

# 3次元トポロジーにおける圏論的構造について

葉廣 和夫 (京大数理研)\*

## 1. 導入

1980年代の Jones [10] による絡み目の多項式不変量の発見以来、絡み目や3次元多様体のいわゆる量子不変量がたくさん構成されて、現在まで活発に研究されている ([14])。これらの不変量は多くの場合、タングルの圏や3次元コボルディズムの圏から、ベクトル空間の圏など代数的に定義される圏への関手として構成される。

### 1.1. コボルディズムの圏と位相的場の理論

ここでは、背景として、3次元のコボルディズムの圏と位相的場の理論について簡単に述べる。

曲面と(3次元)コボルディズムの圏  $\mathbf{C}$  を次のように定義する。

- $\mathbf{C}$  の対象は(連結とは限らない)有向閉曲面である。
- $\mathbf{C}$  における、曲面  $\Sigma$  から曲面  $\Sigma'$  への射は、 $\Sigma$  から  $\Sigma'$  へのコボルディズムの同相類である。ここで、 $\Sigma$  から  $\Sigma'$  へのコボルディズムとは、向きづけられたコンパクト3次元多様体であって、その境界と曲面  $-\Sigma \sqcup \Sigma'$  (ここで、 $-\Sigma$  は  $\Sigma$  の向きを逆にしたもの、 $\sqcup$  は非交和) との同一視が与えられているものであり、そのような2つのコボルディズムが同相であるとは、それらの間の向きを保つ同相であって、境界の同一視と適当な意味で compatible であるようなものが存在することをいう。
- $\mathbf{C}$  における射(コボルディズム)  $C : \Sigma \rightarrow \Sigma'$  と  $C' : \Sigma' \rightarrow \Sigma''$  の合成  $C' \circ C$  は、 $C$  と  $C'$  を曲面  $\Sigma'$  に沿って張り合わせることで得られる  $\Sigma$  から  $\Sigma''$  へのコボルディズム(の同相類)である。
- $\mathbf{C}$  の対象  $\Sigma$  の identity morphism はシリンダー  $\Sigma \times [0, 1]$  で与えられる。

圏  $\mathbf{C}$  には、対称 monoidal 圏の構造が入ることが知られている。ここでテンソル関手  $\otimes : \mathbf{C} \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$  は、(2次元および3次元)多様体の非交和で与えられ、単位対象は空な曲面で与えられる。また、圏  $\mathbf{C}$  の任意の対象  $\Sigma$  は双対  $-\Sigma$  を持つ。

Atiyah [1] によれば、3次元の位相的場の理論(topological quantum field theory, TQFT)とは、圏  $\mathbf{C}$  から(ある体の上の)有限次元ベクトル空間の圏  $\mathbf{Vect}$  への、双対を持つ対称 monoidal 圏の構造を保つ関手である。TQFT の2つの重要なクラスとして、Reshetikhin-Turaev タイプの TQFT と Turaev-Viro タイプの TQFT が知られている。

コボルディズムの圏  $\mathbf{C}$  と TQFT の、対称 monoidal 圏の枠組みを使ったこの定式化についての一つの問題点は、曲面やコボルディズムの「内部構造」へアクセスするた

本研究は科学研究費補助金基盤研究(C)(課題番号:15K04873)の助成を受けている。

2010 Mathematics Subject Classification: 57M27, 57M25

キーワード: 3-dimensional topology, monoidal category

\* 〒606-8502 京都市左京区北白川追分町 京都大学 数理解析研究所

e-mail: habiro@kurims.kyoto-u.ac.jp

web: <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~habiro/>

めの代数的な手段を与えていないことである。圏  $\mathcal{C}$  の対象は、いくつかの連結成分を持つ閉曲面であるから、 $\Sigma_{n_1} \otimes \cdots \otimes \Sigma_{n_k}$ ,  $k \geq 0, n_1, \dots, n_k \geq 0$  (ここで  $\Sigma_n$  は種数  $n$  の有向閉曲面) とかける。各成分  $\Sigma_{n_i}$  は、 $n_i$  個のハンドルを含んでいるが、これらのハンドルへの操作を取り扱うためには、対称 monoidal 圏の枠組みは不十分である。

## 1.2. 高次のコボルディズム圏と extended TQFT

閉曲面の中のハンドルなど、多様体の「内部構造」を取り扱うためには、コボルディズムの圏の定義を適切なやり方で拡張または精密化してやる必要がある。このための一つの自然な枠組みは、2 圏や  $n$  圏など高次の圏としてのコボルディズム圏とその上の (高次の) 関手であるいわゆる extended TQFT である。例えば、Bartlett, Douglas, Schommer-Pries, Vicary [2] において考察されている 2 圏  $\mathbf{Bord}_{123}^{\text{or}}$  は、対象として (連結とは限らない) 有向閉 1 次元多様体を持ち、1 射として、2 次元のコボルディズム、2 射として 3 次元のコボルディズムの同相類を持つ。この枠組みにおいては、例えば、種数  $g$  の閉曲面  $\Sigma_g$  は  $\mathbf{Bord}_{123}^{\text{or}}$  における 1 射  $\Sigma_g : \emptyset \rightarrow \emptyset$  として、次のような 1 射の合成としてかける。

$$\emptyset \xrightarrow{D^2} S^1 \xrightarrow{\Sigma_{1,2}} \cdots \xrightarrow{\Sigma_{1,2}} S^1 \xrightarrow{D^2} \emptyset.$$

ここで、 $\Sigma_{1,2} : S^1 \rightarrow S^1$  は種数 1 で境界が  $S^1 \sqcup S^1$  であるような曲面を  $S^1$  からそれ自身へのコボルディズムとみなしたものである。この枠組みでは、 $\Sigma_g$  の  $g$  個のハンドル (つまり  $\Sigma_{1,2}$ ) に対して個別に代数的操作を行うことができる。

## 1.3. Crane, Yetter, Kerler のコボルディズム圏 Cob

Crane と Yetter [4] と Kerler [11] は、上記の 2 圏  $\mathbf{Bord}_{123}^{\text{or}}$  とは異なるやり方で、多様体の「内部構造」にアクセスできるような枠組みを導入した。

圏  $\mathbf{Cob}$  を次のように定義する。

- $\mathbf{Cob}$  の対象は非負整数  $0, 1, 2, \dots$  である。(ただし、 $n$  は以下の曲面  $\Sigma_{n,1}$  と同一視してもよい。)
- $\mathbf{Cob}$  における対象  $m$  から  $n$  への射は、曲面  $\Sigma_{m,1}$  と  $\Sigma_{n,1}$  の間のコボルディズムの同相類である。ここで、 $m \geq 0$  に対して  $\Sigma_{m,1}$  は種数  $m$  で境界が円周と同相であるような曲面で、同相写像  $S^1 \cong \partial \Sigma_{m,1}$  が与えられているとする。 $\Sigma_{m,1}$  と  $\Sigma_{n,1}$  の間のコボルディズムとは、コンパクト連結有向 3 次元多様体  $M$  と同相写像  $\varphi : -\Sigma_{m,1} \cup (S^1 \times [0, 1]) \cup \Sigma_{n,1} \xrightarrow{\cong} \partial M$  の組であり、 $\Sigma_{m,1}$  と  $\Sigma_{n,1}$  の間のコボルディズム  $(M, \varphi)$  と  $(M', \varphi')$  が同相であるとは、 $M$  と  $M'$  の間の同相写像で適当な意味で  $\varphi$  および  $\varphi'$  と compatible であるようなものが存在することをいう。
- $\mathbf{Cob}$  における射の合成と単位射は、 $\mathcal{C}$  のときと同様に、コボルディズムの貼り合わせとシリンダーで与えられる。(詳細は省く。)

ここで、 $\mathcal{C}$  の場合と異なり、 $\mathbf{Cob}$  において扱う曲面と 3 次元コボルディズムは常に連結であるということを強調しておく。

次節で  $\mathbf{Cob}$  の部分圏と同一視できる圏  $\mathcal{B}$  を定義し説明を行うので、ここでは  $\mathbf{Cob}$  の基本的な構造について簡単に述べるにとどめる。圏  $\mathbf{Cob}$  には、 $\mathcal{C}$  とは異なるやり方で monoidal 圏の構造を入れることができる。対象  $m, n$  に対しては、 $m \otimes n = m + n$  であり、 $\Sigma_{m,1}$  と  $\Sigma_{n,1}$  の境界連結和が  $\Sigma_{m+n,1}$  と同相であることに対応している。射のテンソ

ルも同様に境界連結和によって定義される。圏  $\mathbf{Cob}$  は、対称 monoidal 圏ではないが、braiding が定義され、任意の対象が双対を持つ。また、braided monoidal 圏  $\mathbf{Cob}$  の対象 1 には、Hopf monoid の構造が入ることが Crane–Yetter, Kerler によって観察されている。

## 2. ハンドルボディ内の底タングルの圏 $\mathcal{B}$

ここでは、[7]において定義した圏  $\mathcal{B}$  と、ribbon Hopf 代数  $A$  に付随して定義される関手  $F_A : \mathcal{B} \rightarrow \text{Mod}_A$  (ここで、 $\text{Mod}_A$  は  $A$ -加群の圏を表す) について説明する。

### 2.1. 底タングルの圏 $\mathcal{B}$ とその braided monoidal 構造

圏  $\mathcal{B}$  は対象として非負整数  $0, 1, 2, \dots$  をもつ。Hom set  $\mathcal{B}(m, n)$  を定義するためにハンドルボディ内の底タングルを以下で定義する。

非負整数  $m$  に対して、立方体  $[0, 1]^3$  の上の面に  $m$  個の 1-handle を付けて得られる、種数  $m$  のハンドルボディを  $V_m$  で表す (図 1 参照)。図のように  $V_m$  の底面内の線分  $l$  を定める。

$V_m$  中の  $n$  成分底タングルとは、 $V_m$  中の枠付きタングル (proper な 1 次元部分多様体で framing を持つ)  $t = t_1 \cup \dots \cup t_n$  で、次を満たすものことである。

1.  $\partial t$  の各成分  $t_i$  の境界は  $l$  の上にある。
2.  $\partial t$  の点を左から順に  $p_1, \dots, p_{2n}$  とするとき、各  $i = 1, \dots, n$  に対して  $\partial t_i = \{p_{2i-1}, p_{2i}\}$  が成り立つ。

各成分  $t_i$  の framing の定義はやや煩雑であるので、ここでは次のように考える。図 2 のように線分  $[0, 1]$  に  $n$  個のバンドを付けて得られる図形を  $T_n$  とする。 $T_n$  の  $V_m$  への埋め込み  $f : T_n \hookrightarrow V_m$  で、 $[0, 1]$  を  $l$  に移し、各バンドの「中心線」を  $t_i$  達に移すようなものを考えて、これらのバンドの埋め込みが定める  $t_i$  達の framing を表すことができる。(あるいはそのような埋め込み  $f$  を底タングルと呼んでもよい。)

図 3 に  $T_n$  の埋め込みの形で与えられた底タングルの例を示す。このような図は複雑なので、 $V_m$  と底タングルの平面への射影を用いて図示する (図 4)。ここで、いわゆる blackboard framing によって framing を指定する。

2 つの  $n$  成分底タングル  $t, t'$  がイソトピックであるとは、 $V_n$  のアンビエントイソトピーで  $l$  を集合として保つものが存在して、 $t$  と  $t'$  が移りあうことをいう。圏  $\mathcal{B}$  の Hom set  $\mathcal{B}(m, n)$  を  $V_m$  中の  $n$  成分底タングルのイソトピー類の集合と定義する。

恒等射  $\text{id}_m : m \rightarrow m$  は図 5 で定める。

$\mathcal{B}$  における射の合成は次のように定義する。 $f \in \mathcal{B}(l, m)$ ,  $g \in \mathcal{B}(m, n)$  がそれぞれ埋め込み  $f : T_m \hookrightarrow V_l$ ,  $g : T_n \hookrightarrow V_m$  により与えられているとする。このとき、底タングル  $\text{id}_m$  により、 $T_m$  を  $V_m$  中の底タングルとすることができる。埋め込み  $f : T_m \hookrightarrow V_l$  の  $V_m$  へ拡張して、埋め込み  $\tilde{f} : V_m \hookrightarrow V_l$  を得る。ここで、 $\tilde{f}$  は  $V_m$  の底面を  $V_l$  の底面へ identical に移す。埋め込みの合成

$$\tilde{f} \circ g : T_n \hookrightarrow V_l$$

を合成  $gf \in \mathcal{B}(l, n)$  を表す埋め込みとする。合成の具体例を図 6 に挙げる。

上の定義により、 $\mathcal{B}$ は圏をなすことがわかる。また、上の定義からわかるように、 $\mathcal{B}$ は、ハンドルボディ $V_m$  ( $m \geq 0$ )を対象とし、底面を保つ埋め込みのイソトピー類を射とする圏 $\mathcal{H}$ の逆 $\mathcal{H}^{\text{op}}$ と同型である。

圏 $\mathcal{B}$ は次のようなbraided monoidal構造をもつ。まず $m, n \geq 0$ に対して $m \otimes n = m+n$ である。射 $f, g$ に対して、 $f \otimes g$ は $f$ と $g$ を横に並べることにより得られる(図7)。単位対象は0である。braidingは図8で与えられる。

## 2.2. $\mathcal{B}$ のCobへの埋め込み

関手 $C: \mathcal{B} \rightarrow \mathbf{Cob}$ を次のように定義する。対象に対しては、 $C(n) = n$ である。 $\mathcal{B}$ の中の射 $f: m \rightarrow n$ を定義する埋め込み $f: T_n \hookrightarrow V_m$ に対して、 $f$ の $T_n \hookrightarrow V_n$ に沿った拡張 $\tilde{f}: V_n \hookrightarrow V_m$ が存在することを思い出そう。このような埋め込み $\tilde{f}$ は、 $\tilde{f}(V_n) \cap \partial V_n$ がちょうど $V_n$ の底面と一致するように取ることができる。このとき、 $V_m \setminus \tilde{f}(V_n)$ の閉包 $\overline{V_m \setminus \tilde{f}(V_n)}$ は、曲面 $\Sigma_{m,1}$ と曲面 $\Sigma_{n,1}$ の間のコボルディズムとみなすことができる。このコボルディズムを $C(f)$ とおくことにより、関手 $C: \mathcal{B} \rightarrow \mathbf{Cob}$ が定義されることがわかる。この関手は忠実であり、braided monoidal構造を保つ。

## 2.3. $\mathcal{B}$ の中のHopf代数構造

まず一般のbraided monoidal圏 $\mathcal{C}$ の中の**Hopf monoid** (Hopf algebra, Hopf object などとも呼ばれる) の概念を思い出しておく。 $\mathcal{C}$ の単位対象を $I$ で表し、braidingを $\psi_{X,Y}: X \otimes Y \rightarrow Y \otimes X$ で表す。 $\mathcal{C}$ の中のHopf monoidとは、 $\mathcal{C}$ の対象 $H$ と射

$$\mu: H \otimes H \rightarrow H, \quad \eta: I \rightarrow H, \quad \Delta: H \rightarrow H \otimes H, \quad \epsilon: H \rightarrow I, \quad S: H \rightarrow H$$

の組で、次を満たすもののことである。

$$\begin{aligned} \mu(\mu \otimes H) &= \mu(H \otimes \mu), & \mu(\eta \otimes H) &= \text{id}_H = \mu(H \otimes \eta), \\ (\Delta \otimes H)\Delta &= (H \otimes \Delta)\Delta, & (\epsilon \otimes H)\Delta &= \text{id}_H = (H \otimes \epsilon)\Delta, \\ \epsilon\eta &= \text{id}_I, & \epsilon\mu &= \epsilon \otimes \epsilon, & \Delta\eta &= \eta \otimes \eta, \\ \Delta\mu &= (\mu \otimes \mu)(H \otimes \psi_{H,H} \otimes H)(\Delta \otimes \Delta), \\ \mu(S \otimes H)\Delta &= \eta\epsilon = \mu(H \otimes S)\Delta. \end{aligned}$$

これらの等式はHopf代数の公理を形式的にbraided monoidal圏の射に対して当てはめて得られるものである。ただし、通常のHopf代数が持っている係数体上のベクトル空間の構造をHopf monoidは一般には持たない。

braided monoidal圏 $\mathcal{B}$ の対象1は図9のHopf monoid構造を持つ。 $(S^{-1}$ は $S$ の逆射である。) この構造を $C: \mathcal{B} \rightarrow \mathbf{Cob}$ で $\mathbf{Cob}$ に移してやると、Crane–Yetter, Kerlerが得た $\mathbf{Cob}$ の中のHopf monoid構造と一致する。

braided monoidal圏 $\mathcal{B}$ は、Hopf monoidの構造射 $\mu, \eta, \Delta, \epsilon, S, S^{-1}$ と図10で定義される射

$$r^+, r^-: 0 \rightarrow 1$$

により生成される。つまり、 $\mathcal{B}$ における任意の射は、恒等射、braidingとその逆、および上記の射の有限個のコピーから、テンソル積と合成を繰り返して得ることができる。

この事実から、例えば次のようなことがわかる。 $S^3$ の中の $n$ 成分絡み目 $L = L_1 \cup \dots \cup L_n$ は、 $V_0 = [0, 1]^3$ の中の $n$ 成分底タングル $t: 0 \rightarrow n$ を「閉じる」ことにより得ら

れる (図 1 1)。そして、そのような底タングルは、 $\mathcal{B}$  を生成する基本的な底タングルたちのテンソル積と合成でできているので、そのような  $\mathcal{B}$  を生成する射たちの代数的な性質を調べることにより結び目理論を研究できないかという期待が生まれる。実際、[6] で定義したクラスパーの Hopf 代数的な性質は  $\mathcal{B}$  および  $\mathbf{Cob}$  における Hopf monoid 構造と対応しており、群論における commutator calculus の  $\mathcal{B}$  と  $\mathbf{Cob}$  における対応物を考えることが、クラスパーの手術によって生成される同値関係を調べることに対応する。

#### 2.4. ribbon Hopf 代数 $A$ に付随する関手 $F_A : \mathcal{B} \rightarrow \text{Mod}_A$

体  $k$  を固定し、以下では  $k$  上の代数を考える。ribbon Hopf 代数 [15] とは、Hopf 代数  $A = (A, \mu, \eta, \Delta, \epsilon, S)$  と元

$$R \in A \otimes A, \quad r \in A$$

の組  $(A, R, r)$  で次の条件を満たすものである。

1.  $R$  は可逆であり、

$$\begin{aligned} R\Delta(x)R^{-1} &= \Delta^{\text{op}}(x) \quad (x \in A), \\ (\Delta \otimes \text{id})(R) &= R_{13}R_{23}, \quad (\text{id} \otimes \Delta)(R) = R_{13}R_{12}, \end{aligned}$$

を満たす。 $R$  は universal R-matrix と呼ばれ、そのような  $R$  を持つ Hopf 代数  $A$  は quasitriangular Hopf 代数と呼ばれる [5]。

2.  $r$  は  $A$  の中心に入る可逆元で、

$$r^2 = uS(u), \quad S(r) = r, \quad \epsilon(r) = 1, \quad \Delta(r) = (R_{21}R_{12})^{-1}(r \otimes r)$$

を満たす。ここで、 $u \in A \otimes A$  は、 $u = \sum S(b) \otimes a$ ,  $R = \sum a \otimes b$ , により定義される可逆元である。 $r$  は ribbon 元と呼ばれる。

quasitriangular Hopf algebra  $A$  に対し、 $A$  加群の圏  $\text{Mod}_A$  に braided monoidal 圏の構造が入る [5]。また、ribbon Hopf algebra  $A$  に対して、有限次元  $A$  加群の圏  $\text{Mod}_A$  に ribbon 圏の構造が入ることが知られている [15]。このことは、 $A$  に付随して、タングルの圏から  $\text{Mod}_A$  への braided monoidal 圏の構造を保つ関手があることと同等である。このように、ribbon Hopf 代数は、結び目や絡み目を含むタングルの量子不変量を定義するための基本的な代数的要素である。

ここで quasitriangular Hopf 代数の transmutation について思い出しておく。 $A$  が quasitriangular Hopf 代数であるとき、Hopf 代数の構造射のうち、 $\mu, \eta, \epsilon$  は、 $A$ -加群の射であるが、 $\Delta, S$  は一般にそうではないことが知られている。Majid は、 $\Delta, S$  を universal R-matrix を使ってひねることにより、 $A$ -加群の射

$$\underline{\Delta} : A \rightarrow A \otimes A, \quad \underline{S} : A \rightarrow A$$

を定義した。たとえば  $\underline{\Delta}$  は、

$$\underline{\Delta}(x) = \sum x_{(1)}S(b) \otimes a_{(1)}x_{(2)}S(a_{(2)}) \quad (x \in A)$$

(ただし  $\Delta(x) = \sum x_{(1)} \otimes x_{(2)}$ ,  $R = \sum a \otimes b$ ) により与えられる。このとき、 $A$  を随伴作用により  $A$ -加群と思うことにより、 $(A, \mu, \eta, \underline{\Delta}, \epsilon, \underline{S})$  は、 $\text{Mod}_A$  中の Hopf monoid となる。これを  $A$  の transmutation と呼ぶ。

定理 1. *ribbon Hopf*代数  $A$  が与えられたとき、*braided monoidal* 圏の構造を保つ関手

$$F_A : \mathcal{B} \rightarrow \text{Mod}_A$$

で、 $n \geq 0$  に対し  $F_A(n) = A^{\otimes n}$  を満たし、

$$F_A(\mu) = \mu, \quad F_A(\eta) = \eta, \quad F_A(\Delta) = \underline{\Delta}, \quad F_A(\epsilon) = \epsilon, \quad F_A(S) = \underline{S}, \quad F_A(r^+) = r$$

を満たすものが一意的に存在する。

$A$  が factorizable という性質を満たす有限次元 *ribbon Hopf* 代数である場合に、Kerler[12] は *braided monoidal* 関手

$$K_A : \widetilde{\mathbf{Cob}} \rightarrow \text{Mod}_A^{\text{fd}}$$

を構成している。これは閉3次元多様体の Hennings 不変量 [9] の一般化であり、Hennings TQFT とよばれている。ここで、 $\text{Mod}_A^{\text{fd}}$  は、有限次元  $A$ -加群の圏であり、 $\widetilde{\mathbf{Cob}}$  は  $\mathbf{Cob}$  のある「中心拡大」である。この場合には、 $F_A$  は、 $K_A$  の制限とみなすことができる。

### 3. その他の話題

時間が許す範囲で以下の話題についても言及したい。

#### 3.1. Lagrangian cobordism の圏 $\mathcal{LCob}$ のその上の LMO 関手、およびその精密化

圏  $\mathcal{B}$  と圏  $\mathbf{Cob}$  の中間にあるような圏（つまり、 $\mathcal{B}$  を含む  $\mathbf{Cob}$  の部分圏）で、Lagrangian cobordism のなす圏  $\mathcal{LCob}$  がある。 $\mathcal{LCob}$  における射は、 $\mathbf{Cob}$  における射である種のホモロジー的な性質を満たすものである。Cheptea, Massuyeau と筆者 [3] は、この圏の上で定義される関手（LMO 関手と呼ぶ）で、整係数ホモロジー球面の Le-村上-大槻不変量 [13] (LMO 不変量) を拡張するようなものを定義した。LMO 不変量は普遍有限型不変量とも呼ばれ、有限型不変量に対して普遍的な性質をもち、また、量子群から定義される多くの量子不変量よりも強いことが知られている。

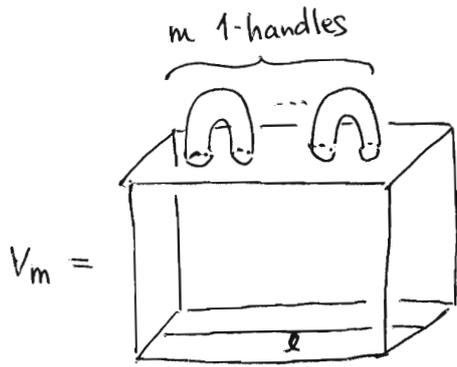
圏  $\mathcal{LCob}$  は特に、曲面の写像類群の Torelli 部分群や、ホモロジーシリンダーのなすモノイドを含んでいるので、これらの表現を与える。

Massuyeau と筆者 [8] は、 $\mathcal{B}$  で定義される、LMO 関手の精密化を定義した。これらの関手についても時間が許せば述べたい。

### 参考文献

- [1] M. F. Atiyah, Topological quantum field theory, Publ. Math. IHES 68 (1988) 175–186.
- [2] B. Bartlett, C. L. Douglas, C. J. Schommer-Pries and J. Vicary, Extended 3-dimensional bordism as the theory of modular objects, preprint, arXiv:1411.0945.
- [3] D. Cheptea, K. Habiro and G. Massuyeau, A functorial LMO invariant for Lagrangian cobordisms, *Geom. Topol.* 12 (2008) 1091–1170.
- [4] L. Crane and D. Yetter, On algebraic structures implicit in topological quantum field theories, *J. Knot Theory Ramifications* 8 (1999) 125–163.
- [5] V. G. Drinfeld, Quantum groups, Proc. of ICM Berkeley 1986. Providence, R.I. vol. 1 (1987) 798–820.
- [6] K. Habiro, Claspers and finite type invariants of links, *Geom. Topol.* 4 (2000) 1–83.
- [7] K. Habiro, Bottom tangles and universal invariants, *Algebr. Geom. Topol.* 6 (2006) 1113–1214.

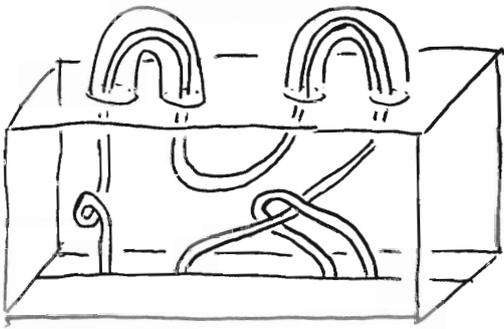
- [8] K. Habiro and G. Massuyeau, The Kontsevich invariant for bottom tangles in handlebodies, preprint arXiv:1702.00830.
- [9] M. Hennings, Invariants of links and 3-manifolds obtained from Hopf algebras, *J. London Math. Soc.* (2) 54 (1996) 594–624.
- [10] V. F. R. Jones, A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras, *Bull. Amer. Math. Soc.* (NS) 12 (1985) 103–111.
- [11] T. Kerler, Bridged links and tangle presentations of cobordism categories, *Adv. Math.* 141 (1999) 207–281.
- [12] T. Kerler, Genealogy of non-perturbative quantum invariants of 3-manifolds: the surgical family, “Geometry and physics (Aarhus, 1995)”, *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.* 184, Dekker, New York (1997) 503–547.
- [13] T. Q. T. Le, J. Murakami, T. Ohtsuki, On a universal quantum invariant of 3-manifolds, *Topology* 37 (1998) 539–574.
- [14] 大槻知忠, 結び目と3次元多様体の不変量, *数学* 55, 337–348, 2003.
- [15] N. Y. Reshetikhin, V. G. Turaev, Ribbon graphs and their invariants derived from quantum groups, *Comm. Math. Phys.* 127 (1990) 1–26.



☒ 1



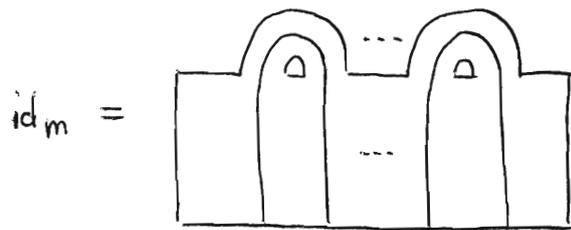
☒ 2



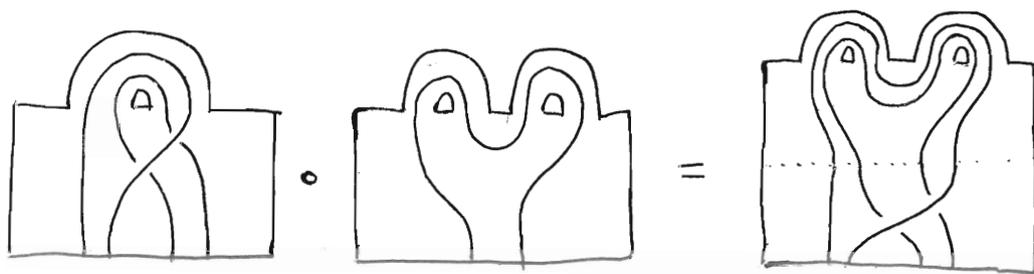
☒ 3



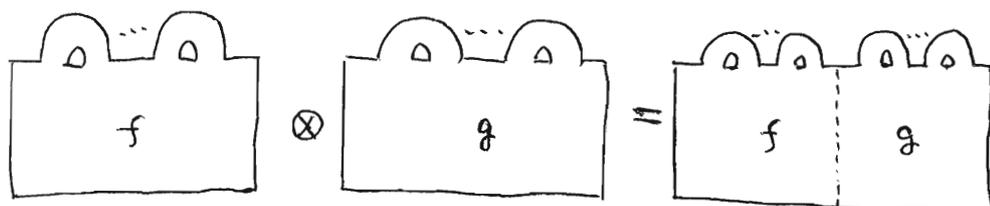
☒ 4



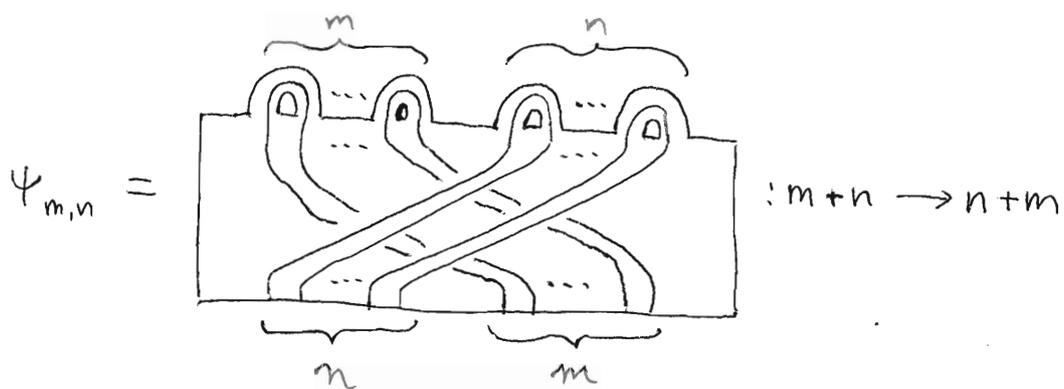
☒ 5



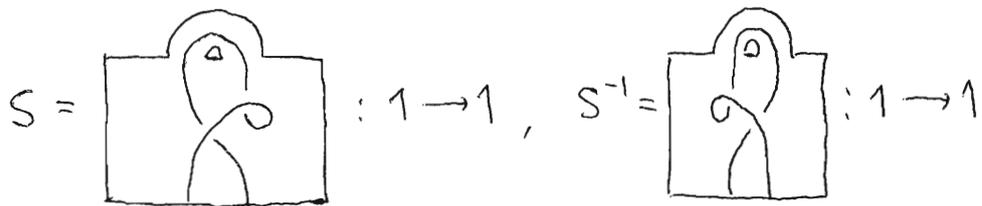
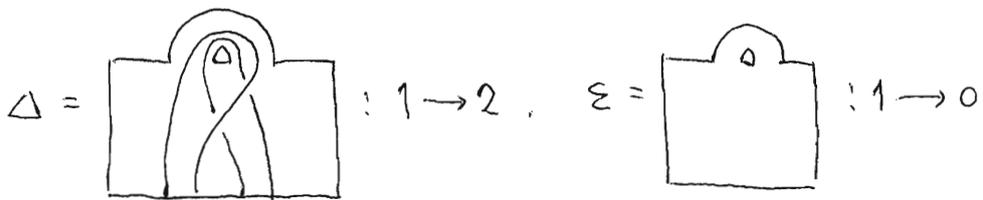
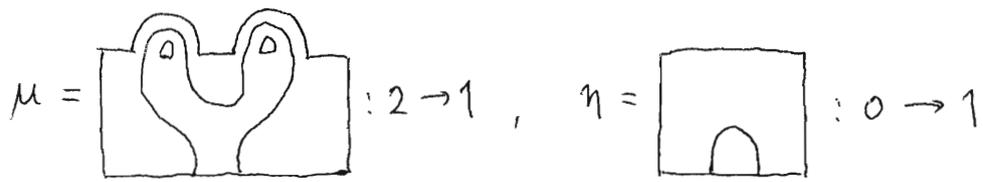
□ 6



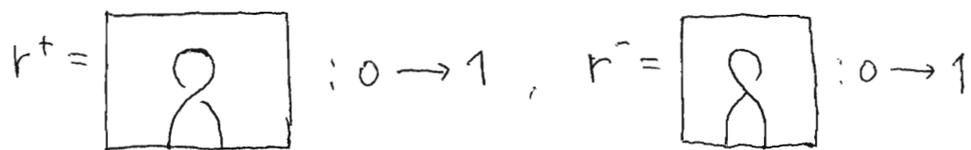
□ 7



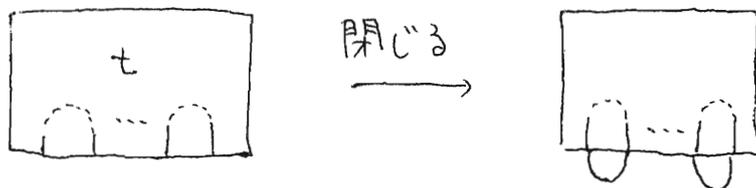
□ 8



☒ 9



☒ 10



☒ 11