discrete Applied Mathematics* **160**, 588–592 (2014).
- [15] Ikebe, Y. T., Tamura, A.: Stability in supply chain networks: An approach by discrete convex analysis, *Journal of the Operations Research Society of Japan* **58**, 271–290 (2015).
- [16] Ikebe, Y. T., Sekiguchi, Y., Shioura, A., Tamura, A.: Stability and competitive equilibria in multi-unit trading networks with discrete concave utility functions, *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics* **32**, 373–410 (2015).
- [17] Inoue, T.: Indivisible commodities and the nonemptiness of the weak core, *Journal of Mathematical Economics* **44**, 96–111 (2008).
- [18] Kojima, F., Tamura, A., Yokoo, M.: Designing Matching Mechanisms under Constraints: An Approach from Discrete Convex Analysis, in *Proceedings of the Seventh International Symposium on Algorithmic Game Theory (SAGT-2014)*. the full version is available at <http://mpira.ub.uni-muenchen.de/62226>.
- [19] Lehmann, B., Lehmann, D., Nisan, N.: Combinatorial auctions with decreasing marginal utilities. *Games and Economic Behavior* **55**, 270–296 (2006).
- [20] Murota, K.: Valuated matroid intersection, I: Optimality criteria, *SIAM Journal on Discrete Mathematics* **9**, 545–561 (1996).
- [21] Murota, K.: Convexity and Steinitz's exchange property, *Advanced Mathematics* **124**, 272–311 (1996).
- [22] Murota, K.: Discrete convex analysis, *Mathematical Programming* **83**, 313–371 (1998).
- [23] Murota, K.: *Discrete Convex Analysis*, SIAM, Philadelphia (2003).
- [24] Murota, K.: Discrete convex analysis: A tool for economics and game theory, *Journal of Mechanism and Institution Design* **1**, 151–273 (2016).
- [25] Murota, K., Shioura, A.: M-convex function on generalized polymatroid, *Mathematics of Operations Research* **24**, 95–105 (1999).
- [26] Murota, K., Shioura, A., Yang, Z.: Time bounds for iterative auctions: A unified approach by discrete convex analysis, *Discrete Optimization* **19**, 36–62 (2016).
- [27] Murota, K., Tamura, A.: New characterizations of M-convex functions and their applications to economic equilibrium models with indivisibilities, *Discrete Applied Mathematics* **131**, 495–512 (2003).
- [28] Murota, K., Tamura, A.: Application of M-convex submodular flow problem to mathematical economics, *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics* **20**, 257–277 (2003).
- [29] Murota, K., Yokoi, Y.: On the lattice structure of stable allocations in two-sided discrete-concave market, *Mathematics of Operations Research* **40**, 460–473 (2015).
- [30] Shapley, L. S., Shubik, M.: The assignment game I: The core, *International Journal of Game Theory* **1**, 111–130 (1972).
- [31] 田村明久: 離散凸解析とゲーム理論, 朝倉書店, (2009).
- [32] Yokote, K.: Core and competitive equilibria: An approach from discrete convex analysis, *Journal of Mathematical Economics* **66**, 1–13 (2016).