

「竹内の証明論」について

八杉満利子

1. はじめに

竹内外史先生は“いわゆる数学基礎論”の多くの分野で優れた業績を挙げられた。そのなかでとくに重要な位置を占めるのが“証明論”である。先生独自の“証明論観”の中で先駆的な数学を築きあげられたのである。本稿ではこの“竹内の証明論”に関して、数学上の成果とともにその背後に流れ続けた“証明論観”、さらに広く数学観をたどってみたい。

証明論とは非常に大まかにいえば、数学およびその支柱である論理の形式化された体系における“証明”を対象とする研究である。

集合論においても、ご自身のイメージに従って集合に関する理論を展開された。集合の世界の大きさについての先生の表現“How wide and How long”は、例えば公開討論の場で哲学者 Hao Wang も借用していた。実は証明論への関心は、集合の真の姿を捉えるという目的に由来したとも考えられる。集合論への関心と併せて考えるとき、証明論への熱意が理解できるように思う。形式的体系の研究から集合を見る、ということは、7節で述べるように、竹内先生が確固として“形式主義”という立場に立っておられたことに深い関わりがあるだろう。“形式主義”は先生の数学遂行における思想的基盤になっていたようである。

以後話の基礎には述語論理が仮定される。一階の述語論理とは、個体を値にとる変数のみを持つ述語論理体系であり、二階の述語論理はそれに個体の集合を値にとる変数が加わる。

先生はまず二階（高階）論理の体系を定義し、“竹内の基本予想”（カット除去）として知られる“予想”を提示された。二階論理は（有理数を基礎として）実数論を展開できる論理である。“竹内の基本予想”の大体の意味は「補助定理を重ねて定理を“証明”したときに、その“証明”を一定の手続きで変形し、“直接証明”を構成できる」というものである。その結果として定理の“証明”の論理的構造が明らかになり、たとえばその体系の無矛盾性が示される。ここで重要なことは、基本予想が、変形の定義や実際に“直接証明”に到達することの論証が“有限的”であることを要求することである。それは数学基礎論の発端となった Hilbert のプログラムに則っているのである。

一階または二階の述語論理に自然数等の性質を表す公理を加えた形式的体系を一階または二階算術の体系と呼ぶが、そこでそれぞれ自然数の初等的理論と実数論が展開できる。基本予想の系として二階算術の体系の無矛盾性（たとえば $0 = 1$ が証明されないこと）が伴うので、基本予想の証明を目指す分野が標語的に“無矛盾性証明”と呼ばれる。これを捉えて「数学が矛盾しているはずがないのに、何をつまらないことをしているのか」という類の発言に遭遇することがある。それは、不勉強ゆえの発言というものである。

基本予想の一つの応用として、解析的手法によって証明された初等整数論の定理の、初等的証明への書き換えが保証される。それを確かめるために実際の証明の書き換えを試みられたこともあった。

基本予想の全面的解決は難事である。竹内先生は構成的な順序構造である、ordinal

diagram と呼ぶ順序表記の理論を考案し、その応用によって基本予想の部分的解決に大きな貢献をされた。

以上のような事情を踏まえて、“竹内の証明論”について語ってゆく。(以下敬称を略す。)

2. 研究の年譜

まず、竹内の研究の年代的軌跡を概観しておこう¹。

○ 数学：英文論文 100 + 和文論文 5 (1950–1997)

○ 科学基礎論：和文論文 9 (1956–2001)

● これらのうち、“竹内の証明論”に関する業績は1950年から1981年に至る。いくつかの仕事を挙げてみる：

数学の基礎について, 1950 [1]; On a generalised logic calculus, 1953 [2]; Ordinal diagrams, 1958 [3]; Consistency proofs of subsystems of classical analysis, 1967 [4]; Reflection principles of subsystems of analysis, 1968 [5]; The ordinals of the systems of second order arithmetic with the provably Δ_2^1 -comprehension axiom and with the Δ_2^1 -comprehension axiom respectively, 1973 [7]; Fundamental sequences of ordinal diagrams, 1976 [8]; An accessibility proof of ordinal diagrams, 1981 [9].

● 数理論理学一般：証明論と大体同じ時期

● 集合論：1954–1971：The universe of set theory, 1969 [6]

● その後：可述的算術、限定算術、ブール代数值による解析、Heyting 代数值による数学、量子論理 等々²

3. “竹内の証明論”の起源

“証明論”とは、数学を形式化した体系における“証明”の論理構造を調べることであり、その研究の一部分は標語的に“無矛盾性証明”とも呼ばれている。“竹内の証明論”は、その際の方法論が厳密に規定されているのである。無矛盾性問題の発端は“数学の基礎に関する論争”およびそれに関する“(David) Hilbert のプログラム”という背景なくしては語れないものである。しかしこれらの意味はどれも微妙であり、説明には細心の注意が必要である。簡略な説明は誤解の元になるので、なるべく省く。ここでは[13]を参考に“竹内の解釈による Hilbert のプログラム”の説明を試みよう³。

Hilbert の“形式主義の立場”では、数学を形式的な体系として取り扱う。数学の基本的な概念（数などの個体、演算、大小などの関係、“そして”とか“すべての”などの論理演算、等々）を表す記号を用意し、それらを一定の規則で組み合わせて数学の命題を表現する。形式化された命題表現は論理式 (Formel, formula) と呼ばれる。一定の規則（推論規則）に従って連なる論理式の集まりである形式化された証明は、証明図 (Beweisfigur, proof-figure) と呼ばれる。以上の記号や規則はすべて具体的に決められ、論理式も証明図も有限個の記号列の組み合わせである“形式的”な“図形”として眼前に見えるのである。このような数学の表現の仕組みを形式的体系と呼ぶ。竹内の表

¹竹内の著作については、志村立矢、安東祐希両氏作成の業績表を参照している。

²[15]に竹内の数学についての様々な解説がある。

³数学基礎論論争と Hilbert のプログラムについては、たとえば[17]と[18]を参照。

現によれば、「このように具体的に考えられ形式化された証明に対する議論で素朴な最も信頼できるものだけを許容する。… この立場を有限の立場という。」

形式的体系について“有限の立場”で研究することが、“竹内の解釈による Hilbert のプログラム”の実行であり、この実行が“竹内の証明論”である、といえる。体系の無矛盾性はその系として得られる仕組みになっている。竹内の関心の対象は、実数論が展開できる二階算術であった。竹内の方針によって数学の基礎付けという問題が数理的な問題として提議され、一つの明確な分野として確立したといつてよい。

竹内の方法論の基礎は Gerhard Gentzen が定義した一階述語論理の体系“LK”における“基本定理”（カット除去定理）の証明と一階算術の体系の無矛盾性証明の方法である。すなわち、証明図を木構造として捉え、推論の論理的複雑度を木の節に添付して証明図の複雑度を“重みつきの木”として表現する。それを diagram と名付けるならば、diagram 間の整列順序を定義する。一方証明図を対象にする作用素（変形規則）を、その適用結果が同じ論理式の証明図を生じ、対応する diagram の順序が下がるように、具体的に定義する。整列性により、その作用素の適用は有限回で停止する。停止した時点で得られた証明図は元と同じ論理式の、何らかの意味の基準を満たしている。この一連の過程において有限性、具体性が自明でないのは、diagram の整列性証明である⁴。

4. カット推論

竹内の証明論は主に二階の述語論理と、それを基礎にした算術の体系を研究対象にしていた。前述の体系 LK においては、証明図は $A \rightarrow A$ という形のトートロジー、各論理記号を特徴づける推論、および三段論法の拡張である“カット”（Schnitt, cut）という推論規則（ $A \rightarrow B$ と $B \rightarrow C$ から $A \rightarrow C$ を導く）の適用によって得られる図形である。竹内は[1]において、その方法を二階述語論理に拡張した。二階論理では、二階の数学的対象についての存在推論（ $F(V)$ から $\exists X F(X)$ を導く：comprehension⁵）がある。その二階の体系において、もしも“カット除去定理”が成り立つならば、実数論の無矛盾性が導かれる、ということが[1]で示された。しかし二階論理におけるカット除去の証明は comprehension のために根本的に難しい問題であり、未だ一部分を除いて未解決である

カットは B をカットアウトするので、証明したい $A \rightarrow C$ からは証明に必要な概念（論理式）の見当がつかない。もしカット推論がなくて済むのならば、証明をサーチできる。事実一階の LK については、Gentzen が“具体的にかつ有限の立場で”カット除去証明を行った。しかし comprehension は論理式 $V(x)$ で定義される集合の存在を主張するものであり、 $V(X)$ の中に定義すべき集合が含まれているという循環が起こり得るために、カット除去が難問となるのである。カット除去は形式的な操作であるが、その手続きは論理的な内容に依存しているのである。

ここで注意すべきは、竹内の基本予想において標語的に言われる“カット除去”とは、単にある体系の任意の定理がカット無しの証明を持つ、ということでは“ない”。形式的体系 S についての基本予想とは、次のような主張なのである。

⁴Gentzen の方法については [11] と [12] で竹内が詳しく説明している。Gentzen の仕事の英訳が [16] に収められている。また、[15] のなかの新井敏康による記事が、“竹内の証明論”の発展や意義についての優れた解説になっている。

⁵comprehension の通常の形は $\exists X \forall x (V(x) \Leftrightarrow X(x))$ である。

体系 S における証明図全体を対象とするある変形操作が“具体的”に構成され、 S の任意の証明図 P にその操作を反復適用すると、有限回の反復で、 P が証明するのと同じ論理式の、カットなしの証明図に到達する。そしてその到達可能性が“有限の立場”で示される。

この長くてくどい表現を簡略化してはいけない。カット除去の方法まで指定しているのである。そして“竹内の証明論”において、“具体的”と“有限の立場”こそ本質的なのである。

[1]と[2]において、二階（さらに高階も）の論理体系を研究対象として有用な形に整備し、“竹内の考える Hilbert 計画”を定式化して、基本予想という明確な課題を世に送り出したことは、二階証明論の方向づけを行ったことになる。これが竹内の証明論人生の重要な第一段階といえる。

LK 型一階述語論理に基く算術（自然数）の形式的体系については、1938年に Gentzen が超限順序数 ε_0 （最初の ε 数）までの超限帰納法を使って“矛盾を導く証明はあり得ない”ことを示した。そしてこの ε_0 がその無矛盾性を示すのに必要最小の順序数であることも後に示した。[14]で竹内は、「Gentzen の無矛盾性証明では有限の立場は拡大解釈されている」と述べている。一階算術の無矛盾性は Gödel の不完全性定理によってその中では証明不可能である。Gentzen の方法は ε_0 までの超限帰納法以外は“具体的・有限的”なのであるから、この超限帰納法は厳密な意味での有限の立場を越えているのである。

カット除去とは“証明図の標準化”の概念といえる。したがって数学的にはある形式的体系において「どの部分がどのように標準化できるか」という問題になる。そして標準化証明に必要な十分な超限帰納法の大きさをその体系の順序数と呼ぶならば、Gentzen-竹内の方法はそのような順序数の決定にも寄与するのである。

5. 基本予想へ向けて

竹内の証明論における仕事は Gentzen の方法論に基づいているが、竹内の関心は一階の算術を越えて実数論へと向かうのである。竹内は証明図を木構造と見立て、推論の論理的複雑度を枝の節に付与することによって証明図の複雑度を表現するために、“ordinal diagram”と呼ぶ順序表記の理論を考案した ([3]:1957)。ordinal diagram の理論と、その証明図への付与の仕方が、“竹内の証明論”における重要な第二段階なのである。いくつかの段階を経て1967年に発表された二階算術の一部分（“ Π_1^1 -算術”と呼ばれるもの）の“無矛盾性証明” ([4]) は画期的な成果として評価された。これが“竹内の証明論”における第三段階といえる。 Π_1^1 -算術とは、comprehension の V が $\forall X G(X, x)$ ($G(X, x)$ は二階 quantifier を持たない) という形の論理式で表される二階算術である。この体系の順序数も決定された。

1970年代にはその手法を用いて Π_1^1 を少し超えた体系の順序数を決定した ([7])。続いて懸案であった、ordinal diagram の整列性（下降列は有限で止まること）の有限の立場での証明の土台となる理論に着手 ([8]:1976, [9]:1981) したが、竹内のこの方針での証明論はここで終わっている。なお、“竹内の証明論”の数学的成果はほとんどすべて [12]にある。

その後竹内は可述的算術や限定算術などの証明論、ブール値解析と呼ばれる理論などに才能を発揮し続けたが、“竹内の証明論”は後の世代に託されることになった。し

かしその後得られた証明論における様々な成果も、数学としての評価はされたものの、竹内の信念に合うものではなかったようだ。

Gentzen も竹内も、Hilbert の精神に沿うためには、“具体的”で“有限の立場”で認められる論法が必要であると考えていた。証明図の変換や順序表記の定義は確かに具体的・有限的である。問題は順序表記の順序が整列であることの証明に凝縮されている。

上述のように、基本予想の叙述は詳しくて長いが、それを簡略化してはいけない。そこには「具体的な操作の構成、その操作の有限回の適用で目的を達することの具体的・有限的な証明」という基本的な要求があるからなのだ。ただし具体性・有限性への要求は竹内の精神に基づくだけではない。具体的なカット除去の方法は、形式的体系の論理構造について様々な事実を提供するのである。(無矛盾性、sub-formula property、reflection principle 等)

1960年代後半に高橋元男と Dag Prawitz によって「二階(高階)述語論理においてカットは論理的に余剰である」という定理の集合論的な結果が出された。それ以外にも証明図の標準化を伴う諸理論が提案され研究されている。それら自体は数学的に重要であり興味深いものである。それでも竹内の基本予想がなお未解決であるとみなされるのは、それらが上述の要求に沿っていないからである。

6. 有限の立場⁶

“竹内の証明論”が次の世代に託された後に得られた証明論の諸成果について、数学としては高く評価しつつも、具体性・有限性に関しては「自分の有限の立場についての信念に充分合うものではない」というのが竹内の意見であった。

実際には“有限の立場”は決まった明確な概念ではない。図形の具体的な作成、というような反論の余地のない“有限性”だけでは、有意義な数学の体系の研究は不可能なことから、竹内の意図する“有限の立場”は当然それを越えていたはずである。竹内は日本語のいくつかの書き物で本人の“有限の立場”について説明を試みているが、“具体的な図形”やその“具体的な変形”等の定義の後には“有限の”、“具体的”という無定義のことばだけが並んでいるのである。

著書[11](1956)の序文に、数学の形式的表現と数学的帰納法についての“有限の立場”による定義と説明がある。この部分がその増補版(1974)、増補・改題版(1988)および復刊版(2010)において、不変であることは注目すべきことである。

[11]、[12]を参照すると竹内は、自然数に関する基本的な性質の表現である数学的帰納法について、その原理自体を有限の立場として認めているわけではない。竹内が認めているのは、 $1, 1+1, 1+1+1, \dots$ のように1個ずつ自然数を構成すること、それらについての大小関係、加法、乗法、など初等的な関係と演算の具体的・有限的な構成、そしてそれらについての諸性質の証明であるが、その“証明”において数学的帰納法は、次のような具体的なプロセスとしてのみ認める。すなわち、自然数についての具体的な性質 $A(x)$ と自然数 n が任意に提示されたときに、 $A(0)$ (が正しい) から始めて $A(m)$ ならば $A(m+1)$ という証明を繰り返してゆけば $A(n)$ に到達する、というプロセスであり、しかもその各ステップが有限的・具体的に示されるものである。

[11]ではさらに、“有限の立場”における ε_0 に相当する超限順序表記系を定義し、それについて次のような意味での“整列性”が“有限の立場”で示される、と述べている。すなわち「任意に順序表記 a が与えられたとき、 a で始まるどんな下降列も有限個で

⁶この節の内容は[15]のなかの筆者の項をベースにしている。

尽きてしまう。」つまり ε_0 までの超限帰納法が有限の立場で正当化される、ということである。そして「このような事情から、 ε_0 までの順序数が自然数論の無矛盾性証明に使われる」という。

しかし ε_0 までの超限帰納法は原理的に自然数論の中では証明されない。ゆえに上述の“有限の立場”がどのようなものか、が問われるわけである。竹内はそれへの答えを著書 [12] の 11 節のなかで試みている。 ε_0 までの順序表記の下降列に作用する“eliminator”という操作を定義し、具体的に与えられた任意の下降列について、“eliminator”の有限回の反復適用によってその列の最小の要素に到達する、というのが大筋の考え方である。この観点は具体的に与えられた図形に作用する明確に定義された操作と、その操作に関する明確に定義された推論についての“思考実験”を伴う、という意味で Hilbert の観点を踏襲しているともいえる。しかしここで最後の「有限回での到達」という事実がどのように有限の立場で保証されるのかについては、明示されてはいないのである。

数学の各理論の“無矛盾性”とは、数学の“形式的体系”の中で矛盾が証明されないこと、であるが、Hilbert のプログラムでは、その否定的事実をできるだけ分かりやすく示さなければならない。“有限の立場”とはその分かりやすさと思ってよいだろう。3 節でみた「素朴な最も信頼できる」や [11] にある「有限の立場とは帰納的に定義されたものについて最も純粹理想的に考えるならば自然に出てくる所」とは、その分かりやすさのことかもしれない。

竹内の証明論を支えている ordinal diagram の整列性も、最初はとりあえず集合論的に証明された。その後“基本列の理論”というものを展開し ([8])、それを使って「ordinal diagram の下降列は有限で止まる」ことを、“帰納的定義”という原理を使って証明した ([9])。しかしそこでも帰納的定義を“有限の立場”と認めているわけではない。

本節の最後に、関連する竹内の思想を筆者の [19] から引用して、もう少し見ておこう。竹内は 1956 年に『科学基礎論研究』のなかで次のように述べている。「有限の立場とは具体的に与えられた図形列についての具体的な操作列についての思考実験を許す立場である。」；「現代の数学は infinite mind を想定する。しかし人間は finite mind だ。finite mind の世界の中で infinite mind の世界の妥当化をしなければならない。」；「数学基礎論において mind の働きを formulate する必要がある。それは強い体系の無矛盾性問題を有限の立場で考えることの現実性の基盤になる。」

finite mind とは「無限回は数えられない」の類の意味として考えられているのだろう。しかし finite mind と初等的・機械的のプロセスとは異なると思う。人の頭脳が受け入れ易い原理であれば、実質的に無限性を内包していても有限“的”な基盤として受け入れるべきだ、というのが筆者の考えである。人の頭脳は機械よりも柔軟なはずである⁷。finite といっても人間の mind なのである。それは有限の表現を把握し、その内容を理解・想像する能力を持つのであるから、その表現が無限概念を包含していることもあり得る。無限を、機械的な段階を踏むだけでは到達できない彼方のもの、という心的緊張に悩まされるべき必然性はない。無限概念を含みながらも明確な原理を求めれば、finite mind の世界で infinite mind の世界を記述し理解できるはずだ。前掲の「思考実験を許す立場」とはこのように解釈してもよいのではないだろうか。

⁷中戸川幸治氏の発言の借用。

7. 形式主義観

本節では、竹内の数学観のもうひとつの側面である“形式主義”について[19]を引用しつつ概観する。竹内が数学の形式的体系についての考察に集中できたのは、この“形式主義”への信頼に依るからである。

『科学基礎論研究』第二巻の3冊にわたって竹内の「形式主義の立場から」という論文が掲載されている。「私達の考えている数学基礎論は数学のうちでも最もはっきりした、身動きの出来ない厳しさをもったものかもしれない。」この“数学基礎論”は“無矛盾性証明を伴う証明論”を指していると思われる。「厳しさ」の意味は今までの紹介から明らかであろう。また、「現代数学は集合概念を本質的に用いており、矛盾と紙一重にあるものの無矛盾性を証明しようとするから無矛盾性証明は難しいのである。」は、つねに集合が念頭にあったことを示す。

次の箇所は竹内の無矛盾性証明の実践の真の意図の表明であり、形式系の解明が数学の姿を捉えることにつながるという信念である。「文字通りの“無矛盾性”を問題にしているわけではない。“集合概念”の解明こそ形式主義の総てであると思う。」；「GLCの基本予想などが肯定的に解けるならば、集合の本体がある程度解明できたといってもよいと信じる⁸。」無矛盾性証明自体は“形式的体系”の構造の解明なのであるが、その意義・目的はこれらの主張のなかで示されている。

数学の形式化への第一歩は数学の記号化である。それについて次のように語られている。「人は考えを文字（記号）で表し、逆に文字によって考える、といわれる。」ここでいう“記号の使用”は数学の通常の活動で行われていることであり、数学の実質を写すと想定される記号の使い方を意味している。記号が内容を導く、ということで、記号で考えることの数学的価値を主張している。

「数学における記号の魔力は“集合”の記号法において極まる。ここに集合の意味は命題の思考対象化である。」；「 $\{x|A(x)\}$ と書くことによってあたかも全体を見通せるように錯覚させる能力。」；「数学における記号化による思考対象化は、命題（集合）、論理概念を経て形式主義において数学の証明自身へと進んできたのであるが、その意味は何であるか？これらに答えるには形式主義は未熟である。」；「無矛盾性の問題は形式主義の試金石であり、数学の基礎づけというよりは形式主義の基礎づけであるように思われる。しかもこの多難な形式主義の前途に大きい光明を信ずるものである。」“形式主義の基礎づけ”の意味は明確ではないが、形式主義への信念と期待がその後の証明論遂行の力になったであろうことが読み取れる。

最後に、「形式主義に立って数学の証明を分析していると、現代数学に対する何等かの考えが定まるのである。」とある。形式主義による数学は20世紀の半ば過ぎくらいまでは賛同を得たかもしれないが、20世紀終わり近くから今日までの数学には、また異なった視点が必要である。

8. おわりに

“竹内の証明論”は数学の世界に大きな影響を与えてきた。

たとえば、Hilbert のプログラムの精神に沿う無矛盾性証明を数学として整備し方向性を示したこと；無矛盾性証明という標語のもとに、論理学者を証明論に引き付けたこと；無矛盾性証明の具体的成果によって、その先への可能性を示唆したこと；“竹内

⁸GLC は高階述語論理の体系。

の証明論”の背後に流れ続けた“有限の立場”についての絶えざる言及によって、その意味とその数学的な定式化を我々に考えさせたこと。

筆者はその後 [8] と [9] を参考に、ordinal diagram の体系の整列性証明のための“有限的”な原理を抽出し定式化した。また新井敏康は無矛盾性証明を大きく前進させた。竹内は [10] (1984) で、ほかにも関連する業績を挙げながら、それらは「数学的には前進であるが、自分の考える方向の画期的な進歩とは言えない」と述べている。そして、“数学の基礎づけ”は「時代が変っても、何が起きても、たとえ空白があってもいつまでも強い生命力をもって続いて行く問題にちがいない。」と結んでいる。しかし昨今の数学の発展状況については、どう考えられるであろうか。

筆者は、“有限の立場”は、個々の数学理論（自然数論、 Π_1^1 -算術等）について、それぞれ考案されるべきものであり、それは論理的に初等的な分かりやすさでなくてよいと考える。前述のように、人は論理的には複雑な概念でも、明確に表現された原理として定式化されれば、その意味を把握する能力を持っていると思うからである。そしてそのような原理は一意的に定まるものではないとも考える。同じ事柄の異なった視点からの把握の仕方は多くの場合に可能なのである。竹内が固定した定式化を避けながら“有限の立場”について書き続けなければならなかったのは、それゆえなのであろう。

形式主義については、実質と形式という難問が含まれている。竹内の形式主義に徹する態度もひとつのあり方ではあるが、“数学の実質”への憧憬は解消されてはいないように見える。それだからこそ竹内は、形式主義について強く語らざるを得なかったのだと思う。

参考文献

- [1] 竹内外史, “数学の基礎について”, 「数学」 2 巻, 16–32 (1950).
- [2] Gaisi Takeuti “On a generalized logic calculus”, Japanese Journal of Mathematics, 23, 39–96 (1953).
- [3] Gaisi Takeuti, “Ordinal diagrams”, Journal of the Mathematical Society of Japan vol.9, 386–394 (1957).
- [4] Gaisi Takeuti, “Consistency proofs of subsystems of classical analysis”, Annals of Mathematics (2) vol.86, 299–348 (1967).
- [5] Gaisi Takeuti and Mariko Yasugi, “Reflection principles of subsystems of analysis”, Contributions to Mathematical Logic (North-Holland), 255–273 (1968).
- [6] Gaisi Takeuti, “The universe of set theory”, Foundations of Mathematics, Springer, 74–128 (1969).
- [7] Gaisi Takeuti and Mariko Yasugi, “The ordinals of the systems of second order arithmetic with the provably Δ_2^1 -comprehension axiom and with the Δ_2^1 -comprehension axiom respectively”, Japanese Journal of Mathematics vol.41, 1–67 (1973).
- [8] Gaisi Takeuti and Mariko Yasugi, “Fundamental sequences of ordinal diagrams”, Commentarii Mathematici Universitatis St. Pauli vol.25, 1–80 (1976).
- [9] Gaisi Takeuti and Mariko Yasugi, “An accessibility proof of ordinal diagrams”, Journal of the Mathematical Society of Japan vol.33, 1–21 (1981).
- [10] 竹内外史, “証明論について”, 科学基礎論研究 vol.17, no.1, 1–5 (1984).
- [11] 竹内外史, “数学基礎論”, 共立出版 (1956): 増補版 (1974) (共著): 増補・改題版 (証明論入門 1988 共著): 復刻版 (2010).
- [12] Gaisi Takeuti, “Proof Theory”, North-Holland Publishing Co. (1987).
- [13] 竹内外史, “ヒルベルトとゲーデル”, 数学セミナー, 22–27 (1992, 3月号).

- [14] 竹内外史, “第2問題 算術の公理と無矛盾性”, 数学セミナー, 22–23 (1994, 2月号).
- [15] “特集 竹内外史と数学基礎論”, 数学セミナー (2017, 2月号).
- [16] Gerhard Gentzen, translated by M.E. Szabo, “The collected papers of Gerhard Gentzen”, North-Holland Publ. Co. (1969).
- [17] 林晋・八杉満利子 (訳・解説), “ゲーデル 不完全性定理”, 岩波文庫 (2006: 第1刷).
- [18] Wilfried Sieg, “Hilbert’s Programs and Beyond”, Oxford University Press (2013).
- [19] 八杉満利子, “『科学基礎論研究』に見られる「形式主義観」”, 科学基礎論研究 vol. 43, no.1&2, 17–30 (2016).