マトロイド・パリティ

岩田　覚　(東京大学)*

1. はじめに

マトロイドは，ベクトルの線型独立性の組合せ論的な性質を抽象化したものとして，Whitney [36] によって導入された．最も代表的な例は，線型空間中のベクトルの集合であり，線型マトロイドと呼ばれる．

組合せ最適化の文脈におけるマトロイドの重要性は Edmonds [6, 9] によって確立された．特に，マトロイド交叉の枠組みは，2部グラフ上のマッチングの一般化に当たり，多項式時間解法を有する様々な組合せ最適化問題を包括的に捉えている．一方，効率的な解法を有する組合せ最適化問題の中で，マトロイド交叉で説明できないものとして，一般グラフ上のマッチングが知られている．両者の共通の一般化として，Lawler [21] がマトロイド・パリティを導入した．

マトロイド・パリティ問題は，広い枠組みであり，一般に厳密解を見出すのに必要な独立性判定のオラクルの回数が，台集合の大きさの指数関数になってしまう [26, 18]．この問題に対する多項式時間近似解法 (PTAS) が開発されたのは，比較的最近のことである [22].

一方で，線型マトロイドに限った場合に，最適値を特徴付ける最大最小定理と最適解を見出すための多項式時間解法が Lovász [24, 26] によって示された．その後，より効率的なアルゴリズムが開発されている [12, 31, 32].

マトロイド交叉やマッチングに関しては，各要素に重みを与えた最適化問題に対しても効率的な解法が知られている．同様に，重み付き線型マトロイド・パリティ問題に対しても多項式時間解法が期待されたが，長い間，擬多項式時間乱択アルゴリズム [2, 3] のみが知られていた．最近の研究 [17] では，交代多項式行列を用いた定式に基づいて，決定性の多項式時間解法を設計した．ただし，マトロイド交叉やマッチングと異なり，線型計画問題としての定式化が得られている訳ではなく，今後の課題として残されている．

2. マトロイド

有限集合 E とその部分集合族 $\mathcal{I}$ の組で，ベクトル集合の線型独立性を抽象化した以下の公理系を満たすものをマトロイドという．

(I0) $\emptyset \in \mathcal{I}$.

(I1) $I \subseteq J \in \mathcal{I} \Rightarrow I \in \mathcal{I}$.

(I2) $I, J \in \mathcal{I}, |I| < |J| \Rightarrow \exists e \in J \setminus I, I \cup \{e\} \in \mathcal{I}$.

本研究は，JST CREST (JPMJCR14D2) の支援を受けている．
2010 Mathematics Subject Classification: 90C27
キーワード：マトロイド, マッチング，アルゴリズム，パフィアン
* 〒113-8656 東京都文京区本郷 7-3-1　東京大学大学院情報理工学系研究科数理情報学専攻
e-mail: iwata@mist.i.u-tokyo.ac.jp
web: http://www.opt.mist.i.u-tokyo.ac.jp/~iwata/

マトロイドの最も簡単な例として，グラフ的マトロイドと分割マトロイドを挙げることができる．点集合 V, 枝集合 E からなるグラフ $G = (V, E)$ において，E の部分集合の内で閉路を含まないものの集合を $\mathcal{I}$ とすると，$(E,\mathcal{I})$ はマトロイドとなる．このようにして得られるマトロイドは，グラフ的マトロイドと呼ばれる．有限集合 E が $E_1, \ldots, E_k$ に分割されているとして，各 E_j から高々1個の元を含む部分集合 $I \subseteq E$ の全体を $\mathcal{I}$ とすると，$(E,\mathcal{I})$ はマトロイドとなり，分割マトロイドと呼ばれる．

マトロイドの極大独立集合を基と呼ぶ．基は，いずれも元の個数が等しい．この値をマトロイドの階数という．任意の $X \subseteq E$ に対して $\rho(X) = \max\{|J| : J \subseteq X,\, J \in \mathcal{I}\}$ で定義される集合関数 ρ を階数関数と呼ぶ．

マトロイドに関するアルゴリズムを考える際には，通常，独立性判定オラクルの存在を仮定する．すなわち，与えられた部分集合 $X \subseteq E$ に対して，X が独立集合であるか否かを正しく返す効率的な手続きがあるものとする．このような設定において，例えば，各元に実数値重みが与えられているときに，含まれる元の重みの和を最小にする基を求める最小基問題を効率的に解く貪欲アルゴリズム [9] が知られている．これは，グラフの最小全域木問題を解く Kruskal [19] のアルゴリズムの拡張に当たる．

3. マトロイド交叉

台集合 E を共有するマトロイド $\mathbf{M}_1 = (E,\mathcal{I}_1)$, $\mathbf{M}_2 = (E,\mathcal{I}_2)$ において，元の個数が最大の共通独立集合 $I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ を求めるマトロイド交叉問題に関して，以下の最大最小定理が知られている．

定理 1 (Edmonds [8]) マトロイド $\mathbf{M}_1 = (E,\mathcal{I}_1)$ の階数関数を ρ_1, $\mathbf{M}_2 = (E,\mathcal{I}_2)$ の階数関数を ρ_2 とすると，

$$\max\{|I| : I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2\} = \min\{\rho_1(X) + \rho_2(E \setminus X) : X \subseteq E\}$$

が成り立つ．

さらに，マトロイド交叉問題に対しては，増加道アルゴリズムと呼ばれる効率的なアルゴリズムが知られている．

マトロイド交叉問題の最も代表的な例は，2 部グラフのマッチングである．点集合 V_1, V_2 と枝集合 E からなる 2 部グラフ $H = (V_1, V_2; E)$ を考える．端点を共有しない枝の集合 $M \subseteq E$ をマッチングという．枝集合 E の部分集合の内で，V_1 の点を共有しないものの全体を $\mathcal{I}_1$ とすると，$\mathbf{M}_1 = (E,\mathcal{I}_1)$ は分割マトロイドとなる．同様に，V_2 の点を共有しない枝の集合の全体を $\mathcal{I}_2$ とすることで，分割マトロイド $\mathbf{M}_2 = (E,\mathcal{I}_2)$ を得る．マッチングとは，$\mathbf{M}_1$ と $\mathbf{M}_2$ の共通独立集合に他ならない．したがって，2 部グラフ上の最大マッチング問題は，分割マトロイド対の交叉問題に帰着される．

台集合 E を共有するマトロイド $\mathbf{M}_1 = (E,\mathcal{I}_1)$, $\mathbf{M}_2 = (E,\mathcal{I}_2)$ において，各元 $e \in E$ に実数値重み w_e が与えられているとき，共通独立集合 $I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ の中で，重み $w(I) := \sum_{e \in I} w(e)$ が最大となるものを求める問題を考えることができる．この問題に対して，主双対アルゴリズムと呼ばれる多項式時間アルゴリズムが設計された [10, 16, 20]．

台集合 E 上の実数値関数の全体 $\mathbf{R}^E$ は数ベクトル空間になる．部分集合 $J \subseteq E$ に対して，特性ベクトル χ_J を $e \in J$ のときに $\chi_J(e) = 1$ で，$e \notin J$ のときに $\chi_J(e) = 0$

となるベクトルとして定義する．ここで，以下の様な線型計画問題を考える．

$$
\begin{array}{ll}
\text{Maximize} & \displaystyle\sum_{e\in E} w_e x(e) \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{e\in Y} x(e) \le \rho_1(Y), \quad \forall Y \subseteq E, \\
& \displaystyle\sum_{e\in Y} x(e) \le \rho_2(Y), \quad \forall Y \subseteq E, \\
& x(e) \ge 0, \qquad \forall e \in E.
\end{array}
$$

このとき，実行可能領域は全ての共通独立集合の特性ベクトルの凸包と一致する．したがって，最大重み共通独立集合を得るには，この線型計画問題を解けば良い．ただし，制約条件が指数個あるので，計算機に直接入れて解くことは無理がある．そこで，双対問題の助けを借りて，主問題の 0-1 最適解と双対問題の最適解を得るのが主双対アルゴリズムである．

重み付きマトロイド交叉問題の変種としては，マトロイド対の共通基が存在するときに，その中で最小重みのものを求める問題が考えられる．この問題に対しても，同様の多項式時間主双対アルゴリズムが設計されている．

最小共通基問題の代表的な例としては，有向グラフ上の最小有向全域木問題がある．有向グラフ上で，各枝に長さが与えられているときに，指定された点を根とする有向全域木の中で枝長の総和が最小となるものを求める問題である．この問題は，グラフ的マトロイドと分割マトロイドの対における最小重み共通基問題として定式化できる．

4. マッチング

点集合 W, 枝集合 E からなるグラフ $G=(W,E)$ において，端点を共有しない枝の集合 $M \subseteq E$ をマッチングと呼ぶ．特に M の端点集合が W と一致するとき，完全マッチングという．グラフ $G=(W,E)$ から点部分集合 $X \subseteq W$ を除いて得られるグラフにおいて，点数が奇数の連結成分数を $\mathrm{odd}(G-X)$ と表す．このとき，G に完全マッチングが存在するための必要十分条件を与えるのが，Tutte の定理である．

定理 2 (Tutte [35]) グラフ $G=(W,E)$ は，任意の $X \subseteq W$ に対して $\mathrm{odd}(G-X) \le |X|$ が成り立つとき，かつそのときに限り，完全マッチングを有する．

交代行列 Φ の列集合（行集合）を W とする．点集合 W と枝集合 $E = \{(u,v) \mid \Phi_{uv} \neq 0\}$ からなるグラフ $G=(W,E)$ を考える．交代行列 Φ のパフィアン $\mathrm{Pf}\,\Phi$ は，

$$
\mathrm{Pf}\,\Phi = \sum_{M} \sigma_M \prod_{(u,v)\in M} \Phi_{uv}
$$

で定義される．ここで，総和は，G の全ての完全マッチング M に関するものであり，σ_M は，± 1 の適当な値を取る．このとき，$\det\Phi = (\mathrm{Pf}\,\Phi)^2$ が成り立つことが知られている．したがって，交代行列 Φ が正則であるためには，G に完全マッチングが存在しなくてはならない．

逆に，グラフ $G=(W,E)$ が与えられたときに，枝に対応する成分を独立パラメタとした交代行列 Φ_G を考えることができる．この交代行列 Φ_G が正則のとき，かつその時に限り，G には完全マッチングが存在する．Tutte は，この関係を利用し，パフィアンに関する代数的な議論を通じて，定理 2 を証明した．

グラフ $G = (W, E)$ におけるマッチングに含まれる枝の最大本数を $\mu(G)$ と書くことにする．定理 2 を用いて，

$$\mu(G) = \frac{1}{2}\min\{|W| + |X| - \mathrm{odd}(G - X) \mid X \subseteq W\}$$

を導くことができる．この公式は，Tutte–Berge 公式と呼ばれている．Edmonds [4] は，最大マッチングを見出す効率的なアルゴリズムを与えた．この際，効率的であることの尺度として，多項式時間アルゴリズムの概念を導入した．

マッチングに関しても重み付きの最適化問題を考えることができる．グラフ $G = (W, E)$ の各枝に $e \in E$ に実数値重み w_e が与えられているときに，マッチング M の中で，重み $w(M) = \sum_{e \in M} w_e$ を最大にするものを求める問題を整数計画問題として定式化すると，以下の様になる．

$$\begin{array}{lll} \text{Maximize} & \displaystyle\sum_{e \in E} w_e x(e) & \\ \text{subject to} & \displaystyle\sum_{e \in \delta v} x(e) \le 1, & \forall v \in W, \\ & x(e) \in \{0, 1\}, & \forall e \in E. \end{array}$$

一般に整数計画問題は NP 困難であり，多項式時間解法の存在が期待できない．そこで，0-1 制約を非負制約 $x(e) \ge 0$ に置き換える線型計画緩和を考える．この緩和問題は線型計画問題なので，効率的に最適化を得ることができるが，その結果が 0-1 解とは限らない．例えば，3 点の完全グラフにおいて，各枝 $e \in E$ で $x(e) = 1/2$ となる $x \in \mathbf{R}^E$ は実行可能解であり，重みの設定によっては，これが唯一の最適解となる．

3 以上の奇数個の点集合 Z に注目すると，Z の点同士を結ぶ枝でマッチングに含まれる枝の本数は，$\lfloor |Z|/2 \rfloor$ 以下となる．そこで，この条件を制約条件に加えた以下のような線型計画問題を考える．

$$\begin{array}{lll} \text{Maximize} & \displaystyle\sum_{e \in E} w_e x(e) & \\ \text{subject to} & \displaystyle\sum_{e \in \delta v} x(e) \le 1, & \forall v \in W, \\ & \displaystyle\sum_{e \in E[Z]} x(e) \le \lfloor \frac{|Z|}{2} \rfloor, & \forall Z \in \Omega, \\ & x(e) \ge 0, & \forall e \in E. \end{array}$$

ただし，δv は v に接続する枝の集合を意味する．また，Ω は，点の個数が 3 以上の奇数となる点部分集合の全体であり，$Z \in \Omega$ に対する $E[Z]$ は Z の点同士を結ぶ枝の集合を意味する．

この線型計画問題は，制約条件が点の個数の指数関数本になるので，計算機に直接入れて解くには無理がある．しかし，双対問題の助けを借りて，主問題の 0-1 最適化と双対問題の最適解を多項式時間で得る主双対アルゴリズムが設計された．その結果として，実行可能領域が全てのマッチングの特性ベクトルの凸包として定義されるマッチング多面体と一致することも示された．

重み付きマッチング問題としては，完全マッチングが存在するグラフにおいて，最小重み完全マッチングを求めるという問題も考えられる．この問題に対しても同様に，主双対アルゴリズムによる多項式時間解法が設計されている．

5. マトロイド・パリティ

一般グラフのマッチング問題は，2部グラフの場合と異なり，マトロイド交叉問題として定式化できる訳ではない．しかし，両者に関する知見を並べて書いてみると，非常に似た状況になっていることが見て取れる．そこで，両者を共通に含む枠組みを設定し，その中で組合せ最適化問題が解ける仕組みを理解したいという問題意識が生じる．

マトロイド $\mathbf{M} = (S, \mathcal{I})$ の台集合 S が2元の対に分割されているものとして，各対を線と呼ぶ．線の和集合となる S の部分集合をパリティ集合と呼ぶ．元の個数が最大の独立パリティ集合を求める問題が，Lawler [20] が導入したマトロイド・パリティ問題である．この問題は，最大マッチング問題とマトロイド交叉問題を特殊な場合として含む．

グラフ $G = (W, E)$ において，各枝とその端点との組を半枝と呼び，半枝の全体を S とする．すなわち，$S = \{(e, v) \mid e \in E, v \in W, v \in \partial e\}$ とする．ただし，∂e は，e の端点の集合を表す．各点に接続する半枝を高々1個含む部分集合を独立集合とする分割マトロイド $(S, \mathcal{I})$ を考える．台集合 S は，各枝に由来する半枝対に分割されている．枝集合の部分集合は，この分割に関するパリティ集合に対応する．特に，マッチングは，独立パリティ集合となる．したがって，最大マッチング問題は，分割マトロイド上のマトロイド・パリティ問題となる．

台集合 E を共有するマトロイド対 $\mathbf{M}_1 = (E, \mathcal{I}_1)$, $\mathbf{M}_2 = (E, \mathcal{I}_2)$ に対して，E の複製 E_1, E_2 を作り，自然な全単射 $\pi_1 : E \to E_1$, $\pi_2 : E \to E_2$ を考える．このとき，$S = E_1 \cup E_2$ とその部分集合族 $\mathcal{I} = \{\pi_1(I_1) \cup \pi_2(I_2) \mid I_1 \in \mathcal{I}_1, I_2 \in \mathcal{I}_2\}$ の組 $(S, \mathcal{I})$ は，マトロイドとなり，直和マトロイド $\mathbf{M}_1 \oplus \mathbf{M}_2$ と呼ばれる．台集合 S は，各 $e \in E$ に由来する元の対 $\{\pi_1(e), \pi_2(e)\}$ に分割されている．この分割に関するパリティ集合は，E の部分集合の複製の直和の形になっている．特に，独立パリティ集合 $J \subseteq S$ は，共通独立集合 $I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ に由来し，$J = \pi_1(I) \cup \pi_2(I)$ と書かれる．したがって，マトロイド交叉問題は，直和マトロイド上のマトロイド・パリティ問題となる．

既に述べた様に，マッチング問題とマトロイド交叉問題には，最適値を特徴付ける最大最小定理が成立し，効率的なアルゴリズムが存在する．そのため，両者の共通の一般化であるマトロイド・パリティ問題にも同様に最大最小定理や多項式時間解法があると期待される．しかし，マトロイド・パリティ問題は，予想外に一般的な枠組みであり，多項式時間解法が存在し得ないことが証明されている．

有限集合 S が2元の組に分割されているとする．すなわち，$n := |S|$ は偶数である．この分割に関するパリティ集合の全体を Π と書くことにする．偶数 $k \leq n$ を用いて，

$$\mathcal{B} := \{B \subseteq S : |B| = k, B \notin \Pi\}$$

とすると，$\mathcal{B}$ はマトロイドの基族となる．このマトロイドに関するパリティ問題では，明らかにパリティ基が存在しないため，最大独立パリティ集合の大きさは，$k-2$ となる．一方，$|F| = k$ である任意のパリティ集合 $F \in \Pi$ に着目して，$\mathcal{B}_F := \mathcal{B} \cup \{F\}$ とすると，$\mathcal{B}_F$ もマトロイドの基族となる．このマトロイドに関するパリティ問題では，F がパリティ基となり，最適値は k である．マトロイド・パリティ問題が解けるならば，与えられたマトロイドの基族が $\mathcal{B}$ なのか, それとも何らかの $|F| = k$ となる $F \in \Pi$ に対する $\mathcal{B}_F$ なのかに応じて，異なる結果が得られる．しかし，両者を区別するには，独立性判定オラクルを少なくとも $\binom{n/2}{k/2}$ 回だけ呼ぶ必要がある．したがって，

マトロイド・パリティ問題に対する多項式時間アルゴリズムは存在し得ない．この事実が “P $\neq$ NP” の予想とは独立に導かれていることに注意する．

6. 線型マトロイド・パリティ

体 $\mathbf{K}$ 上の $r \times n$ 行列 A の行集合を U, 列集合を V とする．列ベクトルの線型独立性によって，V 上のマトロイド $\mathbf{M} = (V, \mathcal{I})$ が自然に定義される．すなわち，独立集合族は $\mathcal{I} = \{J \mid \operatorname{rank} A[U,J] = |J|\}$ となる．ここで，$A[U,J]$ は，行集合 U と列集合 $J \subseteq V$ で定まる A の小行列を意味する．

列集合 V は元の個数が偶数であり，線と呼ばれる 2 元の組に分割されているとし，線の集合を L と書くことにする．マトロイド $\mathbf{M}(A) = (V, \mathcal{I})$ において最大独立パリティ集合の元の個数を $\nu(A, L)$, そこに含まれる線の本数を $\mu(A, L)$ と表す．

各線 $\ell \in L$ に対応した 2×2 交代行列

$$D_\ell = \begin{bmatrix} 0 & -\tau_\ell \\ \tau_\ell & 0 \end{bmatrix}$$

を対角ブロックとするブロック対角行列を D を考える．ここで，τ_ℓ は不定元とする．さらに，交代行列

$$\Phi_A = \begin{bmatrix} O & A \\ -A^\top & D \end{bmatrix}$$

を用いることによって，線型マトロイド・パリティ問題の最適値 $\nu(A, L)$ が以下の補題によって特徴付けられる．

補題 3 ([13]) 行列 A と線集合 L で定まるマトロイド・パリティ問題に対して，

$$\nu(A, L) = \operatorname{rank} \Phi_A - |V|.$$

この特徴付けに基づき，不定元にランダムな値を代入することによって，線型マトロイド・パリティ問題を高い確率で解く効率的な乱択アルゴリズムが設計できる．実際，Lovász [23] は，別の交代行列を用いて同様の手法を初めて導入した．マッチングやマトロイド交叉に対する Harvey [15] の技法を拡張することによって，Cheung, Lau, Leung [3] が計算量を $O(nr^{\omega-1})$ に改善している．ここで，ω は高速行列乗算の指数であり，高々 2.38 である．

決定性多項式時間アルゴリズムを設計するには，補題 3 の様な形の特徴付けだけでは不十分で，Lovász [24] による最大最小定理が鍵となる．行列 A の行変形で得られる行列 A' に対して，$\mu(A, L) = \mu(A', L)$ が成り立つ．また，行部分集合 $K \subseteq U$ に対して，$\mu(A, L) \leq \mu(A[U \setminus K, V], L) + |K|$ が成り立つ．さらに，V のパリティ集合への分割 $\{V_1, \ldots, V_k\}$ に対して，$\mu(A, L) \leq \sum_{j=1}^{k} \lfloor \frac{\operatorname{rank} A[U, V_j]}{2} \rfloor$ が成り立つ．これらの関係式を用いて得られる $\mu(A, L)$ の上界がタイトであるというのが，Lovász の定理の主張である．

定理 4 (Lovász [24]) 行列 A の行変形で得られる行列 A', 行部分集合 K, 列集合 V のパリティ集合への分割 $\{V_1, \ldots, V_k\}$ に対して，

$$\mu(A, L) \leq |K| + \sum_{j=1}^{k} \lfloor \frac{\operatorname{rank} A[U \setminus K, V_j]}{2} \rfloor$$

が成り立つ．不等号が等号で成立するような行列 A', 行部分集合 K, 分割 $\{V_1, \dots, V_k\}$ が存在する．

さらに，Lovász [26] は，定理 4 の証明を基にして，多項式時間アルゴリズムを設計した．このアルゴリズム自体は，多項式時間とはいうものの，計算量が $O(n^{10})$ であり，効率的とは言い難いものであった．続いて，Gabow–Stallmann [12] が，$O(r^{\omega}n)$ 時間で終了する増加道アルゴリズムを設計した．Gabow–Stallmann のアルゴリズムは，Lovász の定理の別証明を与える形になっている．一方，Orlin–Vande Vate [32] は，Lovász の定理を前提とし，これを利用することで，マトロイド交叉問題を繰り返し解く形の $O(r^4n)$ 時間アルゴリズムを示した．後に，Orlin [31] が，このアルゴリズムを改良して，実行時間を $O(r^3n)$ に削減している．

7. 最小重みパリティ基問題

行列 A の定める線型マトロイド $\mathbf{M}(A)$ において，台集合 V が線に分割されていて，各線 $\ell \in L$ の重み w_ℓ が与えられているものとする．マトロイド $\mathbf{M}(A)$ の基で，パリティ集合となっているものをパリティ基と呼ぶ．パリティ基が存在するためには，階数 $\operatorname{rank} A$ が偶数でなければならない．

パリティ基 B の重みを $w(B) := \sum_{\ell \subseteq B} w_\ell$ で定め，重み最小のパリティ基を求める問題を考える．マトロイド・パリティ問題の重み付き版としては，この他に，重みの総和が最大となる独立パリティ集合を求める問題も考えられるが，この問題も最小重みパリティ基問題に帰着できる．

パリティ基の最小重みを特徴付けるために，交代多項式行列を用いた定式化を考える．各線 $\ell \in L$ に対応した 2×2 交代多項式行列

$$D_\ell(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & -\tau_\ell \theta^{w_\ell} \\ \tau_\ell \theta^{w_\ell} & 0 \end{bmatrix}$$

を対角ブロックとしたブロック対角行列を $D(\theta)$ とする．パリティ基の最小重み $\zeta(A, L, w)$ は，交代多項式行列

$$\Phi_A(\theta) = \begin{bmatrix} O & A \\ -A^\top & D(\theta) \end{bmatrix}$$

のパフィアンを用いて，以下の様に特徴付けられる．

補題 5 行列 A, 線集合 L, 重み w で定まる最小重みパリティ基問題に対して，

$$\zeta(A, L, w) = \deg \operatorname{Pf} \Phi_A(\theta) - \sum_{\ell \in L} w_\ell.$$

この特徴付けを出発点とし，双対変数を導入した上で，線型マトロイド・パリティに対する Gabow–Stallmann [12] の増加道アルゴリズムと Murota [30] の組合せ緩和法を基にした主双対アルゴリズムが設計されている [17]．

定理 6 線型マトロイド上の最小重みパリティ基問題に対して，$O(rn^3)$ 回の算術演算で最適解が計算できる．ただし，$r = |U|$, $n = |V|$.

8. 応用

線型マトロイド・パリティは，受動的電気回路の構造可解性 [29], 平面トラス構造の釘付け [27], グラフの最大種数閉曲面への胞体埋込み [11] など，広い範囲に応用がある．一方，重み付き線型マトロイド・パリティの応用は，それほど多く知られている訳ではない．ここでは，組合せ最適化への応用を二つ紹介する．

グラフの中で与えられた点集合を両端とする路で内点が重ならないものの最大本数に関する Mader [28] の最大最小定理に対して，Lovász [24] は，マトロイド・パリティ問題としての定式化を通じた別証明を与えた．より直接的な線型マトロイド・パリティ問題への帰着が Schrijver [34] に記述されている．最近の論文で，Yamaguchi [37] は，各枝に長さが与えられているときに，最大本数の内点素路の詰込みの内で，長さの合計が最小となるものを求める問題が重み付き線型マトロイド・パリティ問題に帰着されることを示した．

Steiner 木問題に対して，グラフ的マトロイド上の重み付きパリティ問題を解くことによって，5/3 近似解が得られることが Prömel–Steger [33] によって示された．当時としては最良の近似比を達成していたが，現在では，改善された近似比のアルゴリズムが知られている [1]．今後，他の組合せ最適化問題に対する近似アルゴリズムの設計で，重み付き線型マトロイド・パリティの応用が期待される．

参考文献

[1] J. Byrka, F. Grandoni, T. Rothvoss, L. Sanità: Steiner tree approximation via iterative randomized rounding, *J. ACM*, 60 (2013), 6: 1–33.

[2] P. M. Camerini, G. Galbiati, and F. Maffioli: Random pseudo-polynomial algorithms for exact matroid problems, *J. Algorithms*, 13 (1992), 258–273.

[3] H. Y. Cheung, L. C. Lau, and K. M. Leung: Algebraic algorithms for linear matroid parity problems, *ACM Trans. Algorithms*, 10 (2014), 10: 1–26.

[4] J. Edmonds: Paths, trees, and flowers, *Canadian J. Math.* 17 (1965), 449–467.

[5] J. Edmonds: Maximum matching and a polyhedron with 0, 1-vertices, *J. Research National Bureau of Standards*, Section B, 69 (1965), 125–130.

[6] J. Edmonds: Minimum partition of a matroid into independent sets, *J. Research National Bureau of Standards*, Section B, 69 (1965), 67–72.

[7] J. Edmonds: Matroid partition, *Mathematics of the Decision Sciences: Part 1* (G.B. Dantzig and A.F. Veinott, eds.), AMS, 1968, 335–345.

[8] J. Edmonds: Matroids, submodular functions, and certain polyhedra, *Combinatorial Structures and Their Applications* (H. Hanani, N. Sauer, and J. Schönheim, eds.), Gordon and Breach, 1970, 69–87.

[9] J. Edmonds: Matroids and the greedy algorithm, *Math. Programming*, 1 (1971), 127–136.

[10] J. Edmonds: Matroid intersection, *Ann. Discrete Math.*, 4 (1979), 39–49.

[11] M. L. Furst, J. L. Gross, and L. A. McGeoch: Finding a maximum-genus graph imbedding, *J. ACM*, 35 (1988), 523–534.

[12] H. N. Gabow and M. Stallmann: An augmenting path algorithm for linear matroid parity, *Combinatorica*, 6 (1986), 123–150.

[13] J. F. Geelen and S. Iwata: Matroid matching via mixed skew-symmetric matrices, *Combinatorica*, 25 (2005), 187–215.

[14] J. F. Geelen, S. Iwata, and K. Murota: The linear delta-matroid parity problem, *J. Combinatorial Theory*, Ser. B, 88 (2003), 377–398.

[15] N. J. A. Harvey: Algebraic algorithms for matching and matroid problems, *SIAM J. Comput.*, 39 (2009), 679–702.

[16] M. Iri and N. Tomizawa: An algorithm for finding an optimal "independent assignment", *J. Oper. Res. Soc. Japan*, 19 (1976), 32–57.

[17] S. Iwata and Y. Kobayashi: A weighted linear matroid parity algorithm, *Proceedings of the 49th ACM Annual Symposium on Theory of Computing*, 2017, 264–276.

[18] P. M. Jensen and B. Korte: Complexity of matroid property algorithms, *SIAM J. Comput.*, 11 (1982), 184–190.

[19] J. B. Kruskal, Jr.: On the shortest tree of a graph and the traveling salesman problem, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 7 (1956), 48–50.

[20] E.L. Lawler: Matroid intersection algorithms, *Math. Programming*, 9 (1975), 31–56.

[21] E.L. Lawler: *Combinatorial Optimization — Networks and Matroids*, Holt, Rinehart, and Winston, 1976.

[22] J. Lee, M. Sviridenko, and J. Vondrák: Matroid matching: The power of local search, *SIAM J. Comput.*, 42 (2013), 357–379.

[23] L. Lovász: On determinants, matchings, and random algorithms, *Fundamentals of Computation Theory*, L. Budach ed., Academie-Verlag, 1979, 565–574.

[24] L. Lovász: Selecting independent lines from a family of lines in a space, *Acta Sci. Math.*, 42 (1980), 121–131.

[25] L. Lovász: Matroid matching and some applications, *J. Combinatorial Theory*, Ser. B, 28 (1980), 208–236.

[26] L. Lovász: The matroid matching problem, *Algebraic Methods in Graph Theory*, Colloq. Math. Soc. János Bolyai, 25 (1981), 495–517.

[27] L. Lovász and M. D. Plummer: *Matching Theory*, North-Holland, Amsterdam, 1986.

[28] W. Mader: Über die Maximalzahl krezungsfreier H-Wege, *Arch. Math.*, 31 (1978), 387–402, 1978.

[29] M. M. Milić: General passive networks — Solvability, degeneracies, and order of complexity, *IEEE Trans. Circuits Syst.*, 21 (1974), 177–183.

[30] K. Murota: Computing the degree of determinants via combinatorial relaxation, *SIAM J. Comput.*, 24 (1995), 765–796.

[31] J. B. Orlin: A fast, simpler algorithm for the matroid parity problem, *Proceedings of the 13th International Conference on Integer Programming and Combinatorial Optimization*, LNCS 5035, Springer-Verlag, 2008, 240–258.

[32] J. B. Orlin and J. H. Vande Vate: Solving the linear matroid parity problem as a sequence of matroid intersection problems, *Math. Programming*, 47 (1990), 81–106.

[33] H. J. Prömel and A. Steger: A new approximation algorithm for the Steiner tree problem with performance ratio 5/3, *J. Algorithms*, 36 (2000), 89–101.

[34] A. Schrijver: *Combinatorial Optimization — Polyhedra and Efficiency*, Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[35] W. T. Tutte: The factorization of linear graphs, *J. London Math. Soc.*, 22 (1947), 107–111.

[36] H. Whitney: On the abstract properties of linear dependence, *Amer. J. Math*, 57 (1935), 509–533.

[37] Y. Yamaguchi: Shortest disjoint $\mathcal{S}$-paths via weighted linear matroid parity, *Proceedings of the 27th International Symposium on Algorithms and Computation*, 2016, 63: 1–13.