

距離空間における作用素半群と微分方程式

田中 直樹 (静岡大学・理学部)*

1. バナッハ空間におけるリプシッツ作用素半群の導入

微分方程式系に対する適切性 (解の存在, 解の一意性, 解の初期値に関する連続的依存性) の問題を考察するための位相解析的手法として, 与えられた微分方程式系を, バナッハ空間 X における作用素 A に対する抽象的コーシー問題

$$u'(t) = Au(t) \quad (t \geq 0), \quad u(0) = x \in D \quad (\text{ACP}; A, x)$$

に書き直して調べる方法がある. ただし, D は X の部分集合である. この抽象的コーシー問題について, 各 $x \in D$ に対して, 解 $u(t; x)$ が時間大域的に存在し一意であり, その解が初期値にリプシッツ連続的に依存するならば,

$$S(t)x = u(t; x) \quad (t \geq 0, x \in D)$$

により定義した D からそれ自身への作用素族 $\{S(t); t \geq 0\}$ は次の性質をもつ.

$$(S1) \quad S(0)x = x \quad (x \in D), \quad S(t+s)x = S(t)S(s)x \quad (s, t \geq 0, x \in D).$$

$$(S2) \quad \text{各 } x \in D \text{ に対して, } S(\cdot)x : [0, \infty) \rightarrow X \text{ は連続である.}$$

$$(S3) \quad \text{各 } \tau > 0 \text{ に対して, } M \geq 1 \text{ が存在して}$$

$$\|S(t)x - S(t)y\| \leq M\|x - y\| \quad (x, y \in D, t \in [0, \tau]).$$

これらの条件を満たす D からそれ自身への作用素族 $\{S(t); t \geq 0\}$ を D 上のリプシッツ作用素半群といい, 次の作用素 A_0 を $\{S(t); t \geq 0\}$ の無限小生成作用素という.

$$\begin{cases} A_0x = \lim_{h \downarrow 0} h^{-1}(S(h)x - x) \quad (x \in D(A_0)), \\ D(A_0) = \{x \in D; \lim_{h \downarrow 0} h^{-1}(S(h)x - x) \text{ が存在する} \}. \end{cases}$$

条件 (S1) を半群性, 条件 (S2) を強連続性という.

$D = X$, $\{S(t); t \geq 0\}$ が X における有界線形作用素族の場合, $\{S(t); t \geq 0\}$ を X 上の (C_0) 作用素半群といい, 特に, $M = 1$ のとき, (C_0) 縮小作用素半群という. 後者の特徴づけを Hille–Yosida の定理, 前者の特徴づけを Hille–Yosida–Feller–Phillips–Miyadera の定理という. これらの定理の非線形拡張として, $M = 1$ の場合に, ヒルベルト空間における高村 [14] の先駆的な研究から始まり, Crandall–Liggett [8] により, 一般のバナッハ空間において, m -消散作用素は縮小作用素半群を生成するという有名な定理が得られ, 小林 [11] により, 接線条件を満たす消散作用素 A は $\overline{D(A)}$ 上の縮小作用素半群を生成するという定理へと一般化されている. しかし, $M > 1$ の場合には, Martin [16] の結果の一般化である次の特徴づけ ([12]) が成り立つが, 無限小生成作用素が連続の場合であり, より一層の拡張が望まれる¹.

本研究は科研費 (課題番号: 25400134, 16K05199) の助成を受けたものである.

* e-mail: tanaka.naoki@shizuoka.ac.jp

¹ 無限小生成作用素が連続でない場合に, リプシッツ作用素半群の生成を試み, ヒルベルト空間における極大単調作用素による縮小作用素半群の生成定理の一般化を得ている ([24]). しかし, 保存則系に対する適切性 ([7, 6]) へ応用可能なリプシッツ作用素半群の生成の問題は未解決である.

定理 1.1. D を X の閉集合とする. 連続作用素 $A : D \rightarrow X$ が D 上のリプシッツ作用素半群 $\{S(t); t \geq 0\}$ の無限小生成作用素であるための必要十分条件は, 次の条件が成り立つことである.

$$(A1) \quad \liminf_{h \downarrow 0} h^{-1} d(x + hAx, D) = 0 \quad (x \in D).$$

$$(A2) \quad \text{定数 } \omega \geq 0, M \geq m > 0 \text{ とリプシッツ連続汎関数 } V : X \times X \rightarrow [0, \infty) \text{ が存在して, } m\|x - y\| \leq V(x, y) \leq M\|x - y\| \quad ((x, y) \in D \times D),$$

$$D_+ V(x, y)(Ax, Ay) \leq \omega V(x, y) \quad ((x, y) \in D \times D).$$

ただし,

$$D_+ V(x, y)(\xi, \eta) = \liminf_{h \downarrow 0} h^{-1} (V(x + h\xi, y + h\eta) - V(x, y)) \quad ((x, y), (\xi, \eta) \in X \times X).$$

このとき, 各 $x \in D$ に対して, 抽象的コーシー問題 (ACP; A, x) は, $u(t) = S(t)x$ ($t \geq 0$) で与えられる一意な時間大域的な解 $u \in C^1([0, \infty); X)$ をもつ. さらに,

$$V(S(t)x, S(t)y) \leq e^{\omega t} V(x, y) \quad (t \geq 0, x, y \in D). \quad (1.1)$$

注 1.2. (i) 定理 1.1 において, 非負値リプシッツ連続汎関数をノルムから導かれる距離に置き換えることは一般的にはできない. (ii) 定理 1.1 の条件 (A1) は, 南雲 [18] により導入された条件で, 劣接線条件として知られ, Viability 理論 ([4]) に現れる. 連続作用素 $A : D \rightarrow X$ について, 条件 (A1) は, 任意の $\epsilon > 0$, $x \in D$ に対して, $h \in (0, \epsilon]$, $x_h \in D$, $z_h \in X$ が存在して, $h^{-1}(x_h - x) = Ax_h + z_h$, $\|z_h\| \leq \epsilon$ が成り立つことと同値である. $x \in D$, $h > 0$ を与えたとき, 楕円型方程式 $u - hAu = x$ が可解ならば, 誤差項 z_h について, $z_h = 0$ で成り立つ. (iii) 定理 1.1 の条件 (A2) は, 有限次元空間において, 常微分方程式の初期値問題に対する解の一意性を特徴づけた岡村 [19] により導入された条件である. X が実ヒルベルト空間であり, その内積を $\langle \cdot, \cdot \rangle$ とするとき, $\omega = 0$, $V(x, y) = \langle x - y, x - y \rangle^{1/2}$ ($x, y \in X$) の場合には, 条件 (A2) は, $-A$ が単調作用素であることを意味する.

定理 1.1 は, 次のような問題へ適用可能である.

例 1.3. 微分方程式系 $u_t = v_x$, $v_t = \varphi'(u)_x - \nu v$ を考える. ただし, $\nu > 0$ であり, $\varphi \in C^4(\mathbb{R})$ は $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$, $0 < c_0 \leq \varphi''(r) \leq M_0$ ($r \in \mathbb{R}$) を満たすとする. その際, X として, $\|(u, v)\| = (\|u\|_{L^2}^2 + \|v\|_{L^2}^2)^{1/2}$ をノルムとする実バナッハ空間 $L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$ を考える. X の閉集合 D を, $H^2(\mathbb{R}) \times H^2(\mathbb{R})$ の有界集合であり, 任意の $(u_0, v_0) \in D$ に対して, 線形化差分方程式

$$h^{-1}(u_h - u_0) = \partial_x v_h, \quad h^{-1}(v_h - v_0) = \varphi''(u_0) \partial_x u_h - \nu v_h$$

の解 (u_h, v_h) が, 小さな $h > 0$ に対して $(u_h, v_h) \in D$ を満たすように構成できるので, 作用素 $A : D \rightarrow X$ を $A(u, v) = (v_x, \varphi'(u)_x - \nu v)$ ($(u, v) \in D$) と定めれば, A は連続であり, 条件 (A1) を満たす. リプシッツ連続汎関数 $V : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ として,

$$V((u, v), (\hat{u}, \hat{v})) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_u^{\hat{u}} \sqrt{\varphi''(r)} dr \right)^2 + (\hat{v} - v)^2 dx \right)^{1/2}$$

を用いると、作用素 A が条件 (A2) を満たすことがわかる。汎関数 V は X 上の距離であり、内積から導かれる距離

$$V((u, v), (\hat{u}, \hat{v})) = \inf \left\{ \int_0^1 \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi''(u(x; \theta)) \dot{u}(x; \theta)^2 + \dot{v}(x; \theta)^2 dx \right)^{1/2} d\theta \right\}$$

に一致する。ただし、下限は $(u, v), (\hat{u}, \hat{v})$ を結ぶ D 内の滑らかな曲線 $(u(\cdot; \theta), v(\cdot; \theta))$ すべてについて取られるものであり、 $\dot{u}(\cdot; \theta)$ は $u(\cdot; \theta)$ の θ に関する微分を表す。

注 1.4. Otto [21] による形式的リーマン構造から導かれる距離に一致する Wasserstein 距離を距離とする、 $\int_{\mathbb{R}^d} |x|^2 d\mu < \infty$ を満たすボレル確率測度 μ 全体の距離空間において、勾配流の研究が行われていることは大変興味深い ([3])。その研究に現れる作用素半群 $\{S(t); t \geq 0\}$ は Wasserstein 距離を V として、評価式 (1.1) を満たす。この事実が、距離空間における作用素半群の理論を展開する 1 つの動機である。

2. 準線形発展方程式に付随するリプシッツ作用素半群

$a > 0, b > 0, \gamma > 0, \Omega$ を滑らかな境界 Γ をもつ有界領域とする。Kirchhoff 方程式

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) = (a + b \int_{\Omega} |\nabla u(x, t)|^2 dx) \Delta u(x, t) - \gamma u_t(x, t) & ((x, t) \in \Omega \times [0, \infty)) \\ u(x, t) = 0 & ((x, t) \in \Gamma \times [0, \infty)) \end{cases}$$

について、 $X = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, $Y = (H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$ とし、各 $w = (w_1, w_2) \in Y$ に対して、 X における作用素 $A(w)$ を

$$A(w)u = (u_2, (a + b \int_{\Omega} |\nabla w_1(x)|^2 dx) \Delta u_1 - \gamma u_2) \quad (u = (u_1, u_2) \in Y =: D(A(w)))$$

により定めると、各 $w \in Y$ に対して $A(w)$ は線形作用素であり、Kirchhoff 方程式は

$$u'(t) = A(u(t))u(t) \quad (t \geq 0) \quad (\text{QE})$$

と表すことができる。このような方程式を準線形方程式といい、位相解析的に研究した加藤の準線形理論 ([10, 9]) は、時間局所的適切性を研究するための強力な理論である²。

さて、微分方程式系の解の指数減衰評価といった解の挙動を調べることも重要な研究課題である。この研究は、Lyapunov のアイデアをもとに、適正な下半連続汎関数 $\psi : X \rightarrow [0, \infty]$ を用いて、 $g(0) \geq 0$ である $g \in C([0, \infty); \mathbb{R})$ に対する微分不等式

$$(d/dt)\psi(u(t)) \leq g(\psi(u(t))) \quad (t \geq 0) \quad (2.1)$$

を満たす (QE) の解 u を探す研究に翻訳される。初期条件を $u(0) = u_0$ とするとき、微分不等式 (2.1) を満たす抽象的コーシー問題 (QE) の解 u について、初期値問題

$$p'(t) = g(p(t)) \quad (t \geq 0), \quad p(0) = \psi(u_0)$$

の最大解 $m(t)$ が存在する範囲で、条件 $\psi(u(t)) \leq m(t)$ が成り立つ。 $\lim_{t \rightarrow \infty} m(t) = 0$ ならば、 $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(u(t)) = 0$ を導ける。また、方程式に依じて、時間局所解の存在性、小

² 加藤の準線形理論については、堤 [25] による解説がある。加藤により始められた準線形理論では、空間の回帰性が仮定されたが、實方 [22] により空間の回帰性の条件が除去されている。

さな初期値,あるいは,大きな初期値に関する時間大域的存在性を取り扱える. この考え方に従い, 加藤理論を時間大域的適切性へ応用できるように修正した定理を紹介する.

X をバナッハ空間, そのノルムを $\|\cdot\|_X$, Y を回帰的なバナッハ空間, そのノルムを $\|\cdot\|_Y$ とし, Y は X において稠密で連続的に埋め込まれるとする. $\{A(w); w \in Y\}$ を X における閉線形作用素の族とする. 各 $r > 0$ に対して, $Y_r = \{y \in Y; \|y\|_Y \leq r\}$ とおく. 区間 $[0, \infty)$ で定義された非減少な非負値連続関数 $\lambda_N, \mu_N, \beta_A, \lambda_A, \mu_A, \lambda_B$ が存在して, 次の条件 (H1) から (H3) が成り立つと仮定する.

(H1) 各 $w \in Y$ に対して, 作用素 $A(w)$ は X 上の (C_0) 作用素半群 $\{T_w(t); t \geq 0\}$ を生成する. さらに, 2つの条件

$$\begin{aligned} \|x\|_X &\leq N_w(x) \leq \lambda_N(r)\|x\|_X \quad (w \in Y_r, x \in X), \\ N_w(x) &\leq N_z(x)(1 + \mu_N(r)\|w - z\|_X) \quad (w, z \in Y_r, x \in X) \end{aligned}$$

を満たす X のノルム族 $\{N_w(\cdot); w \in Y\}$ が存在して,

$$N_w(T_w(t)x) \leq e^{\beta_A(r)t} N_w(x) \quad (t \geq 0, x \in X, w \in Y_r).$$

(H2) 各 $w \in Y$ に対して $D(A(w)) \supset Y$ であり,

$$\|A(w)\|_{Y,X} \leq \lambda_A(r) \quad (w \in Y_r), \quad \|A(w) - A(z)\|_{Y,X} \leq \mu_A(r)\|w - z\|_X \quad (w, z \in Y_r).$$

(H3) Y から X の上への同型写像 Q と X における有界線形作用素族 $\{B(w); w \in Y\}$ が存在して, $\|y\|_Y = \|Qy\|_X$ ($y \in Y$) であり,

$$\|B(w)\|_{X,X} \leq \lambda_B(r) \quad (w \in Y_r), \quad QA(w)Q^{-1} = A(w) + B(w) \quad (w \in Y).$$

各 $\nu > 0$ に対して, $\tau(\nu) > 0$ を常微分方程式の初期値問題

$$p'(t) = g(p(t)) \quad (t \geq 0), \quad p(0) = \nu$$

の最大解 $m(t; \nu)$ の最大存在時刻とする. このとき, 次が成り立つ.

定理 2.1. 任意の $\nu > 0$ に対して, $r > 0$ が存在して, $u \in Y, \psi(u) \leq \nu$ ならば $u \in Y_r$ が成り立つと仮定し, さらに, 増大条件 $\limsup_{h \downarrow 0} h^{-1}(\psi(T_x(h)x) - \psi(x)) \leq g(\psi(x))$ ($x \in Y$) を仮定する. $\nu > 0, \tau = \tau(\nu)$ とするとき, $\psi(x) \leq \nu$ を満たす各 $x \in Y$ に対して, 一意な $u \in C([0, \tau]; X)$ が存在して, $u(t) \in Y$ ($t \in [0, \tau)$), $\psi(u(t)) \leq m(t; \psi(x))$ ($t \in [0, \tau)$),

$$(d/dt)^+ u(t) = A(u(t))u(t) \quad (t \in [0, \tau)), \quad u(0) = x.$$

定数 $\omega_\nu \geq 0$ が存在して, v を $\psi(y) \leq \nu$ を満たす $y \in Y$ を初期値とする解とすれば,

$$N_{u(t)}(u(t) - v(t)) \leq e^{\omega_\nu t} N_x(x - y) \quad (t \in [0, \tau)).$$

注 2.2. 適正下半連続汎関数 $\psi: X \rightarrow [0, \infty]$ として, $\psi(x) = N_x(Qx)$ ($x \in Y$), $\psi(x) = \infty$ ($x \in X \setminus Y$) を選べば, 関数 $g(r) = (\beta_A(r) + \lambda_N(r)\lambda_B(r) + \mu_N(r)\lambda_A(r)r)r$ ($r \geq 0$) により, 増大条件が成り立つ. さらに, $\limsup_{r \downarrow 0} r^{-1}g(r) < 0$ ならば, $\nu_0 > 0, \beta < 0$ が存在して $\tau(\nu_0) = \infty$ であり, $m(t; \nu_0) \leq e^{-\beta t}\nu_0$ ($t \geq 0$) が成り立つ. この場合, $D = \{x \in Y; N_x(Qx) \leq \nu_0\}$ とし, D からそれ自身への作用素族 $\{S(t); t \geq 0\}$ を $S(t)x = u(t)$ ($x \in D, t \geq 0$) により定めると, $\{S(t); t \geq 0\}$ は D 上のリプシッツ作用素半群である. さらに, 定数 $\omega \geq 0$ が存在して

$$N_{S(t)x}(S(t)x - S(t)y) \leq e^{\omega t} N_x(x - y) \quad (t \geq 0, x, y \in D).$$

3. 距離空間における作用素半群と微分方程式

距離空間における微分方程式には、少なくとも、注 1.4 で述べた距離空間における勾配流と Aubin [5] により始められた mutational equation がある。本概説は、mutational equation に関するものである。Aubin の結果は、Lorenz [15] により、ラドン測度の空間における人口モデルの解析に応用できるように拡張されている。本節の内容は、Aubin, Lorenz の結果を、加藤の準線形理論（定理 2.1）を含むようなものへと拡張するものである ([13])。

u を区間 $[0, \tau)$ で定義されたノルム空間 X に値をとる関数とし、 $t \in (0, \tau)$ とする。 u が t で微分可能であることは、 $\xi \in X$ が存在して、 $h^{-1}\|u(t+h) - (u(t) + h\xi)\| \rightarrow 0$ ($h \rightarrow 0$) が成り立つことと同値である。距離空間では、 $u(t) + h\xi$ が意味を持たない。距離空間において、微分概念を捉えるために、 $\vartheta(h, x) = x + h\xi$ をモデルとして、transition, mutation の概念が Aubin により導入された。それらの概念を拡張した定義を導入する。

(E, d) を完備な距離空間とし、 $\phi : E \rightarrow [0, \infty]$ は適正下半連続な汎関数で、その有効域 $D(\phi)$ は E で稠密であるとする。各 $r > 0$ に対して、 $D_r(\phi) = \{x \in E; \phi(x) \leq r\}$ とおく。連続写像 $\vartheta : [0, 1] \times D(\phi) \rightarrow D(\phi)$ が (E, d, ϕ) 上の transition であるとは、次の条件が成り立つことである。

$$(t1) \quad \begin{aligned} \vartheta(0, x) &= x \quad (x \in D(\phi)), \\ \vartheta(t+h, x) &= \vartheta(h, \vartheta(t, x)) \quad (x \in D(\phi), t, h \in [0, 1], t+h \in [0, 1]). \end{aligned}$$

(t2) 各 $r > 0$ に対して、定数 $M \geq 1$ が存在して

$$d(\vartheta(t, x), \vartheta(t, y)) \leq Md(x, y) \quad (t \in [0, 1], x, y \in D_r(\phi)).$$

(t3) 各 $r > 0$ に対して、定数 $\beta > 0$ が存在して、

$$\limsup_{h \downarrow 0} h^{-1}d(\vartheta(h, x), x) \leq \beta \quad (x \in D_r(\phi)).$$

(t4) 各 $r > 0$ に対して、定数 $K > 0$ が存在して、 $\phi(\vartheta(t, x)) \leq K$ ($t \in [0, 1], x \in D_r(\phi)$)。

transition の安定性、増大性を測るものとして、各 $r > 0$ と transition ϑ に対して、

$$\begin{aligned} M_r(\vartheta) &= \sup\{d(x, y)^{-1}d(\vartheta(t, x), \vartheta(t, y)); x, y \in D_r(\phi), x \neq y, t \in [0, 1]\} < \infty, \\ K_r(\vartheta) &= \sup\{\phi(\vartheta(t, x)); t \in [0, 1], x \in D_r(\phi)\} < \infty \end{aligned}$$

を導入する。 $\Theta(E, d, \phi)$ を transition からなる 1 つの集合とする。 $\Theta(E, d, \phi)$ に、

$$D(\vartheta, \hat{\vartheta}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{D_n(\vartheta, \hat{\vartheta})}{1 + D_n(\vartheta, \hat{\vartheta})} \quad (\vartheta, \hat{\vartheta} \in \Theta(E, d, \phi))$$

により距離を定める。ただし、各自然数 n に対して、

$$D_n(\vartheta, \hat{\vartheta}) = \sup_{x \in D_n(\phi)} \left(\limsup_{h \downarrow 0} h^{-1}d(\vartheta(h, x), \hat{\vartheta}(h, x)) \right) \quad (\vartheta, \hat{\vartheta} \in \Theta(E, d, \phi))$$

である. $(E, \Theta(E, d, \phi))$ を *mutational space* という. $\tau \in (0, \infty]$ とし, 条件 $u(t) \in D(\phi)$ ($t \in [0, \tau)$) を満たす関数 $u : [0, \tau) \rightarrow E$ に対して,

$$\overset{\circ}{u}(t) = \left\{ \vartheta \in \Theta(E, d, \phi); \lim_{h \downarrow 0} h^{-1} d(u(t+h), \vartheta(h, u(t))) = 0 \right\}$$

と定める. このとき, $\overset{\circ}{u}(t)$ を t における u の *mutation* という.

注 3.1. Aubin [5] では, $\phi(x) = 0$ ($x \in E$), $M = e^{\alpha t}$ の場合に, *morphological* 方程式を考察するための transition が次のように導入されている. E を $\mathbb{R}^N$ の空でないコンパクト集合の全体 $\mathcal{K}(\mathbb{R}^N)$ とし, E 上の距離 d として, Hausdorff 距離 $d(K_1, K_2) = \max\{\sup_{x \in K_1} d(x, K_2), \sup_{x \in K_2} d(x, K_1)\}$ ($K_1, K_2 \in E$) を考える. 写像 $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathcal{K}(\mathbb{R}^N)$ は有界リプシッツ写像, 各 $x \in \mathbb{R}^N$ に対して, $F(x)$ は凸集合とする. このとき, 各 $K_0 \in E$ に対して, $\vartheta(t, K_0) = \{u(t); u \in W^{1,1}([0, t]; \mathbb{R}^N) \text{ が存在して, } u'(s) \in F(u(s)) \text{ (a.a.s } s \in [0, t]), u(0) \in K_0\}$ と定めれば, ϑ は (E, d, ϕ) 上の transition である.

次の例は, ノルム空間における微分の概念を捉える transition についてである.

例 3.2. X をノルム空間とする. $E = X$ とし, E 上の距離 d を $d(x, y) = \|x - y\|$ ($x, y \in E$) により定め, 汎関数 $\phi : E \rightarrow [0, \infty]$ を $\phi(x) = 0$ ($x \in E$) により定める. このとき, 各 $r > 0$ に対して, $D(\phi) = D_r(\phi) = E$ である. 各 $w \in E$ に対して, $\vartheta_w(t, x) = x + tw$ ($(t, x) \in [0, 1] \times E$) と定める. このとき, $\Theta(E, d, \phi) = \{\vartheta_w; w \in E\}$ とおくと, $(E, \Theta(E, d, \phi))$ は *mutational space* である. また, 各 $r > 0$, $w \in E$ に対して, $M_r(\vartheta_w) = 1$, $K_r(\vartheta_w) = 0$ である. さらに, 関数 $u : [0, \tau) \rightarrow E$ に対して, $\overset{\circ}{u}(t) \ni \vartheta_w$ であるとは, $\lim_{h \downarrow 0} h^{-1} d(u(t+h), \vartheta_w(h, u(t))) = \lim_{h \downarrow 0} h^{-1} \|u(t+h) - (u(t) + hw)\| = 0$ であり, このことは, u が t で右微分可能で, 右微分係数が w に等しくなることである.

次に, 準線形発展方程式に対する transition を導入する. 定理 2.1 の記号を用いる.

例 3.3. $E = X$ とし, E 上の距離 d を $d(x, y) = \|x - y\|_X$ ($x, y \in E$) により定める. E 上の汎関数 ϕ を $\phi(x) = \|x\|_Y$ ($x \in Y$), $\phi(x) = \infty$ ($x \in E \setminus Y$) により定める. 各 $w \in Y$ に対して, ϑ_w を $\vartheta_w(t, x) = T_w(t)x$ ($(t, x) \in [0, 1] \times D(\phi)$) により定めると, $\limsup_{h \downarrow 0} h^{-1} d(\vartheta_w(h, x), x) = \|A(w)x\|_X$ ($w \in Y, x \in Y$) であり, 次が成り立つ.

(i) 各 $r > 0, \nu > 0$ に対して, 定数 $M \geq 1$ が存在し, $M_r(\vartheta_w) \leq M$ ($w \in Y, \psi(w) \leq \nu$).

(ii) 各 $r > 0, \nu > 0$ に対して, 定数 $K > 0$ が存在し, $K_r(\vartheta_w) \leq K$ ($w \in Y, \psi(w) \leq \nu$).

$\Theta(E, d, \phi) = \{\vartheta_w; w \in Y\}$ とおくと, $(E, \Theta(E, d, \phi))$ は *mutational space* である. 関数 $u : [0, \tau) \rightarrow D(\phi)$ に対して, $\overset{\circ}{u}(t) \ni \vartheta_w$ であるとは, $\lim_{h \downarrow 0} h^{-1} d(u(t+h), \vartheta_w(h, u(t))) = \lim_{h \downarrow 0} h^{-1} \|u(t+h) - T_w(h)u(t)\| = 0$ であり, このことは, u が t で右微分可能で, 右微分係数が $A(w)u(t)$ に等しくなることである.

さて, D を E の部分集合とし, f を D から $\Theta(E, d, \phi)$ への写像とする. 関数 $u \in C([0, \tau); E)$ が *mutational equation* の初期値問題

$$\overset{\circ}{u}(t) \ni f(u(t)) \quad (t \in [0, \tau)), \quad u(0) = x \quad (3.1)$$

の解であるとは, $u(t) \in D \cap D(\phi)$ ($t \in [0, \tau)$), $u(0) = x$,

$$\lim_{h \downarrow 0} h^{-1} d(u(t+h), f(u(t))(h, u(t))) = 0 \quad (t \in [0, \tau)) \quad (3.2)$$

が成り立つことである.

例 3.4. $(E, \Theta(E, d, \phi))$ を例 3.2 で定義した mutational space とする. $D \subset X$ とし, 作用素 $A : D \rightarrow X$ に対して, 写像 $f : D \rightarrow \Theta(E, d, \phi)$ を $f(w) = \vartheta_{Aw} (w \in D)$ により定める. このとき, $u \in C([0, \tau), E)$ が初期値問題 (3.1) の解であることと, 各 $t \in [0, \tau)$ に対して, $u(t) \in D$ であり, u は右微分可能であり, $(d/dt)^+ u(t) = Au(t) (t \in [0, \tau))$ が成り立つことは同値である.

例 3.5. $(E, \Theta(E, d, \phi))$ を例 3.3 で定義した mutational space とする. 写像 $f : D \rightarrow \Theta(E, d, \phi)$ を $f(w) = \vartheta_w (w \in D)$ により定める. このとき, $u \in C([0, \tau), E)$ が初期値問題 (3.1) の解であることと, 各 $t \in [0, \tau)$ に対して, u は右微分可能であり, $u(t) \in Y (t \in [0, \tau))$, $(d/dt)^+ u(t) = A(u(t))u(t) (t \in [0, \tau))$ を満たすことは同値である.

さて, $\psi : E \rightarrow [0, \infty]$ を $D(\psi) = D$ である適正下半連続汎関数とし, 微分不等式

$$\limsup_{h \downarrow 0} h^{-1}(\psi(u(t+h)) - \psi(u(t))) \leq g(\psi(u(t))) \quad (t \in [0, \tau)) \quad (3.3)$$

を満たす初期値問題

$$\overset{\circ}{u}(t) \ni f(u(t)) \quad (t \in [0, \tau)), \quad u(0) = x \in D (= D(\psi))$$

の解の存在と一意性, 解の初期値に関する連続的依存性を考察する. 例 3.3 を参考に, 次の条件を満たす写像 $f : D \rightarrow \Theta(E, d, \phi)$ を考える.

(tS1) 各 $\nu > 0, r > 0$ に対して, $\sup_{w \in D_\nu(\psi)} M_r(f(w)) < \infty$ である.

(tS2) 各 $\nu > 0, r > 0$ に対して, $\sup_{w \in D_\nu(\psi)} K_r(f(w)) < \infty$ である.

距離空間における作用素半群のクラスを導入するために, 定理 1.1 の条件 (A2), 2 節の条件 (H1), 注 2.2 の中に現れる汎関数 $(x, y) \rightarrow N_x(x - y)$, ψ をモデルとして, 条件

(H) 各 $\nu > 0$ に対して, $r > 0$ が存在して $D_\nu(\psi) \subset D_r(\phi)$

と, 次の条件を満たす $D(\phi) \times D(\phi)$ 上で定義される非負な汎関数 Φ を導入する.

(Φ1) 各 $r > 0$ に対して, 定数 $L_r > 0$ が存在して

$$|\Phi(x, y) - \Phi(\hat{x}, \hat{y})| \leq L_r(d(x, \hat{x}) + d(y, \hat{y})) \quad ((x, y), (\hat{x}, \hat{y}) \in D_r(\phi) \times D_r(\phi)).$$

(Φ2) 各 $\nu > 0$ に対して, 定数 $M_\nu \geq m_\nu > 0$ が存在して

$$m_\nu d(x, y) \leq \Phi(x, y) \leq M_\nu d(x, y) \quad ((x, y) \in D_\nu(\psi) \times D_\nu(\psi)).$$

作用素族 $\{S(t); t \geq 0\}$ が汎関数 ψ, Φ に関して局所的に準縮小的な D 上の作用素半群であるとは, 半群性を満たし, 強連続な D からそれ自身への作用素族であり, 次の条件が成り立つときである.

(S) 各 $\nu > 0$ に対して, 定数 $\omega_\nu \geq 0$ が存在して,

$$\Phi(S(t)x, S(t)y) \leq e^{\omega_\nu t} \Phi(x, y) \quad (x, y \in D_\nu(\psi), t \geq 0).$$

さて, $\{S(t); t \geq 0\}$ を汎関数 ψ, Φ に関して局所的に準縮小的な D 上の作用素半群とする. 各 $x \in D$ に対して, $u(t) = S(t)x$ ($t \geq 0$) が, 条件 (3.3) を満たす初期値問題 (3.1) の解ならば, (3.2) で $t = 0$ として, $\lim_{h \downarrow 0} h^{-1}d(S(h)x, f(x)(h, x)) = 0$ ($x \in D$) が成り立つ. 条件 (tS2), (H), ($\Phi 1$) により, $x, y \in D_\nu(\psi)$ ならば, $r > 0$ が存在して, 十分小さな $h > 0$ に対して, $\Phi(f(x)(h, x), f(y)(h, y)) \leq \Phi(S(h)x, S(h)y) + L_r\{d(S(h)x, f(x)(h, x)) + d(S(h)y, f(y)(h, y))\}$ である. 条件 (S) により, $\limsup_{h \downarrow 0} h^{-1}(\Phi(f(x)(h, x), f(y)(h, y)) - \Phi(x, y)) \leq \omega_\nu \Phi(x, y)$ ($x, y \in D_\nu(\psi)$) が成り立つ. さらに, 微分不等式 (3.3) から, $\limsup_{h \downarrow 0} h^{-1}(\psi(S(h)x) - \psi(x)) \leq g(\psi(x))$ ($x \in D$) が成り立つ. この考察をもとに, f について, 次の3つの条件を導入する.

(f1) 各 $\nu > 0$ に対して, 写像 $f : D_\nu(\psi) \rightarrow \Theta(E, d, \phi)$ は連続である.

(f2) 各 $\epsilon > 0, x \in D$ に対して, $h \in (0, \epsilon], x_h \in D$ が存在して,

$$d(f(x)(h, x), x_h) \leq \epsilon h, \quad h^{-1}(\psi(x_h) - \psi(x)) \leq g(\psi(x)) + \epsilon.$$

(f3) 各 $\nu > 0$ に対して $\omega_\nu \geq 0$ が存在して,

$$\liminf_{h \downarrow 0} h^{-1}(\Phi(f(x)(h, x), f(y)(h, y)) - \Phi(x, y)) \leq \omega_\nu \Phi(x, y) \quad (x, y \in D_\nu(\psi)).$$

定理 3.6. 条件 (H), (tS1), (tS2) を仮定する. このとき, 次が成り立つ.

- (i) 条件 (f1), (f2), (f3) を仮定する. このとき, 任意の $x \in D$ に対して, $\tau_x = \tau(\psi(x))$ とおくと, (3.1) を満たし, $\psi(u(t))$ が $[0, \tau_x)$ 上局所的に有界である $u \in C([0, \tau_x); E)$ が存在し, 唯1つである.
- (ii) $\tau(\nu) = \infty$ ($\nu > 0$) であり, 写像 $f : D \rightarrow \Theta(E, d, \phi)$ は条件 (f1) を満たすとす. このとき, 条件 $\lim_{h \downarrow 0} h^{-1}d(S(h)x, f(x)(h, x)) = 0$ ($x \in D$), $\psi(S(t)x) \leq m(t; \psi(x))$ ($t \geq 0, x \in D$) を満たす, 汎関数 ψ, Φ に関して局所的に準縮小的な D 上の作用素半群 $\{S(t); t \geq 0\}$ が存在するための必要十分条件は, 条件 (f2), (f3) が成り立つことである. このとき, 各 $x \in D$ に対して, $u(t) = S(t)x$ は初期値問題 (3.1) の一意な解を与える.

注 3.7. 例 3.2, 例 3.4 に注意すれば, 定理 1.1 は, 定理 3.6 (ii) から導ける. また, 例 3.3, 例 3.5 に注意すれば, 定理 2.1 は, 定理 3.6 (i) から導ける.

注 3.8. 定理 3.6 は, 汎関数 ψ , 比較関数 g を $\psi = (\psi_j)_{j=1}^d, g = (g_j)_{j=1}^d$ へと一般化した設定で成立する. この一般化により, 微分方程式系への適用範囲が広がり, 加藤の準線形理論では直接的には扱えない, 次のサイズ構造モデルの BV 解の存在, 一意性, 解の初期値に関する連続的依存性へ応用できる.

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) + \partial_x(a(x, Q^{u(\cdot, t)}(x))u(x, t)) + b(x, Q^{u(\cdot, t)}(x))u(x, t) = 0, \\ a(0, Q^{u(\cdot, t)}(0))u(0, t) = \int_0^L c(x, Q^{u(\cdot, t)}(x))u(x, t) dx \end{cases}$$

ただし, $Q^u(x) = \alpha \int_0^x w(y)u(y) dy + \int_x^L w(y)u(y) dy$ ($x \in [0, L], t \geq 0$) であり, $\alpha \in (0, 1)$ であり, a, b, c, w は滑らかで非負であり, $a(L, Q) = 0$ ($Q \in \mathbb{R}$), $a_Q(x, Q) \leq 0$ ($(x, Q) \in [0, L] \times \mathbb{R}$) を満たす関数であり, [1, 2] で研究されている.

最後に, $1 < p < \infty$ とし, 条件 $|\mu|/\lambda < 2\sqrt{p-1}/|p-2|$, $2 \leq q \leq 2 + 2p/N$ のもとで, $\Omega \times (0, \infty)$ における複素 Ginzburg–Landau 方程式

$$u_t - (\lambda + i\mu)\Delta u + (\kappa + i\nu)|u|^{q-2}u = 0$$

に対する初期値境界値問題への応用を考える. ただし, $\lambda > 0$, $\kappa > 0$, $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ とし, Ω は滑らかな境界をもつ $\mathbb{R}^N$ の有界領域とする. この方程式に対する作用素半群論的な扱いが岡澤 [20] により報告されている. $E = L^p(\Omega)$ における2つの作用素

$$\begin{aligned} Au &= (\lambda + i\mu)(\Delta u - u) \quad (u \in D(A) = W_0^{1,p}(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)) \\ Bu &= -(\kappa + i\nu)|u|^{q-2}u + (\lambda + i\mu)u \quad (u \in D(B) = L^{p(q-1)}(\Omega)) \end{aligned}$$

を導入し, E 上の距離 d を $d(u, v) = \|u - v\|_{L^p}$ ($(u, v) \in E \times E$) により定め, $\phi : E \rightarrow [0, \infty]$ を $\phi(u) = \|Au\|_{L^p}$ ($u \in D(A)$), $\phi(u) = \infty$ ($u \in E \setminus D(A)$) により定める. 作用素 A により生成される $L^p(\Omega)$ 上の (C_0) 作用素半群を $\{T(t); t \geq 0\}$ とし, 各 $w \in E$ に対して, $\vartheta_w(t, u) = T(t)u + \int_0^t T(t-s)w ds$ ($(t, u) \in [0, 1] \times D(A)$) と定め, $\Theta(E, d, \phi) = \{\vartheta_w; w \in E\}$ とおくと, $(E, \Theta(E, d, \phi))$ は mutational space である. $r_0 > 0$ とし, $D = \{u \in D(A); \|u\|_{L^p} \leq r_0\}$ とおき, $b > 0$ を適切に選び, $\psi(u) = \exp((2b/\kappa)\|u\|_{L^p}^p)\|Au + Bu\|_{L^p}^p$ ($u \in D$), $\psi(u) = \infty$ ($u \in E \setminus D$) により定義される E 上の汎関数 ψ と $\Phi(u, v) = \exp((b/\kappa p)(\|u\|_{L^p}^p + \|v\|_{L^p}^p))\|u - v\|_{L^p}$ ($(u, v) \in D(A) \times D(A)$) により定義される $D(A) \times D(A)$ 上の非負な汎関数 Φ を用いる. 作用素 B は $D \subset D(B)$ であり, 定数 $\alpha > 0$, $\beta \in (0, 1)$ が存在して, $\|Bu\|_{L^p} \leq \alpha + \beta\|Au\|_{L^p}$ ($u \in D$) を満たし, 各 $\nu > 0$ に対して, $D_\nu(\psi)$ 上連続である. 写像 $f : D \rightarrow \Theta(E, d, \phi)$ を $f(u) = \vartheta_{Bu}$ ($u \in D$) と定めると, 条件 (f1), (f2), (f3) が成り立つ. 定理 3.6 により, 各 $u_0 \in D(A)$ に対して, 唯一つの時間大域的で右微分可能な関数 $u \in C([0, \infty); L^p(\Omega))$ が存在して, $u(0) = u_0$, $u(t) \in D(A)$ ($t \in [0, \infty)$), $(d/dt)^+ u(t) = Au(t) + Bu(t)$ ($t \in [0, \infty)$) を満たすことが分かる. この結果は右微分可能な解に関するものであるが, C^1 級の解を fractional step 法により求めるための半線形発展方程式に付随するリプシッツ作用素半群の近似定理を [17] で考察している. また, より一般的な設定で, 複素 Ginzburg–Landau 方程式の解の存在に関する興味深い結果が, 下妻, 横田, 吉井 [23] により得られている.

参考文献

- [1] A. Ackleh, K. Deng and S. Hu, A quasilinear hierarchical size-structured model: well-posedness and approximation, Appl. Math. Optim. **51** (2005), 35–59.
- [2] A. Ackleh and K. Ito, Measure-valued solutions for a hierarchically size-structured population, J. Differential Equations **217** (2005), 431–455.
- [3] L. Ambrosio, N. Gigli and G. Savare, Gradient flows in metric spaces and in the space of probability measures, Second edition, Lectures in Mathematics ETH Zurich. Birkhauser Verlag, Basel, 2008.
- [4] J.-P. Aubin, Viability theory, Systems & Control: Foundations & Applications, Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA, 1991.
- [5] J.-P. Aubin, Mutational and morphological analysis, Tools for shape evolution and morphogenesis, Systems & Control: Foundations & Applications, Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA, 1999.
- [6] S. Bianchini and A. Bressan, Vanishing viscosity solutions of nonlinear hyperbolic systems, Ann. of Math. **161** (2005), 223–342.

- [7] A. Bressan, Hyperbolic systems of conservation laws, The one-dimensional Cauchy problem, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, **20**, Oxford University Press, Oxford, 2000.
- [8] M. G. Crandall and T. M. Liggett, Generation of semi-groups of nonlinear transformations on general Banach spaces, *Amer. J. Math.* **93** (1971), 265–298.
- [9] T. J. R. Hughes, T. Kato and J. E. Marsden, Well-posed quasi-linear second-order hyperbolic systems with applications to nonlinear elastodynamics and general relativity, *Arch. Rational Mech. Anal.* **63** (1976), 273–294 (1977).
- [10] T. Kato, Quasi-linear equations of evolution, with applications to partial differential equations, *Spectral theory and differential equations (Proc. Sympos., Dundee, 1974; dedicated to Konrad Jorgens)*, pp. 25–70. *Lecture Notes in Math.*, **448**, Springer, Berlin, 1975.
- [11] Y. Kobayashi, Difference approximation of Cauchy problems for quasi-dissipative operators and generation of nonlinear semigroups, *J. Math. Soc. Japan* **27** (1975), 640–665.
- [12] Y. Kobayashi and N. Tanaka, Semigroups of Lipschitz operators, *Adv. Differential Equations* **6** (2001), 613–640.
- [13] Y. Kobayashi and N. Tanaka, Well-posedness for mutational equations under a general type of dissipativity conditions, *Israel J. Math.* (in press).
- [14] Y. Kōmura, Nonlinear semi-groups in Hilbert space, *J. Math. Soc. Japan* **19** (1967), 493–507.
- [15] T. Lorenz, Mutational analysis, A joint framework for Cauchy problems in and beyond vector spaces, *Lecture Notes in Mathematics*, **1996**, Springer-Verlag, Berlin, 2010.
- [16] R. H. Martin, Jr., Differential equations on closed subsets of a Banach space, *Trans. Amer. Math. Soc.* **179** (1973), 399–414.
- [17] T. Matsumoto and N. Tanaka, A product formula for semigroups of Lipschitz operators associated with semilinear evolution equations of parabolic type, *J. Approx. Theory* **163** (2011), 1217–1237.
- [18] M. Nagumo, Über die Lage der Integralkurven gewöhnlicher Differentialgleichungen, (German) *Proc. Phys.-Math. Soc. Japan* **24** (1942), 551–559.
- [19] H. Okamura, Condition necessaire et suffisante remplie par les equations differentielles ordinaires sans points de Peano, (French) *Mem. Coll. Sci. Kyoto Imp. Univ. Ser. A.* **24** (1942), 21–28.
- [20] N. Okazawa, Operator theory for the complex Ginzburg-Landau equation, (Japanese) *Sūgaku* **66** (2014), 275–297.
- [21] F. Otto, The geometry of dissipative evolution equations: the porous medium equation, *Comm. Partial Differential Equations* **26** (2001), 101–174.
- [22] N. Sanekata, Abstract quasi-linear equations of evolution in nonreflexive Banach spaces, *Hiroshima Math. J.* **19** (1989), 109–139.
- [23] D. Shimotsuma, T. Yokota and K. Yoshii, Existence and decay estimates of solutions to complex Ginzburg-Landau type equations, *J. Differential Equations* **260** (2016), 3119–3149.
- [24] N. Tanaka, The abstract Cauchy problem for dissipative operators with respect to metric-like functionals, *J. Math. Anal. Appl.* **421** (2015), 539–566.
- [25] Y. Tsutsumi, Theory of hyperbolic evolution equations and partial differential equations, (Japanese) *Sūgaku* **67** (2015), 82–97.