

量子旗多様体と量子群の表現

谷崎 俊之 (大阪市立大学)*

1. 序

複素数体上の単純リー代数の無限次元既約最高ウェイト加群の指標の決定は、1970年代の表現論における最重要問題の一つであった。それ自体は純粋に代数的な問題であり、Jantzenらにより代数的手法による精力的な研究がなされたが、1980年前後におけるその最終的解決(Kazhdan-Lusztig予想[17]の証明, Brylinsky-柏原[8], Beilinson-Bernstein[5])においては、 D 加群や交叉ホモロジー等の幾何学的手法が縦横に用いられた¹。この理論の核心となったのは「表現の旗多様体上での局所化」、より正確には、リー代数の表現と旗多様体上の D 加群の対応関係(Beilinson-Bernstein対応)である。幾何学的新手法の導入により問題が一挙に解決されてしまったのであった。その後、筆者と柏原はこれをKac-Moodyリー代数にまで拡張した([11], ..., [16])。またBezrukavnikov-Mirković-Rumyninは、正標数における単純リー代数でも対応する理論を構築し、既約表現に関するLusztigの予想を解決した([6], [7])。

一方、1985年頃に神保道夫とDrinfeldは、量子群と呼ばれる新しい代数系を導入した。これはパラメータ q を含み、 $q=1$ のときが通常の単純リー代数(あるいはKac-Moodyリー代数)の包絡代数になる。その意味で、量子群はリー代数の q 類似と思える。よく知られているように、量子群の表現論はその後爆発的に進展し、これにより表現論の枠組みが大きく広がった。また、可積分系の理論やリー代数の表現論への応用も多く得られた。

筆者は1990年頃から、先に述べたリー代数の表現の旗多様体上での局所化の理論の量子群版が作れないかという問題意識を持つようになり、折に触れて考えてきた。量子群の幾何学的表現論と言ってもいいであろう。しかし、それにはいくつかの困難が伴う。

まず第一に、量子群の旗多様体とは何かという問題に遭遇する。リー代数の場合の旗多様体の構成を量子群の場合にまねようとする、どうしても非可換な関数環をもつ“空間”を考えなければならなくなる。したがって“量子旗多様体”は通常が多様体ではなく、非可換代数幾何学における対象であるところの非可換スキームと呼ぶべきものである。より正確には、量子旗多様体は、Manin[22], Artin-Zhang[2], Vervkin[35]による「非可換射影スキーム」として、数学的な意味付けを与えることができる。

第二に、量子群の表現の量子旗多様体上での局所化を考えようとする、今度は量子旗多様体上の微分作用素環(量子微分作用素環)とは何かという問題に遭遇する。Lunts-Rosenberg[18]は一般の非可換射影スキームに対してその上の微分作用素環の概念を導入し、量子旗多様体の場合には、これに関して、Beilinson-Bernstein対応の類似

本研究は科研費(基盤研究(C))(一般)課題番号:15K04790)の助成を受けたものである。

2010 Mathematics Subject Classification: 20G05, 17B37

キーワード: 量子群, 旗多様体, 表現, 非可換スキーム, D 加群

* 〒558-8585 大阪市住吉区杉本3-3-138 大阪市立大学 大学院理学研究科

e-mail: ttanisaki@icloud.com

¹ 表現論の研究者にとっては、天から新しい神が降臨したような驚天動地のできごとであった。[8]のプレプリントを初めて見たときに、これは一体何なんだろうと思い驚き怪しんだことを、今でも覚えている。あれから既に40年近い月日が流れてしまった。

が成り立つことを予想した。しかし、Lunts-Rosenberg の微分作用素環は通常の様体に対する微分作用素環と比べると、ずっと巨大なものになってしまう。筆者は、量子旗多様体の場合に限るが、より小さく、より reasonable な量子微分作用素環の定義を与え、これに関して Beilinson-Bernstein 対応の類似が成り立つことを証明した ([26])。まだ考えることはあるのだが、これで一応、量子群の幾何学的表現論の基礎付けはできたと言えるのではないと思う。

先に述べたように、Bezrukavnikov-Mirković-Rumynin は、正標数においても表現の旗多様体上での局所化の理論を確立したのであるが、最近 10 年ほどの筆者の研究の中心は、この理論の量子群版の構成である。一般的原理により、 q 類似の世界は、パラメータ q が 1 のべき根以外の場合には標数 0 の世界の類似と見えるが、 q が 1 のべき根の場合は正標数の世界の類似を扱っていると思える (q の乗法的位数が標数に対応する)。したがって Bezrukavnikov-Mirković-Rumynin の理論の量子群類似では、 q を 1 のべき根に特殊化して得られる量子旗多様体を考える事になる。この場合、正標数における Frobenius 写像の類似物であるところの「量子 Frobenius 写像」を用いると、実は、量子旗多様体を考えることと、通常の旗多様体上である種の非可換環の層を考えることが同等になる。その意味では、非可換代数幾何の呪縛が解けてしまい通常の (可換) 代数幾何学の言葉ですべてが記述できるので、ある意味話はわかりやすくなるとも言える。

さて、筆者がまねしようとしている正標数における Bezrukavnikov-Mirković-Rumynin の理論のポイントは、2 つある。一つは、正標数においても導来圏のレベルでは Beilinson-Bernstein 対応の類似が成り立つこと。もう一つは、正標数での微分作用素環は余接束の上で局所化できて東屋代数が得られるのであるが、旗多様体の場合には、この東屋代数をモーメント写像に関する 1 点の逆像に制限すると分裂東屋代数になること。以上の 2 点の類似を 1 のべき根における量子旗多様体で示すことが問題となる。もしこれができるれば、1 のべき根における量子群の既約表現に関する Lusztig の予想 [21] の一部が証明できたことになる。

まず後者に関しては [28] で完全に解決できた。1 のべき根における量子旗多様体に対して、その余接束およびモーメント写像の類似物 (量子余接束, 量子モーメント写像) が構成されて、量子微分作用素環を量子余接束の上で局所化したものを量子モーメント写像に関する 1 点の逆像に制限したものは、分裂東屋代数になることがわかる。

ただし前者の Beilinson-Bernstein 対応の類似は現時点では未解決である。[30] でこの問題を扱い、量子微分作用素環自身の有限部分の導来大域切断の問題に帰着させた。また、より最近、 A_n 型ではこれが正しいことが証明できた。

この講演では、上に述べた研究の概要を説明する予定である。

2. 非可換スキームとしての量子旗多様体

G を $\mathbb{C}$ 上の連結かつ単連結な単純代数群とする。また B, B^- をその Borel 部分群であって $T = B \cap B^-$ が G の極大トーラスとなるものとする。このとき

$$\mathcal{B} = B^- \backslash G$$

を G の旗多様体と呼ぶ。これは、射影代数多様体であり、affine 開被覆

$$\mathcal{B} = \bigcup_{w \in W} U_w, \quad U_w = B^- \backslash B^- Bw \quad (W \text{ は Weyl 群})$$

を持つ．環の言葉では，次数付き可換環 $A = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} A(n)$ と可換環 R_w ($w \in W$) があって

$$\mathcal{B} = \text{Proj}(A), \quad U_w = \text{Spec}(R_w)$$

となる．

そこで，この量子群類似を構成したい．量子群を用いて A, R_w の類似物 $A_q, R_{w,q}$ が自然に得られる．これらは，それぞれ次数付き環および環ではあるが，可換ではない．それでも，ともかく

$$\mathcal{B}_q = \text{Proj}(A_q) = \bigcup_{w \in W} \text{Spec}(R_{w,q}) \quad (2.1)$$

に意味を持たせたい(したがって非可換代数幾何の世界に踏み込まざるを得ない)． $R_{w,q}$ という環があるので，局所的な話なら，この環を用いた定式化が可能であるが，大域的な話をしようと思うと，貼り合わせがどうなっているかを考えざるを得ない．そのためには，例えば $w_1, w_2 \in W$ に対する $\text{Spec}(R_{w_1,q}) \cap \text{Spec}(R_{w_2,q})$ がどのようなものであるかを知る必要が出てくる．通常の旗多様体の場合だと， R_{w_1} の積閉集合 S_{w_1, w_2} が自然に定まって， $\text{Spec}(R_{w_1}) \cap \text{Spec}(R_{w_2}) = \text{Spec}(S_{w_1, w_2}^{-1} R_{w_1})$ となる．量子群をもちいると， S_{w_1, w_2} の類似物であるところの， $R_{w_1, q}$ の積閉集合 $S_{w_1, w_2, q}$ は自然に定まる．しかし， $S_{w_1, w_2, q}^{-1} R_{w_1, q}$ は $S_{w_1, w_2}^{-1} R_{w_1}$ の類似物とはみなせないようにならずと大きい環になってしまう²．これでは貼り合わせができたとは言えない．

Manin はこのような考察を経て，次の考えに至った．

環を貼り合わせるのではなく，圏を貼り合わせよ．

これが，我々の依拠する非可換代数幾何の出発点である．以下，これに関してもう少し説明しよう．

X を通常の(可換な)スキームとする．このとき， X は準接続 $\mathcal{O}_X$ 加群の圏 $\text{Mod}(\mathcal{O}_X)$ から一意的に復元できることが知られている (Rosenberg [25])．すなわち，アーベル圏 $\text{Mod}(\mathcal{O}_X)$ が与えられたことをもって，スキーム X が与えられたと思ってもよい．そこで，非可換代数幾何においては

ある種のアーベル圏 $\mathcal{A}$ が与えられたときに， $\mathcal{A} = \text{Mod}(\mathcal{O}_X)$ をみたす“仮想的空間” X が与えられたと思う事にしまい，この仮想的空間を非可換スキーム呼ぶ．

この考えをもとに，非可換射影スキームの理論が構築された (Manin [22], Artin-Zhang [2], Ververkin [35])．さらに，より一般の非可換スキームの理論も Rosenberg [24] により展開された．

非可換射影スキームの“定義”を述べておこう． $B = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} B(n)$ を(可換とは限らない)次数付き環とする．次数付き左 B 加群の圏を $\text{Mod}_{\text{gr}}(B)$ で表す．また， $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M(n) \in \text{Mod}_{\text{gr}}(B)$ であって，任意の $m \in M$ に対して十分大きな $n_0 \geq 0$ をとるとき $n \geq n_0 \implies B(n)m = \{0\}$ が成立するようなもののなす部分圏を $\text{Tor}_{\text{gr}}(B)$ と書く．アーベル圏 $\text{Mod}(\mathcal{O}_{\text{Proj}(B)})$ を

$$\text{Mod}(\mathcal{O}_{\text{Proj}(B)}) := \text{Mod}_{\text{gr}}(B) / \text{Tor}_{\text{gr}}(B) = \mathcal{S}^{-1} \text{Mod}_{\text{gr}}(B)$$

² $S_{w_1, w_2, q}$ は $R_{w_1, q}$ において Ore 条件を満たしていない．

により定める．ここで $\mathcal{S}$ は, $\text{Mod}_{\text{gr}}(B)$ における射 s であって, $\text{Ker}(s), \text{Coker}(s) \in \text{Tor}_{\text{gr}}(B)$ をみたすものの全体を意味する．すなわち, $\mathcal{S}$ に属する射が同型射になるように (言い換えると $\text{Tor}_{\text{gr}}(B)$ の対象が 0 となるように) $\text{Mod}_{\text{gr}}(B)$ の射を増やして³得られる圏が $\text{Mod}(\mathcal{O}_{\text{Proj}(B)})$ である．そこで $\text{Mod}(\mathcal{O}_{\text{Proj}(B)})$ が準連接層の圏となるような仮想的空間 $\text{Proj}(B)$ が定まったものと思い, これを B から定まる非可換射影スキームと呼ぶ．

量子旗多様体の場合に戻ると, 今述べた非可換射影スキームの一般的構成を適用して, 非可換射影スキーム $\mathcal{B}_q = \text{Proj}(A_q)$ が, $\text{Mod}(\mathcal{O}_{\mathcal{B}_q}) = \text{Mod}_{\text{gr}}(A_q)/\text{Tor}_{\text{gr}}(A_q)$ により定まる．このとき, 貼り合わせ (2.1) は次のように解釈される．まず, $\text{Spec}(R_{w,q})$ は

$$\text{Mod}(\mathcal{O}_{\text{Spec}(R_{w,q})}) = \text{Mod}(R_{w,q}) := (\text{左 } R_{w,q} \text{ 加群の圏})$$

により非可換スキームと見なす．また, 自然な右完全関手

$$f_w^* : \text{Mod}(\mathcal{O}_{\mathcal{B}_q}) \rightarrow \text{Mod}(\mathcal{O}_{\text{Spec}(R_{w,q})})$$

があるので, 対応して非可換スキームの射 $f_w : \text{Spec}(R_{w,q}) \rightarrow \mathcal{B}_q$ が与えられたものと思える．いまの場合, f_w^* は完全関手であり, しかもさらにアーベル圏の局所化を与えている．また $\text{Mod}(\mathcal{O}_{\mathcal{B}_q})$ における射 s に関して,

$$f_w^*(s) \text{ が同型射 } (\forall w \in W) \implies s \text{ が同型射}$$

が成り立っている⁴．以上の事実をもって, 非可換スキーム $\mathcal{B}_q$ の affine 開被覆 (2.1) が与えられたものと思うのである⁵．

3. 量子旗多様体上の D 加群

$\mathfrak{g}$ を G のリー代数とする． P をウェイト格子, Q をルート格子とし, $N = |P/Q|$ とおく． $q^{1/N}$ を不定元とする有理関数体 $\mathbb{Q}(q^{1/N})$ を $\mathbb{F}$ で表す⁶．このとき, $\mathfrak{g}$ の包絡代数 $U(\mathfrak{g})$ の q 類似 $U_q(\mathfrak{g})$ と, G の座標環 $\mathbb{C}[G]$ の q 類似 $\mathbb{C}_q[G]$ が, $\mathbb{F}$ 上の結合代数として定まる．また $\mathbb{C}_q[G]$ は $U_q(\mathfrak{g})$ 両側加群になる．なお, $\mathbb{C}[G]$ は可換環であるが, $\mathbb{C}_q[G]$ は非可換である．

もう少しだけ詳しく述べておこう．単純ルートの集合を $\{\alpha_i\}_{i \in I}$ で表す． $U_q(\mathfrak{g})$ は, 生成元 k_λ ($\lambda \in P$), e_i, f_i ($i \in I$) とこれらに関するいくつかの関係式で定義される． $U_q(\mathfrak{g})$ はさらに Hopf 代数になるのだが, $\mathbb{C}_q[G]$ はその双対 Hopf 代数⁷．

このとき, $\mathbb{C}_q[G]$ の部分代数 A_q が

$$A_q = \{\varphi \in \mathbb{C}_q[G] \mid \varphi f_i = 0 \ (\forall i \in I)\}$$

により定まる．この A_q は自然な次数付けをもち, これが量子旗多様体 $\mathcal{B}_q$ の斉次座標環となる．すなわち

$$\text{Mod}(\mathcal{O}_{\mathcal{B}_q}) := \text{Mod}_{\text{gr}}(A_q)/\text{Tor}_{\text{gr}}(A_q). \quad (3.1)$$

³ 正確には圏の局所化．圏の局所化は導来圏を定義するのにも用いられる．

⁴ この部分は自明ではない

⁵ A_q の定義は次節． $w \in W$ に対応する extremal weight vectors に関する行列成分を用いて, A_q の斉次元からなる積閉集合 $S_{w,q}$ が定まるが, これに関して $R_{w,q} = (S_{w,q}^{-1} A_q)(0)$ ($S_{w,q}$ は Ore 条件を満たす)． $\text{Mod}_{\text{gr}}(A_q) \rightarrow \text{Mod}_{\text{gr}}(S_{w,q}^{-1} A_q) \cong \text{Mod}(R_{w,q})$ により, 関手 f_w^* が定まる．

⁶ 通常と異なり, $U_q(\mathfrak{g})$ の Cartan 部分に P の群環を持ってきているので, q の分数ベキが必要になる．

⁷ $U_q(\mathfrak{g})$ のタイプ 1 の有限次元表現の行列成分の 1 次結合の全体．

なお A_q は左 $U_q(\mathfrak{g})$ 加群でもある.

より正確には次のとおり. 優整ウェイトの全体を P^+ で表す. $\lambda \in P^+$ に対して,

$$A_q(\lambda) = \{\varphi \in A_q \mid \varphi k_\mu = q^{(\lambda, \mu)} \varphi \quad (\mu \in P)\}$$

とおくとき, $A_q = \bigoplus_{\lambda \in P^+} A_q(\lambda)$. これにより, A_q は $P \cong \mathbb{Z}^{|I|}$ により次数付けされた環になる. 前節での説明では, $\mathbb{Z}$ で次数付けされた環を用いたが, どちらを使っても差はない. 以下 P による次数付けを用いる.

そこで, A_q に作用する微分作用素環 D_q を, $\text{End}_{\mathbb{F}}(A_q)$ の部分代数であって

A_q の元の左かけ算, A_q の元の右かけ算, $U_q(\mathfrak{g})$ の元の左作用, 次数作用素

により生成されるものとして定義する⁸. D_q は次数付き環である. また, A_q の元は左かけ算により D_q の元と見なせる. よって, A_q は D_q の次数付き部分環でもある. 次数付き D_q 加群 M であって, 次数作用素の作用が A_q への作用と同じスカラーで与えられるもの⁹ のなすアーベル圏を $\text{Mod}_{\text{gr},0}(D_q)$ で表す. このとき, アーベル圏

$$\text{Mod}(\mathcal{D}_{\mathcal{B}_q}) := \text{Mod}_{\text{gr},0}(D_q) / \text{Mod}_{\text{gr},0}(D_q) \cap \text{Tor}_{\text{gr}}(A_q) \quad (3.2)$$

の対象を, 量子旗多様体 $\mathcal{B}_q$ 上の D 加群と呼ぶ¹⁰. アーベル圏の局所化の一般論 ([23] 参照) により自然な完全関手 $\omega^* : \text{Mod}_{\text{gr},0}(D_q) \rightarrow \text{Mod}(\mathcal{D}_{\mathcal{B}_q})$ は右随伴関手 $\omega_* : \text{Mod}(\mathcal{D}_{\mathcal{B}_q}) \rightarrow \text{Mod}_{\text{gr},0}(D_q)$ を持つことがわかる. $M \in \text{Mod}(\mathcal{D}_{\mathcal{B}_q})$ に対して, $(\omega_* M)(0)$ は $D_q(0)$ 加群であるが, 自然な準同形写像 $U_q(\mathfrak{g}) \rightarrow D_q(0)$ により, $U_q(\mathfrak{g})$ 加群と見なせる. さらに, $(\omega_* M)(0)$ は自明な中心指標をもつこともわかる¹¹. よって, 自明な中心指標をもつ $U_q(\mathfrak{g})$ 加群の圏を $\text{Mod}_{\text{triv}}(U_q(\mathfrak{g}))$ で表すとき, 左完全関手

$$\Gamma : \text{Mod}(\mathcal{D}_{\mathcal{B}_q}) \rightarrow \text{Mod}_{\text{triv}}(U_q(\mathfrak{g})) \quad (M \mapsto (\omega_* M)(0)) \quad (3.3)$$

が定まる¹².

THEOREM 3.1 ([27]). (3.3) はアーベル圏の同値を与える. また, 逆関手は

$$\text{Mod}_{\text{triv}}(U_q(\mathfrak{g})) \ni V \mapsto \omega^*(D_q \otimes_{U_q(\mathfrak{g})} V) \in \text{Mod}(\mathcal{D}_{\mathcal{B}_q})$$

により与えられる.

$V \in \text{Mod}_{\text{triv}}(U_q(\mathfrak{g}))$ に対して, $\omega^*(D_q \otimes_{U_q(\mathfrak{g})} V) \in \text{Mod}(\mathcal{D}_{\mathcal{B}_q})$ を V の量子旗多様体上での局所化と呼ぶ.

⁸ $\mu \in P$ に対して, $\sigma_\mu(\varphi) = q^{(\lambda, \mu)} \varphi$ ($\varphi \in A_q(\lambda)$) で定まる $\sigma_\mu \in \text{End}_{\mathbb{F}}(A_q)$ を次数作用素と呼ぶ.

⁹ $\sigma_\mu(m) = q^{(\lambda, \mu)} m$ ($m \in M(\lambda)$)

¹⁰ 次数作用素の作用をひねって, $\mu \in P$ に対するねじれ $\mathcal{D}_{\mathcal{B}_q, \mu}$ 加群の圏 $\text{Mod}(\mathcal{D}_{\mathcal{B}_q, \mu})$ も定義される.

¹¹ $U_q(\mathfrak{g})$ 加群であって, $((U_q(\mathfrak{g})$ の中心 $\cap \text{Ker}(\varepsilon))M = \{0\}$ をみたすものを自明な中心指標をもつ $U_q(\mathfrak{g})$ 加群と呼ぶ. ここで $\varepsilon : U_q(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathbb{F}$ は counit.

¹² ねじれ $\mathcal{D}_{\mathcal{B}_q, \mu}$ 加群の圏 $\text{Mod}(\mathcal{D}_{\mathcal{B}_q, \mu})$ の場合には, μ から定まる中心指標をもつ $U_q(\mathfrak{g})$ 加群の圏を考える. $\mu \in P^+$ に対して, Theorem 3.1 の類似が成立する.

4. 1 のベキ根の場合

4.1. D 加群の圏

$\ell > 1$ を奇数であって $(\ell, N) = 1$ を満たすものとし¹³, $\zeta \in \mathbb{C}$ を 1 の原始 ℓ 乗根とする. 前節に出てきた $U_q(\mathfrak{g})$, $\mathbb{C}_q[G]$, A_q , D_q において, q を ζ に特殊化して得られる環 ($\mathbb{C}$ 上の結合代数) $U_\zeta(\mathfrak{g})$, $\mathbb{C}_\zeta[G]$, A_ζ , D_ζ を考える事ができる¹⁴.

このとき, 非可換スキーム $\mathcal{B}_\zeta$ が

$$\mathrm{Mod}(\mathcal{O}_{\mathcal{B}_\zeta}) := \mathrm{Mod}_{\mathrm{gr}}(A_\zeta) / \mathrm{Tor}_{\mathrm{gr}}(A_\zeta) \quad (4.1)$$

により定まる. また $\mathcal{B}_\zeta$ 上の D 加群の圏が

$$\mathrm{Mod}(\mathcal{D}_{\mathcal{B}_\zeta}) := \mathrm{Mod}_{\mathrm{gr},0}(D_\zeta) / \mathrm{Mod}_{\mathrm{gr},0}(D_\zeta) \cap \mathrm{Tor}_{\mathrm{gr}}(A_\zeta) \quad (4.2)$$

により定義される¹⁵. $\mathcal{B}_\zeta$ 上の D 加群を用いて $U_\zeta(\mathfrak{g})$ の表現を研究しようというのが我々の目論見である.

やや技術的になるが, ここで $U_\zeta(\mathfrak{g})$ の中心の構造について述べておこう. $U_q(\mathfrak{g})$ の中心 $\mathfrak{z}(U_q(\mathfrak{g}))$ は $\mathbb{F}[2P]^W$ と同型になることが知られている (Harish-Chandra 同型, [26] など). 対応して $U_\zeta(\mathfrak{g})$ の中心 $\mathfrak{z}(U_\zeta(\mathfrak{g}))$ は $\mathbb{C}[2P]^W$ と同型な部分環 $\mathfrak{z}_H$ を含むが, $\mathfrak{z}(U_\zeta(\mathfrak{g}))$ 自身はもっと大きくなる. より正確には以下のとおり. B, B^- のベキ単根基を N, N^- とし, $G \times G$ の部分代数群 K を

$$K = \{(g_1 t, g_2 t^{-1}) \mid g_1 \in N, g_2 \in N^-, t \in T\}$$

により定める. このとき $\mathfrak{z}(U_\zeta(\mathfrak{g}))$ は $\mathbb{C}[K]$ と同型な部分環 $\mathfrak{z}_F$ を含み, $\mathfrak{z}(U_\zeta(\mathfrak{g})) = \langle \mathfrak{z}_H, \mathfrak{z}_F \rangle$ が成り立つ (De Concini-Procesi [10]). $\mathfrak{z}(U_\zeta(\mathfrak{g}))$ が大きいことから, すべての既約 $U_\zeta(\mathfrak{g})$ 加群は有限次元であることもわかる.

$U_\zeta(\mathfrak{g})$ 加群 M であって, $(\mathfrak{z}_H \cap \mathrm{Ker}(\varepsilon))M = \{0\}$ を満たすもののなす圏を $\mathrm{Mod}_{\mathrm{triv}}(U_\zeta(\mathfrak{g}))$ で表す. ここで $\varepsilon : U_\zeta(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathbb{C}$ は counit である. このとき, 前節と同様に左完全関手

$$\Gamma : \mathrm{Mod}(\mathcal{D}_{\mathcal{B}_\zeta}) \rightarrow \mathrm{Mod}_{\mathrm{triv}}(U_\zeta(\mathfrak{g})) \quad (4.3)$$

が定まる.

4.2. Beilinson-Bernstein 型導来同値

さて, 関手 (4.3) の導来関手をとって導来圏の間の関手

$$R\Gamma : D^b(\mathrm{Mod}(\mathcal{D}_{\mathcal{B}_\zeta})) \rightarrow D^b(\mathrm{Mod}_{\mathrm{triv}}(U_\zeta(\mathfrak{g}))) \quad (4.4)$$

が定まるが, これに関して次の予想が考えられる¹⁶.

¹³ G_2 型の場合には, $(\ell, 3) = 1$ も仮定する

¹⁴ $\mathbb{A} = \mathbb{Q}[q^{\pm 1/N}] \subset \mathbb{F}$ とおく. $U_q(\mathfrak{g})$ 等の適当な $\mathbb{A}$ -forms $U_\mathbb{A}(\mathfrak{g})$ 等を考え, その $q = \zeta$ における特殊化を $U_\zeta(\mathfrak{g})$ 等とする. $U_\mathbb{A}(\mathfrak{g})$ は De Concini-Kac form. $\mathbb{C}_\mathbb{A}[G]$ は Lusztig form の双対 Hopf 代数. $A_\mathbb{A} = A \cap \mathbb{C}_\mathbb{A}[G]$. $D_\mathbb{A}$ は $A_\mathbb{A}$ の元の左右のかけ算と $U_\mathbb{A}(\mathfrak{g})$ の作用および次数作用素で生成される $\mathrm{End}_\mathbb{A}(A_\mathbb{A})$ の部分 $\mathbb{A}$ 代数.

¹⁵ q を ζ に特殊化した状況でも, ねじれ D 加群の圏 $\mathrm{Mod}(\mathcal{D}_{\mathcal{B}_\zeta, t})$ を考えることができる. ここで, パラメータ t は, G の極大トーラス T の点である.

¹⁶ ねじれ D 加群の圏 $\mathrm{Mod}(\mathcal{D}_{\mathcal{B}_\zeta, t})$ でも同様のことが (すべての $t \in T$ に対して) 成り立つというのが, より一般の予想である.

CONJECTURE 4.1 ([30]). ℓ は Coxeter 数より大きいとする. このとき (4.4) は 3 角圏の同値を与える.

代数群に対する誘導関手

$$\mathrm{Ind} : \{B^- \text{ の有理表現} \} \rightarrow \{G \text{ の有理表現} \}$$

の量子群類似

$$\mathrm{Ind}_\zeta : \{\mathbb{C}_\zeta[B^-] \text{ 余加群} \} \rightarrow \{\mathbb{C}_\zeta[G] \text{ 余加群} \} \quad (4.5)$$

が定義される ([1] 参照). ここで, $\mathbb{C}_\zeta[B^-]$ は $\mathbb{C}[B^-]$ の類似物.

THEOREM 4.2 ([30]). (i) もしも

$$R\Gamma(\mathcal{D}_{\mathcal{B}_\zeta}) \cong U_\zeta(\mathfrak{g})/U_\zeta(\mathfrak{g})(\mathfrak{z}_H \cap \mathrm{Ker}(\varepsilon)) \quad (4.6)$$

が成り立っているならば, (4.4) は 3 角圏の同値を与える.

(ii) もしも

$$R\mathrm{Ind}_\zeta(\mathbb{C}_\zeta[B^-]) \cong \mathbb{C}_\zeta[G] \otimes_{\mathbb{C}[P]^w} \mathbb{C}[P] \quad (4.7)$$

が成り立っているならば, (4.6) は正しい.

したがって, ℓ が Coxeter 数より大きいときに (4.7) を証明する事が問題となる. 最近 $G = SL_n$ の場合にはこれができた. したがって

THEOREM 4.3. $G = SL_n$ の場合, $\ell > N$ なら (4.4) は 3 角圏の同値を与える.

4.3. 非可換スキームから可換スキームへ

正標数の代数幾何における Frobenius 写像の q 類似の世界での類似物であるところの量子 Frobenius 写像

$$\mathrm{Fr} : \mathcal{B}_\zeta \rightarrow \mathcal{B} \quad (4.8)$$

が自然に定義される¹⁷. ここで, $\mathcal{B}_\zeta$ は量子旗多様体 (非可換スキーム), $\mathcal{B}$ は旗多様体 (通常の意味での代数多様体), Fr はその間の非可換スキームとしての射である. これに関して直像をとることにより, $\mathcal{B}$ 上に (通常の意味での) $\mathcal{O}_\mathcal{B}$ 上の結合代数の層 $\mathrm{Fr}_*\mathcal{O}_{\mathcal{B}_\zeta}$, $\mathrm{Fr}_*\mathcal{D}_{\mathcal{B}_\zeta}$ が得られる. どちらも非可換である¹⁸. また

$$\mathrm{Mod}(\mathcal{O}_{\mathcal{B}_\zeta}) \cong \mathrm{Mod}(\mathrm{Fr}_*\mathcal{O}_{\mathcal{B}_\zeta}), \quad \mathrm{Mod}(\mathcal{D}_{\mathcal{B}_\zeta}) \cong \mathrm{Mod}(\mathrm{Fr}_*\mathcal{D}_{\mathcal{B}_\zeta}) \quad (4.9)$$

が容易にわかる¹⁹. さらに (4.3) と (4.9) から定まる関手

$$\Gamma : \mathrm{Mod}(\mathrm{Fr}_*\mathcal{D}_{\mathcal{B}_\zeta}) \rightarrow \mathrm{Mod}_{\mathrm{triv}}(U_\zeta(\mathfrak{g})) \quad (4.10)$$

¹⁷ Lusztig の Frobenius 写像 $U_\zeta(\mathfrak{g}) \rightarrow U(\mathfrak{g})$ の双対をとって, 埋め込み $\mathbb{C}[G] \subset \mathbb{C}_\zeta[G]$ が定まる. また, これは $A \subset A_\zeta$ を導く. $\mathbb{C}[G]$, A は, それぞれ $\mathbb{C}_\zeta[G]$, A_ζ の中心に含まれる.

¹⁸ A_1 型の場合に限り, $\mathrm{Fr}_*\mathcal{O}_{\mathcal{B}_\zeta}$ は可換になる.

¹⁹ 位相空間上の環の層 $\mathcal{R}$ に対して, 準連接 $\mathcal{R}$ 加群の層のなす圏を $\mathrm{Mod}(\mathcal{R})$ と書く.

は、通常の代数幾何の意味での大域切断関手と一致する．したがって、パラメータが1のベキ根の場合には、非可換スキーム自体を考える必要はなくなって、旗多様体（通常の意味での代数多様体）のうえの非可換な環の層に関する加群の層を考えればよくなってしまふのである．

4.4. 量子余接束の上での局所化

代数多様体

$$\mathcal{T} = \{(B^-g, (x_1, x_2)) \in \mathcal{B} \times K \mid gx_1x_2^{-1}g^{-1} \in N^-\}$$

を量子余接束と呼ぶ²⁰． $\pi : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{B}$, $p : \mathcal{T} \rightarrow K$ を自然な射影とする． π はアフィン射である． p は量子モーメント写像と呼ばれる固有射で、その像 $\text{Im}(p)$ は

$$K_{\text{uni}} = \{(x_1, x_2) \in K \mid x_1x_2^{-1} \text{は } G \text{ のベキ単元}\}$$

と一致する．

ここで重要となるのは、 $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$ 代数 $\text{Fr}_*\mathcal{D}_{\mathcal{B}_{\zeta}}$ の中心 $\mathfrak{z}(\text{Fr}_*\mathcal{D}_{\mathcal{B}_{\zeta}})$ は $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$ よりもずっと大きくて、 $\mathcal{T}$ の上の関数の環と一致するという事実である²¹．したがって、 $\mathcal{T}$ 上に $\mathcal{O}_{\mathcal{T}}$ 代数 $\mathcal{R}_{\zeta}$ が定まり²²,

$$\text{Mod}(\text{Fr}_*\mathcal{D}_{\mathcal{B}_{\zeta}}) \cong \text{Mod}(\mathcal{R}_{\zeta}) \quad (4.11)$$

が成り立つ．

(4.9), (4.11)により、 $U_{\zeta}(\mathfrak{g})$ 加群の局所化を与える D 加群としては、互いに同等な

- 非可換スキーム $\mathcal{B}_{\zeta}$ 上の $\mathcal{D}_{\mathcal{B}_{\zeta}}$ 加群,
- 代数多様体 $\mathcal{B}$ 上の $\text{Fr}_*\mathcal{D}_{\mathcal{B}_{\zeta}}$ 加群,
- 代数多様体 $\mathcal{T}$ 上の $\mathcal{R}_{\zeta}$ 加群

の3つを考える事ができる．このうち $\mathcal{R}_{\zeta}$ は次の著しい性質をもつ．

THEOREM 4.4 ([28]). $\mathfrak{g}$ が例外型単純リー代数の場合には、 $(\ell, 3) = 1$ と仮定する．

- (i) $\mathcal{R}_{\zeta}$ は階数有限の局所自由 $\mathcal{O}_{\mathcal{T}}$ 加群であって、各ファイバーは行列環と同型（東屋性）．
- (ii) $x \in K_{\text{uni}}$ に対して、 $p^{-1}(x)$ 上の階数有限の局所自由 $\mathcal{O}_{p^{-1}(x)}$ 加群 $\mathcal{M}_x$ があって、 $\mathcal{R}_{\zeta}|_{p^{-1}(x)} \cong \mathcal{E}nd(\mathcal{M}_x)$ （分裂東屋性）．

森田同値により次がわかる．

COROLLARY 4.5 ([28]). $\mathfrak{g}$ が例外型単純リー代数の場合には、 $(\ell, 3) = 1$ と仮定する．このとき $x \in K_{\text{uni}}$ に対して、

$$\text{Mod}(\mathcal{R}_{\zeta}|_{p^{-1}(x)}) \cong \text{Mod}(\mathcal{O}_{p^{-1}(x)}).$$

²⁰ 非可換スキームではなく通常の意味の代数多様体である． $\mathcal{B}$ の余接束の類似物．

²¹ $\mathfrak{z}(\text{Fr}_*\mathcal{D}_{\mathcal{B}_{\zeta}}) \cong \pi_*\mathcal{O}_{\mathcal{T}}$ ．

²² $\mathcal{R}_{\zeta} = \mathcal{O}_{\mathcal{T}} \otimes_{\pi^{-1}(\mathfrak{z}(\text{Fr}_*\mathcal{D}_{\mathcal{B}_{\zeta}}))} \pi^{-1}(\text{Fr}_*\mathcal{D}_{\mathcal{B}_{\zeta}})$, $\pi_*\mathcal{R}_{\zeta} = \text{Fr}_*\mathcal{D}_{\mathcal{B}_{\zeta}}$ ．

4.5. $U_\zeta(\mathfrak{g})$ の表現論への期待される応用

$\text{Mod}_{\text{triv}}(U_\zeta(\mathfrak{g}))$ に属する $U_\zeta(\mathfrak{g})$ 加群であって $\mathfrak{z}_F \cong \mathbb{C}[K]$ の作用もスカラー倍になるようなものを考えると、出てくる $\mathbb{C}[K]$ の指標は K_{uni} の点と 1 対 1 に対応する。したがって、各 $x \in K_{\text{uni}}$ に対して、 $\text{Mod}_{\text{triv}}(U_\zeta(\mathfrak{g}))$ に属する $U_\zeta(\mathfrak{g})$ 加群であって $\varphi \in \mathbb{C}[K] \cong \mathfrak{z}_F$ の作用が $\varphi(x) \text{id}$ により与えられるもののなす圏 $\text{Mod}_{\text{triv}}^x(U_\zeta(\mathfrak{g}))$ を考えるのが自然である。実際、 $\text{Mod}_{\text{triv}}(U_\zeta(\mathfrak{g}))$ に属する既約 $U_\zeta(\mathfrak{g})$ 加群はすべて、ある $x \in K_{\text{uni}}$ に対する $\text{Mod}_{\text{triv}}^x(U_\zeta(\mathfrak{g}))$ に含まれる。

Conjecture 4.1 が正しいと仮定すれば、Corollary 4.5 により次の予想（Lusztig の予想 [21] の一部）が証明されることになる。

CONJECTURE 4.6. ℓ に関する適当な条件の下で、 $x \in K_{\text{uni}}$ に対して

$$\#(\text{Mod}_{\text{triv}}^x(U_\zeta(\mathfrak{g})) \text{ に含まれる既約表現}) = \sum_i (-1)^i \dim H^i(p^{-1}(x), \mathbb{C}). \quad (4.12)$$

なお $x = (x_1, x_2) \in K_{\text{uni}}$ に対して、

$$p^{-1}(x) \cong \{B^-g \in \mathcal{B} \mid g(x_1x_2^{-1})g^{-1} \in N^-\}$$

は Springer ファイバーと呼ばれる代数多様体であり、幾何学的表現論の各所に頻出する。(4.12) の右辺に現れる数は、有限簡約群の通常表現論に現れる Green 多項式を用いて、実際に計算が可能である²³。

参考文献

- [1] H. H. Andersen, P. Polo, K. Wen, *Representations of quantum algebras*, Invent. Math. **104** (1991), 1–60.
- [2] M. Artin, J. J. Zhang, *Noncommutative projective schemes*, Adv. in Math. **109** (1994), 228–287.
- [3] E. Backelin, K. Kremnizer, *Quantum flag varieties, equivariant quantum $\mathcal{D}$ -modules, and localization of quantum groups*, Adv. Math. **203** (2006), 408–429.
- [4] E. Backelin, K. Kremnizer, *Localization for quantum groups at a root of unity*, J. Amer. Math. Soc. **21** (2008), 1001–1018.
- [5] A. Beilinson, J. Bernstein, *Localisation de $\mathfrak{g}$ -modules*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **292** (1981), 15–18.
- [6] R. Bezrukavnikov, I. Mirković, D. Rumynin, *Localization of modules for a semisimple Lie algebra in prime characteristic*, Ann. of Math. **167** (2008), 945–991.
- [7] R. Bezrukavnikov, I. Mirković, D. Rumynin, *Singular localization and intertwining functors for reductive Lie algebras in prime characteristic*, Nagoya Math. J. **184** (2006), 1–55.
- [8] J.-L. Brylinski, M. Kashiwara, *Kazhdan-Lusztig conjecture and holonomic systems*, Invent. Math. **64** (1981), 387–410.
- [9] C. De Concini, V. Kac, *Representations of quantum groups at roots of 1*, in: Progress in Math., **92**, Birkhäuser, 1990, 471–506.

²³ 本節で述べたことに関しては、Backelin-Kremnizer [3], [4] による別方向からのアプローチがある ([30, Remark 5.3] 参照)。

- [10] C. De Concini, C. Procesi, *Quantum groups*, in: L. Boutet de Monvel et al., *D-modules, Representation Theory and Quantum Groups*, Proc. Venezia 1992, Lecture Notes in Mathematics **1565**, Berlin etc. Springer, 1993.
- [11] M. Kashiwara, *Kazhdan-Lusztig conjecture for symmetrizable Kac-Moody Lie algebra*, in The Grothendieck Festschrift, Vol. II, Progr. Math. **87** Birkhäuser, Boston, 1990, 407–433.
- [12] M. Kashiwara, T. Tanisaki, *Kazhdan-Lusztig conjecture for symmetrizable Kac-Moody Lie algebra II*, in Operator Algebras, Unitary Representations, Enveloping Algebras, and Invariant Theory, Vol. II, Progr. Math. **92** Birkhäuser, Boston, 1990, 159–195.
- [13] M. Kashiwara, T. Tanisaki, *Kazhdan-Lusztig conjecture for affine Lie algebras with negative level*, Duke Math. J., **77** (1995) 21–62.
- [14] M. Kashiwara, T. Tanisaki, *Kazhdan-Lusztig conjecture for affine Lie algebras with negative level II: Nonintegral case*, Duke Math. J., **84** (1996) 771–813.
- [15] M. Kashiwara, T. Tanisaki, *Kazhdan-Lusztig conjecture for symmetrizable Kac-Moody Lie algebras III—positive rational case*, Asian J. Math., **2** (1998) 779–832.
- [16] M. Kashiwara, T. Tanisaki, *Characters of irreducible modules with non-critical highest weights over affine Lie algebras*, in: Representations and quantizations, Proceedings of the International conference on representation theory (Shanghai, 1998), 275–296, China Higher Education Press and Springer Verlag, Beijing, 2000.
- [17] D. Kazhdan, G. Lusztig, *Representations of Coxeter groups and Hecke algebras*, Invent. Math., **53** (1979) 165–184.
- [18] V. A. Lunts, A. L. Rosenberg, *Localization for quantum groups*, Selecta Math. New ser. **5** (1999), 123–159.
- [19] G. Lusztig, *Quantum groups at roots of 1*, Geom. Dedicata **35** (1990), 89–114.
- [20] G. Lusztig, *Introduction to quantum groups*, Birkhäuser, 1993.
- [21] G. Lusztig, *Bases in equivariant K-theory II*, Represent. Th. **3** (1999), 281–353.
- [22] Yu. I. Manin, *Topics in Noncommutative geometry*, Princeton Univ Press, 1991.
- [23] N. Popescu, *Abelian categories with applications to rings and modules*, Academic Press, 1973.
- [24] A. L. Rosenberg, *Noncommutative algebraic geometry and representations of quantized algebras*, Kluwer Academic Publishers, 1995.
- [25] A. L. Rosenberg, *Noncommutative schemes*, Comp. Math. **112** (1995), 93–125.
- [26] T. Tanisaki, *Killing forms, Harish-Chandra isomorphisms, and universal R-matrices for quantum algebras*, Inter. J. Mod. Phys. **A7**, Suppl. **1B** (1992), 941–961.
- [27] T. Tanisaki, *The Beilinson-Bernstein correspondence for quantized enveloping algebras*, Math. Z. **250** (2005), 299–361.
- [28] T. Tanisaki, *Differential operators on quantized flag manifolds at roots of unity*, Adv. Math. **230** (2012), 2235–2294.
- [29] T. Tanisaki, *Manin triples and differential operators on quantum groups*, Tokyo J. Math. **36** (2013), 49–83.
- [30] T. Tanisaki, *Differential operators on quantized flag manifolds at roots of unity, II*, Nagoya Math. J. **214** (2014), 1–52.
- [31] T. Tanisaki, *The center of a quantized enveloping algebra at an even root of unity*, Osaka J. Math. **53**, (2016), 47–83.
- [32] T. Tanisaki, *Characters of integrable highest weight modules over a quantum group*, International Mathematics Research Notices 2016.
- [33] T. Tanisaki, *Modules over quantized coordinate algebras and PBW-bases*. J. Math. Soc. Japan **69** (2017), 1105–1156.

- [34] T. Tanisaki, *Invariance of the Drinfeld pairing of a quantum group*. Tokyo J. Math. **39** (2017), 885–900.
- [35] A. B. Verevkin, *On a noncommutative analogue of the category of coherent sheaves on a projective scheme*, Amer. Math. Soc. Transl. (2) **151** (1992).